

УДК 533, 517.9

ВЛИЯНИЕ СИЛ КОРИОЛИСА НА КОНВЕКТИВНУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЗАВИХРЕННОГО ТЕЧЕНИЯ КАРМАНА ВДОЛЬ РАСТЯГИВАЮЩЕГОСЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

Д. Мухерджи, Б. Саху

Национальный технологический институт г. Руркелы, 769008 Руркела, Индия
E-mails: 518MA1001@nitrkl.ac.in, bikashsahoo@nitrkl.ac.in

Исследуется ламинарное течение вязкой жидкости вдоль растягивающегося вращающегося диска. Течение вдоль жесткого диска известно как течение Кармана. Впервые исследуется совместное влияние сил Кориолиса и растяжения диска в радиальном направлении на устойчивость завихренного течения Кармана. С использованием спектрального метода Чебышева выполнено численное исследование задачи. Установлено, что растяжение поверхности оказывает дестабилизирующее воздействие на течение Кармана.

Ключевые слова: завихренное течение Кармана, силы Кориолиса, спектральный метод Чебышева, радиальное растяжение, конвективная неустойчивость.

DOI: 10.15372/PMTF20200613

Введение. Установившееся ламинарное течение, вызванное вращением бесконечного круглого диска, впервые исследовал Т. фон Карман [1], получивший аналитическое решение уравнений Навье — Стокса. Интерес к исследованию пограничного слоя жидкости на вращающемся диске обусловлен тем, что такое течение встречается во многих прикладных задачах (обтекание жидкостью лопастей турбин, дисков статоров и роторов и т. п.).

В работе [2] изучено течение вязкой жидкости на поверхности вращающейся пластины и установлено, что при вращении пластины толщина слоя жидкости на ней уменьшается. Результаты исследований течения жидкости на вращающемся диске приведены в [3]. В работе [4] исследован теплоперенос в неньютоновской жидкости Райнера — Ривлина на вращающемся пористом диске. В [5] изучалось течение Кармана с краевыми условиями скольжения Навье.

Впервые исследование устойчивости пограничного слоя Кармана выполнено в работе [6], в которой изучалось обтекание стреловидного крыла. В теоретической работе [7] установлено, что учет сил Кориолиса приводит к увеличению критического числа Рейнольдса при возникновении неустойчивости типа I. В [8, 9] изучалась конвективная неустойчивость течений Бодеводта — Экмана — Кармана на вращающемся шероховатом диске, при этом в уравнениях Навье — Стокса учитывались силы Кориолиса. Установлено, что шероховатость оказывает стабилизирующее воздействие на течение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального технологического института г. Руркелы (Индия).

© Мухерджи Д., Саху Б., 2020

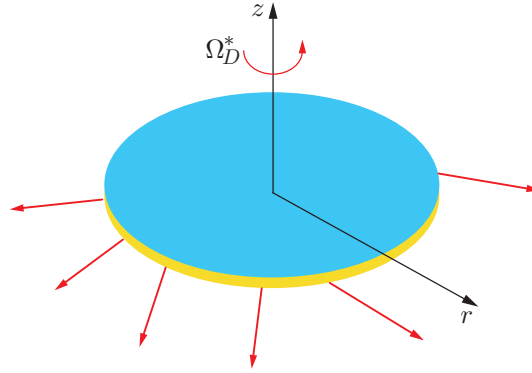


Рис. 1. Геометрия области течения

Из обзора литературы следует, что исследованию влияния сил Кориолиса на конвективную неустойчивость завихренного течения Кармана на растягивающемся диске уделялось недостаточно внимания. В данной работе результаты [9] обобщаются на случай совместного учета растяжения диска и сил Кориолиса.

1. Формулировка задачи. Ниже приводятся физическая и математическая постановки исследуемой задачи.

1.1. *Установившееся осредненное течение.* Завихренное течение Кармана в покоящейся жидкости возникает вследствие равномерного вращения бесконечного круглого диска. В данной работе уравнения задачи получены в предположении, что диск и жидкость, находящаяся на нем, вращаются вокруг общей вертикальной оси с угловыми скоростями Ω_D^* и Ω_F^* соответственно. Диск растягивается в радиальном направлении с однородной скоростью (рис. 1).

В цилиндрической системе координат (r^*, θ, z^*) размерные уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F_{t^*}^* + F^* \cdot \nabla F^* - \frac{G^{*2}}{r^*} - 2\Omega_D^* G^* &= -\frac{1}{\rho^*} P_{r^*}^* + \nu^* \left(\nabla^2 F^* - \frac{F^*}{r^{*2}} - \frac{2}{r^{*2}} G_\theta^* \right), \\ G_{t^*}^* + F^* \cdot \nabla G^* + \frac{F^* G^*}{r^*} + 2\Omega_D^* F^* &= -\frac{1}{\rho^* r^*} P_\theta^* + \nu^* \left(\nabla^2 G^* - \frac{G^*}{r^{*2}} + \frac{2}{r^{*2}} F_\theta^* \right), \\ H_{t^*}^* + F^* \cdot \nabla H^* &= -\frac{1}{\rho^*} P_{z^*}^* + \nu^* \nabla^2 H^*, \quad F_{r^*}^* + \frac{F^*}{r^*} + \frac{1}{r^*} G_\theta^* + H_{z^*}^* = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь F^*, G^*, H^* — компоненты размерного вектора скорости \mathbf{U}^* ; ρ^* — плотность; P^* — давление; ν^* — кинематическая вязкость; t^* — время. Предполагается, что течение является осесимметричным и установившимся:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial t^*} \equiv 0.$$

Следуя [1, 8], рассмотрим преобразования подобия

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{F^*}{r^* \Omega^* \text{Ro}}, & G(z) &= \frac{G^*}{r^* \Omega^* \text{Ro}}, & H(z) &= \frac{H^*}{l^* \Omega^* \text{Ro}}, \\ P(r, z) &= \frac{P^*}{\rho^* (l^*)^2 (\Omega^*)^2 \text{Ro}^2}, & r &= \frac{r^*}{l^*}. \end{aligned} \quad (2)$$

В переменных (2) уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности (1) записываются в виде

$$\begin{aligned} \text{Ro}(F^2 + F_z H - (G^2 - 1)) - \text{Co}(G - 1) - F_{zz} = 0, \quad \text{Ro}(2FG + G_z H) + \text{Co}F - G_{zz} = 0, \\ \text{Ro}(HH_z + P_z) - H_{zz} = 0, \quad 2F + H_z = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где безразмерные переменные F, G, H — радиальная, азимутальная и осевая компоненты скорости; P — давление; $z = z^*/l^*$; $l^* = \sqrt{\nu^*/\Omega^*}$ — толщина пограничного слоя; $\text{Ro} = (\Omega_F^* - \Omega_D^*)/\Omega^*$ — число Россби; Ω^* — скорость вращения системы:

$$\Omega^* = \frac{\Omega_F^*}{2 - \text{Ro}} + \frac{\Omega_D^*}{2 + \text{Ro}} = \frac{\Omega_F^* + \Omega_D^*}{4} + \left(\left(\frac{\Omega_F^* - \Omega_D^*}{4} \right)^2 + \frac{(\Omega_F^* - \Omega_D^*)^2}{2} \right)^{1/2},$$

параметр Кориолиса Co определен следующим образом: $\text{Co} = 2\Omega_D^*/\Omega^* = 2 - \text{Ro} - \text{Ro}^2$.

Система уравнений (3) является системой уравнений Кармана для течения пограничного слоя при $\text{Ro} = -1$, $\text{Co} = 2$, $\Omega^* = \Omega_D^*$. Соответствующие краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} F^*(0) = sr^*, \quad G^*(0) = 0, \quad H^*(0) = 0, \\ F^*(\infty) = 0, \quad G^*(\infty) = r^*\Omega^*\text{Ro}, \end{aligned}$$

где s — параметр растяжения. С учетом преобразований подобия (см. [8]) граничные условия принимают вид

$$F(0) = c, \quad G(0) = 0, \quad H(0) = 0; \quad (4)$$

$$F \rightarrow 0, \quad G \rightarrow 1, \quad z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Здесь $c = s/(\Omega^*\text{Ro})$ — параметр, характеризующий степень растяжения.

1.2. *Уравнения для возмущений.* Уравнения для возмущений выводятся из уравнений Навье — Стокса и уравнения неразрывности (1), записанных в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{F^*}{r_a^*\Omega^*\text{Ro}}, \quad G(z) = \frac{G^*}{r_a^*\Omega^*\text{Ro}}, \quad H(z) = \frac{H^*}{r_a^*\Omega^*\text{Ro}}, \\ P(r, z) = \frac{P^*}{\rho^*(r_a^*)^2(\Omega^*)^2\text{Ro}^2}, \quad t = \frac{t^*}{l^*/(r_a^*\Omega^*\text{Ro})}, \quad r = \frac{r_a^*}{l^*}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь r_a^* — радиальная координата точек диска. Безразмерное число Рейнольдса определяется следующим образом:

$$\text{Re} = r_a^*\Delta\Omega^*l^*/\nu^* = r_a\text{Ro}, \quad \Delta\Omega^* = \Omega_F^* - \Omega_D^* \quad (7)$$

и является отрицательным при отрицательных числах Россби. В соответствии со сформулированной выше моделью число Рейнольдса Re принимает как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от положительных или отрицательных значений Ro . Ниже представлены результаты только для положительных значений Re .

Введем возмущенные величины:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \frac{r\text{Ro}}{\text{Re}} F(z) + f(\tilde{\mathbf{x}}, t), \quad \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \frac{r\text{Ro}}{\text{Re}} G(z) + g(\tilde{\mathbf{x}}, t), \\ \tilde{h}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} H(z) + h(\tilde{\mathbf{x}}, t), \quad \tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \frac{\text{Ro}^2}{\text{Re}^2} P(z) + p(\tilde{\mathbf{x}}, t) \end{aligned} \quad (8)$$

($\tilde{\mathbf{x}} = (r, \theta, z)$; f, g, h, p — возмущения). Возмущения принимаются в виде [10]

$$(f, g, h, p) = (\hat{f}(z), \hat{g}(z), \hat{h}(z), \hat{p}(z)) e^{i(\alpha r + \bar{\beta}\theta - \omega t)}, \quad (9)$$

где $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i \in \mathbb{C}$ — радиальное волновое число; $\bar{\beta} = \beta\text{Re}/\text{Ro} \in \mathbb{R}$ — азимутальное волновое число; $\omega \in \mathbb{R}$ — частота. Далее предполагается, что $\bar{\beta}$ порядка $O(1)$.

Уравнения (1), полученные с использованием преобразований (5)–(7), линеаризуются относительно возмущений, определенных в (8). При линеаризации пренебрегается изменением числа Рейнольдса по радиусу, а именно: переменная r заменяется величиной Re/Ro . Членами порядка $O(\text{Re}/\text{Ro})$ также пренебрегается. В результате получаем следующую систему линеаризованных уравнений:

$$-\frac{1}{\text{Re}} \hat{f}_{zz} + \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} H \hat{f}_z + \left(i\alpha F + i\beta G - i\omega + \frac{\alpha^2}{\text{Re}} + \frac{\beta^2}{\text{Re}} + \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} F \right) \hat{f} - \left(\frac{2\text{Ro}}{\text{Re}} G + \frac{\text{Co}}{\text{Re}} \right) \hat{g} + F_z \hat{h} + i\alpha \hat{p} = 0; \quad (10)$$

$$-\frac{1}{\text{Re}} \hat{g}_{zz} + \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} H \hat{g}_z + \left(i\alpha F + i\beta G - i\omega + \frac{\alpha^2}{\text{Re}} + \frac{\beta^2}{\text{Re}} + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}} F \right) \hat{g} + \left(\frac{2\text{Ro}}{\text{Re}} G + \frac{\text{Co}}{\text{Re}} \right) \hat{f} + G_z \hat{h} + i\beta \hat{p} = 0; \quad (11)$$

$$-\frac{1}{\text{Re}} \hat{h}_{zz} + \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} H \hat{h}_z + \left(i\alpha F + i\beta G - i\omega + \frac{\alpha^2}{\text{Re}} + \frac{\beta^2}{\text{Re}} + \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} H' \right) \hat{h} + \hat{p} = 0; \quad (12)$$

$$\left(i\alpha + \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} \right) \hat{f} + i\beta \hat{g} + \hat{h}_z = 0.$$

Соответствующие краевые условия имеют вид

$$z = 0: \quad \hat{f}(z) = \hat{g}(z) = \hat{h}(z) = \hat{h}'(z) = \hat{p}(z) = 0; \quad (13)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \hat{f}(z) \rightarrow 0, \quad \hat{g}(z) \rightarrow 0, \quad \hat{h}(z) \rightarrow 0, \quad \hat{p}(z) \rightarrow 0. \quad (14)$$

Поскольку в данной работе представляют интерес стационарные моды неустойчивости типа I и типа II, далее будем считать, что частота $\omega = 0$. Исследования аналогичных задач выполнены в работах [11, 12].

1.3. *Уравнение энергетического баланса.* Анализ пространственной неустойчивости выполняется с использованием уравнения для кинетической энергии аналогично тому, как это сделано в работе [13]. Линеаризованные уравнения для возмущений (9), (10), (11), (12) умножаются на возмущения \hat{f} , \hat{g} , \hat{h} и \hat{p} соответственно. Полученные уравнения используются при выводе уравнения кинетической энергии для f , g , h и p :

$$\int_0^\infty \left[\underbrace{F \bar{K}_r}_{\text{I}} + \underbrace{(\overline{fp})_r}_{\text{II}} - \underbrace{(\overline{u\sigma_{11}} + \overline{g\sigma_{12}} + \overline{h\sigma_{13}})_r}_{\text{III}} \right] dz =$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \left[(-\overline{f\bar{h}} F_z) + (-\overline{g\bar{h}} G_z) + \left(-\overline{h^2} \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} H_z \right) \right] dz}_{\text{IV}} - \underbrace{\int_0^\infty \overline{(\sigma_{ij} f_{jx_i})} dz}_{\text{V}} - \underbrace{\int_0^\infty \left(\frac{\text{Ro}}{\text{Re}} \overline{fp} \right) dz}_{\text{VI}} - \underbrace{(\overline{hp})_{\bar{W}}}_{\text{VII}}$$

$$- \underbrace{\int_0^\infty \left(\overline{f\sigma_{31}} + \overline{g\sigma_{32}} + \overline{h\sigma_{33}} \right)_{\bar{W}} dz}_{\text{VII}} - \underbrace{\int_0^\infty \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} \bar{K}_z dz + \int_0^\infty \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} \overline{f^2} F dz + \int_0^\infty \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} \overline{g^2} F dz}_{\text{VIII}}. \quad (15)$$

Здесь $\sigma_{ij} = (f_{ix_j} + f_{jx_i})/\text{Re}$ — тензор напряжений; $K = (f^2 + g^2 + h^2)/2$; черта сверху обозначает величину, осредненную по периоду: $\overline{fg} = fg^* + f^*g$; индексом “*” отмечены комплексно-сопряженные величины; нижний индекс \bar{W} соответствует значению величины на стенке.

Нормализуем уравнение энергетического баланса (15):

$$-2\alpha_i = \underbrace{(P_1 + P_2 + P_3)}_{\text{IV}} + \underbrace{D}_{\text{V}} + \underbrace{(PW_1 + PW_2)}_{\text{VI}} + \underbrace{(S_1 + S_2 + S_3)}_{\text{VII}} + \underbrace{(G_1 + G_2 + G_3)}_{\text{VIII}}. \quad (16)$$

В (15), (16) I — слагаемое, учитывающее кинетическую энергию радиальной составляющей течения; II — слагаемое, учитывающее работу, произведенную возмущением давления; III — слагаемое, учитывающее работу вязких напряжений, действующих внутри пограничного слоя; IV — энергия рейнольдсовых напряжений P_i ; V — диссипация энергии вследствие наличия вязкости D ; VI — произведенная давлением работа PW_i ; VII — произведенная вязкими напряжениями на стенке работа S_i ; VIII — появляющиеся вследствие кривизны линий тока и трехмерности течения слагаемые G_i . Слагаемые PW_2, S_1, S_2, S_3 тождественно равны нулю в силу краевых условий (13), (14).

2. Результаты исследования и их обсуждение. Ниже анализируются результаты проведенных исследований течения на вращающемся диске.

2.1. Профиль скорости среднего течения. Существенно нелинейная связанная система уравнений (3) с краевыми условиями (4), (5) решалась при $\text{Ro} = -1, \text{Co} = 2$. Профиль скорости при различных значениях параметра растяжения s получен с использованием функции `brv4c` пакета MATLAB. Зависимости, приведенные на рис. 2, позволяют исследовать влияние растяжения поверхности при наличии сил Кориолиса на осцилляции профиля скорости. С увеличением параметра s амплитуда осцилляций существенно увеличивается. Вычисленные значения $F'(0)$ и $G'(0)$ приведены в табл. 1.

2.2. Нейтральные кривые. Нейтральные кривые ограничивают область неустойчивости пограничных слоев. Верхняя часть нейтральной кривой соответствует модам типа I, нижняя — модам типа II. Нейтральные кривые определялись для того, чтобы выяснить, какое действие (стабилизирующее или дестабилизирующее) оказывает растяжение поверхности на течение. Спектральный метод Чебышева [14] использовался для определения конвективной неустойчивости с помощью нейтральных кривых. В данной работе нейтральные кривые строились в плоскости (Re, α_r) . Обнаружено, что с увеличением параметра растяжения s дестабилизирующее действие растяжения как на моды типа I, так и на моды типа II возрастает (рис. 3). Критические значения числа Рейнольдса, при которых появляются неустойчивые моды, приведены в табл. 2.

2.3. Энергетические полосы. С использованием решения уравнения баланса энергии (15) выполнен энергетический анализ. На рис. 4 приведены энергетические полосы, характеризующие изменение полной кинетической энергии течения TE . Установлено, что с увеличением параметра растяжения s кинетическая энергия течения на вращающемся диске увеличивается. Таким образом, с увеличением параметра растяжения дестабилизация течения становится более существенной, что подтверждает результаты, приведенные в подп. 2.2. Данный метод верификации можно применить для любого течения на вращающемся диске.

Заключение. В работе приведены результаты исследования влияния степени растяжения поверхности на характеристики завихренного течения жидкости вдоль этой поверхности. С использованием решения уравнений задачи установлено, что амплитуда осцилляций течения увеличивается с увеличением степени растяжения поверхности. Результаты получены с использованием метода исследования конвективной неустойчивости и энергетического метода.

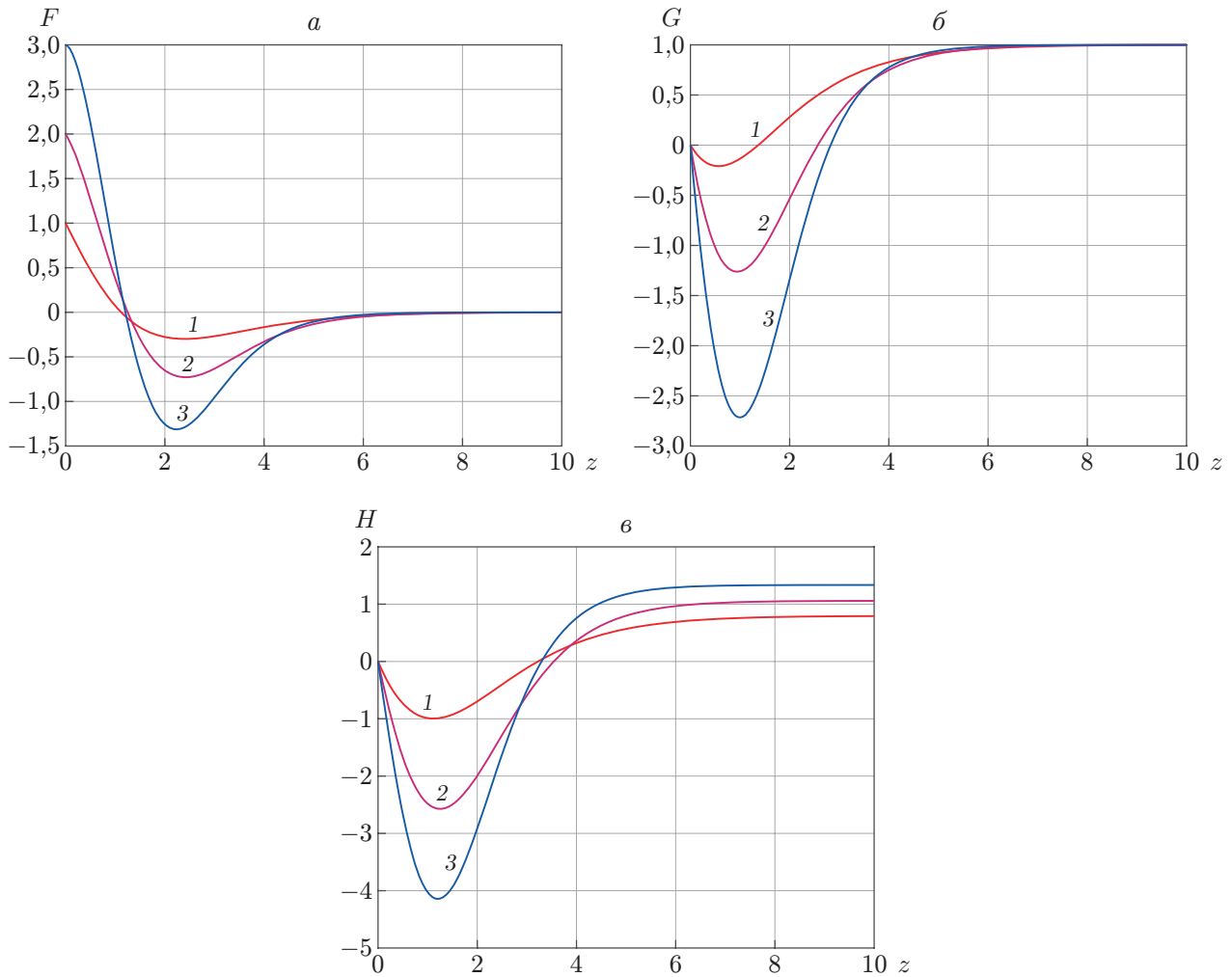


Рис. 2. Зависимости радиальной (а), азимутальной (б) и осевой (в) компонент скорости течения от координаты z при различных значениях параметра растяжения c :

1 — $c = 1$, 2 — $c = 2$, 3 — $c = 3$

Таблица 1

Начальные значения величин F' , G' на поверхности диска при различных значениях параметра растяжения c

c	$F'(0)$	$G'(0)$
1	-1,108 462 476 009 160	-0,830 687 622 996 489
2	-0,954 643 935 161 588	-2,966 291 428 121 822
3	-0,236 970 723 967 446	-5,689 336 459 036 221

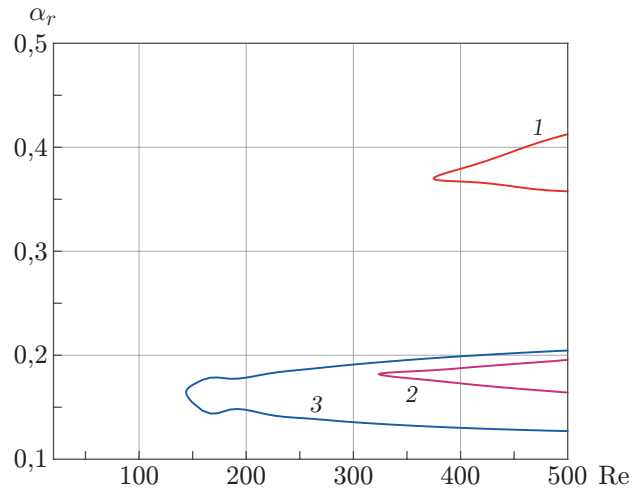


Рис. 3. Нейтральные кривые в плоскости (Re, α_r) при различных значениях параметра растяжения c :
 1 — $c = 1$, 2 — $c = 2$, 3 — $c = 3$

Таблица 2

Критические значения числа Рейнольдса и параметра α_r при различных значениях параметра растяжения c

c	Re	α_r
1	374,8	0,37
2	323,7	0,18
3	144,3	0,16

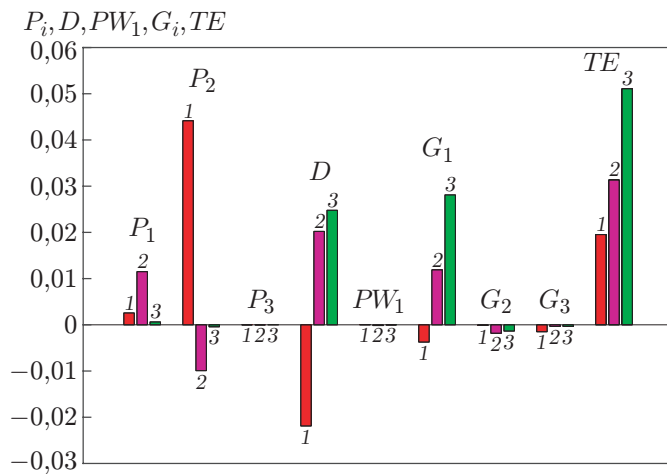


Рис. 4. Энергетические полосы, характеризующие изменение кинетической энергии течения:
 1 — $c = 1$, 2 — $c = 2$, 3 — $c = 3$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kármán Th. von.** Über Laminare und Turbulente Reibung // Z. angew. Math. Mech. 1921. Bd 1. S. 233–252.
2. **Lavrent'eva O. M.** Flow of a viscous liquid in a layer on a rotating plane // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1989. V. 30, N 5. P. 706–713.
3. **Childs P. R.** Rotating flow. S. l.: Elsevier, 2010. P. 1–176.
4. **Attia H. A.** Numerical study of the flow and heat transfer in a Reiner — Rivlin fluid on a rotating porous disk // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2005. V. 46, N 1. P. 68–76.
5. **Sahoo B.** Effects of partial slip, viscous dissipation and joule heating on von Kármán flow and heat transfer of an electrically conducting non-Newtonian fluid // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 2982–2998.
6. **Gregory N., Stuart J. T., Walker W.** On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk // Philos. Trans. Roy. Soc. A: Math. Phys. Engng Sci. 1955. V. 248. P. 155–199.
7. **Lilly D. K.** On the instability of Ekman boundary flow // J. Atmospher. Sci. 1966. V. 23. P. 481–494.
8. **Lingwood R., Garrett S.** The effects of surface mass flux on the instability of the BEK system of rotating boundary-layer flows // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2011. V. 30. P. 299–310.
9. **Alveroglu B., Segalini A., Garrett S. J.** The effect of surface roughness on the convective instability of the BEK family of boundary-layer flows // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2016. V. 56. P. 178–187.
10. **Gustavsson L. H.** Initial-value problem for boundary layer flows // Phys. Fluids. 1979. V. 22. P. 1602–1605.
11. **Cooper A., Harris J., Garrett S. J., et al.** The effect of anisotropic and isotropic roughness on the convective stability of the rotating disk boundary layer // Phys. Fluids. 2015. V. 27. 014107.
12. **Alveroglu B.** The convective instability of the BEK system of rotating boundary-layer flows over rough disks: Ph. D. thesis. Leicester: Univ. of Leicester, 2016.
13. **Cooper A., Carpenter P. W.** The stability of rotating-disc boundary-layer flow over a compliant wall. Pt 1. Type I and II instabilities // J. Fluid Mech. 1997. V. 350. P. 231–259.
14. **Zebib A.** A Chebyshev method for the solution of boundary value problems // J. Comput. Phys. 1984. V. 53, N 3. P. 443–455.

*Поступила в редакцию 25/XI 2019 г.,
после доработки — 7/IV 2020 г.
Принята к публикации 27/IV 2020 г.*