

УДК 539.3

DOI: 10.15372/PMTF202315383

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА, ОСНОВАННОГО НА ИНВАРИАНТАХ

С. В. Левяков

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

E-mail: stan-levyakov@yandex.ru

С целью уменьшения объема вычислений при численном решении задач нелинейной динамики оболочек с применением пошаговых процедур интегрирования по времени предлагается использовать криволинейный треугольный конечный элемент с малым числом степеней свободы. Компактность конечно-элементной формулировки достигается путем применения инвариантов тензоров деформаций. При этом используются натуральные компоненты деформаций, которые определяются в направлениях трех координатных линий, параллельных сторонам элемента. Для оценки возможностей предложенной конечно-элементной модели приведены решения, описывающие большие перемещения и углы поворота, а также динамическую потерю устойчивости.

Ключевые слова: оболочки, нелинейная динамика, геометрическая нелинейность, устойчивость, метод конечных элементов, инварианты тензора деформаций

Введение. Тонкостенные оболочечные конструкции, применяемые в различных областях техники, подвергаются нагрузкам, быстро изменяющимся во времени. К числу таких нагрузок относятся ветровые и сейсмические воздействия, взрывная ударная волна, тепловой удар и др. Для корректной оценки реакции оболочек на внешнее динамическое воздействие требуется применение методов анализа, основанных на интегрировании уравнений движения с учетом нелинейного характера деформирования.

Прогресс в решении задач нелинейной динамики пластин и оболочек достигнут при использовании численных процедур, среди которых важную роль играет метод конечных элементов. В ряде работ предложены различные формулировки конечных элементов для анализа динамики оболочек произвольной формы с учетом геометрической нелинейности деформирования.

В [1] разработан конечный элемент двойкой кривизны с 48 степенями свободы для расчета оболочек, удовлетворяющих гипотезам Кирхгофа — Лява. Элементы, основанные на неклассических теориях, учитывающих деформацию поперечного сдвига в различных приближениях, предложены в работах [2–6], основанных на предположении об умеренно больших прогибах, сравнимых с толщиной оболочки, и малых углах поворота. В этом случае применимы деформационные соотношения, аналогичные принятым в нелинейной теории пластин Кармана.

Для снятия ограничений, налагаемых на величину углов поворота, использовались различные подходы к описанию кинематики конечных поворотов в трехмерном простран-

стве. Один из таких подходов основан на модели вырожденного упругого тела, в соответствии с которой конечно-элементные соотношения выводятся из общих уравнений трехмерного упругого тела с использованием кинематических и силовых гипотез, реализуемых путем выбора соответствующих функций форм. Различные варианты вырожденных элементов предложены в [7–9]. Преимуществом элементов такого типа является простота формулировки и компьютерной реализации, а также возможность комбинирования их с элементами трехмерного тела. Однако их применение приводит к значительным вычислительным затратам, связанным с большим числом степеней свободы.

Альтернативой вырожденным элементам являются подходы, основанные на теориях оболочек. В [10] предложен треугольный элемент тонкой оболочки, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява. В [11–13] разработаны плоские треугольные элементы с 18 степенями свободы для анализа статики и динамики слоистых композитных оболочек с учетом поперечного сдвига.

Ряд работ посвящен построению геометрически точных конечных элементов, в которых отсчетная поверхность описывается аналитическими функциями, а коэффициенты первой и второй фундаментальных форм вычисляются точно в узловых точках. В [14, 15] разработаны шестиузловые треугольные элементы с шестью степенями свободы в узле. Формулировка четырехугольных изопараметрических элементов приведена в [16, 17]. В [18–20] рассмотрены элементы, основанные на семипараметрической модели оболочки с учетом поперечного обжатия.

Известны модели, не требующие введения вращательных степеней свободы. Например, в [21, 22] предложен треугольный трехузловой элемент с тремя поступательными степенями свободы в каждом узле. Поле постоянных искривлений в пределах элемента определяется через узловые перемещения соседних трех элементов. Использование данной модели позволяет значительно сократить общее число степеней свободы. Недостатками модели являются чувствительность результатов вычислений к качеству сетки и применимость только для достаточно тонких оболочек с малой изгибной жесткостью [23].

Следует отметить также изогеометрический подход к анализу конструкций, в котором в качестве базисных функций используются неоднородные рациональные B -сплайны, применяемые в современных системах автоматизированного проектирования. Элементы оболочек, построенные с использованием таких базисных функций, рассмотрены в [24, 25].

Таким образом, построение эффективных вычислительных схем для решения задач нелинейной динамики оболочек остается актуальной проблемой. Применение пошаговых процедур интегрирования уравнений движения по времени приводит к большому объему вычислений, так как на каждом временном шаге требуется применять итерационные методы определения деформированных конфигураций. Даже при современном уровне развития вычислительной техники анализ динамического поведения моделей с большим числом степеней свободы требует значительных временных затрат.

В настоящей работе рассматривается возможность уменьшения объема вычислений путем использования экономичной конечно-элементной модели. Предлагается треугольный конечный элемент с 15 степенями свободы, для построения которого используются инварианты тензора деформаций.

1. Кинематика конечного элемента. Рассмотрим тонкую упругую оболочку в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 . В качестве поверхности отсчета используем срединную поверхность. Выберем на срединной поверхности оболочки три точки с радиус-векторами \mathbf{r}_i и построим в каждой из них единичные векторы нормалей \mathbf{d}_i ($i = 1, 2, 3$). Совокупность трех точек (узлов) с присоединенными векторами будем называть кинематической группой оболочки [26]. Конфигурация группы однозначно определяется девятью

величинами вида

$$e_i = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|, \quad \psi_{2k} = \mathbf{d}_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j), \quad \psi_{1j} = \mathbf{d}_j(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j). \quad (1)$$

Здесь и далее индексы i, j, k подчиняются правилу циклической перестановки. Указанные величины определяются взаимным расположением узлов и взаимной ориентацией присоединенных векторов.

В общем случае при деформировании оболочки кинематическая группа совершает сложное движение, которое можно разложить на перемещения твердого тела и деформацию, приводящую к изменению взаимного положения узлов и присоединенных векторов. Конфигурация деформированной кинематической группы определяется по формулам, аналогичным (1). При движении группы как твердого тела значения величин (1) сохраняются.

Треугольный конечный элемент называется ассоциированным с кинематической группой, если деформации в его пределах являются непрерывными функциями деформаций группы. За счет ассоциирования выполняется необходимый критерий сходимости конечно-элементного решения: деформации элемента точно обращаются в нуль при его движении как твердого тела.

Будем полагать, что в процессе деформирования оболочки узловые векторы сохраняют единичную длину, но необязательно остаются нормальными к деформированной поверхности оболочки. Возможные состояния элемента определяются 15 степенями свободы кинематической группы, которые включают три поступательных перемещения узла и два угла поворота узлового присоединенного вектора.

2. Инварианты тензора деформаций. Рассмотрим треугольный элемент поверхности с вершинами i, j, k , лежащими на срединной поверхности оболочки. В качестве координатной плоскости используем секущую плоскость, проходящую через вершины (узлы) i, j, k на срединной поверхности. Если узлы расположены близко друг к другу, то элемент поверхности будет пологим относительно плоскости и в его пределах метрические свойства поверхности и плоскости можно считать одинаковыми. Введем локальную декартову систему координат ξ_1, ξ_2 на секущей плоскости (рис. 1).

Для описания деформированного состояния элемента оболочки определим тензор деформации ε_{mn} при плоском напряженном состоянии, тензор искривлений срединной поверхности \varkappa_{mn} и тензор $\Gamma_{mn} = \gamma_{m3}\gamma_{n3}$, где γ_{m3} — деформации поперечного сдвига ($m, n = 1, 2$). Введем общее обозначение u_{mn} для указанных тензоров и запишем инва-

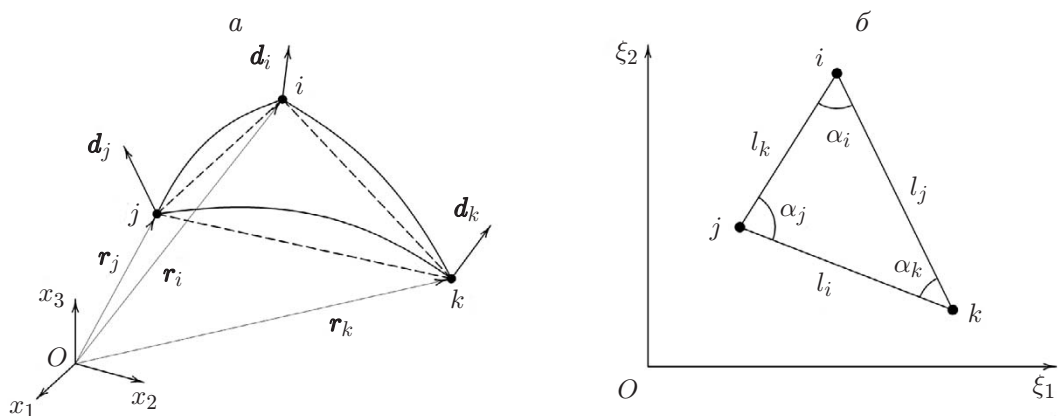


Рис. 1. Конечный элемент оболочки (а) и его проекция на секущую плоскость (б)

рианты тензора u_{mn} в декартовых координатах

$$I_u = u_{11} + u_{22}, \quad I_{uu} = u_{11}u_{22} - u_{12}^2. \quad (2)$$

При выводе деформационных соотношений для треугольного элемента выполняется переход к новой системе координат, образованной тремя линиями, направленными вдоль сторон треугольника. Натуральные компоненты тензора u_i ($i = 1, 2, 3$), определяемые для указанных трех направлений, связаны с декартовыми компонентами линейными соотношениями (по i суммирование не проводится)

$$u_i = \lambda_{mi} \lambda_{ni} u_{mn},$$

где λ_{mi} — направляющие косинусы единичного вектора, направленного от узла j к узлу k ; по повторяющимся индексам проводится суммирование, за исключением случаев, оговоренных особо.

В [27] показано, что инварианты (2) выражаются через натуральные компоненты тензора в виде

$$\begin{aligned} I_u &= 2(a a_i - 2a_i^2)u_i, & I_{uu} &= (a_i a_j - 2\beta_{ij})u_i u_j & (i, j = 1, 2, 3), \\ a_i &= \frac{l_i^2}{\sqrt{\Delta}}, & a &= \frac{l_i l_i}{\sqrt{\Delta}}, & \Delta &= (l_i l_i)^2 - 2l_i^2 l_i^2, & \beta_{ij} &= \begin{cases} a_i^2, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

где l_i — длина стороны элемента, противолежащей узлу i .

3. Потенциальная и кинетическая энергия. Выражение для потенциальной энергии деформации элемента оболочки имеет вид

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} (B_1 I_\varepsilon^2 - 2B_2 I_{\varepsilon\varepsilon} + D_1 I_\varkappa^2 - 2D_2 I_{\varkappa\varkappa} + C_\Gamma I_\Gamma) dA_e, \quad (4)$$

где

$$(B_1, D_1) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} (1, z^2) dz, \quad (B_2, D_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} (1, z^2) dz, \quad C_\Gamma = k_s \int_{-h/2}^{h/2} G dz.$$

Здесь A_e — площадь элемента; h — толщина оболочки; z — координата, отсчитываемая по нормали к срединной поверхности оболочки; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига; k_s — коэффициент поперечного сдвига, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по толщине оболочки; $I_\varepsilon, \dots, I_\Gamma$ — инварианты, определенные формулами (2), (3).

Учитывая пологость элемента относительно плоскости, проходящей через его узлы, для натуральных компонент тензоров деформации примем следующие аппроксимации (по индексам i, j, k суммирование не проводится):

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} (l_i^{-2} l_i^{*2} - 1); \quad (5)$$

$$\varkappa_i = \frac{1}{l_i} (\vartheta_{2k} - \vartheta_{1j}) + \frac{1}{l_i} (\vartheta_{2k} + \vartheta_{1j}) \frac{\eta_{i1}}{l_i} (L_k - L_j), \quad \gamma_i = \eta_{i2} (\vartheta_{2k} + \vartheta_{1j}), \quad (6)$$

где параметры $\varepsilon_i, \vartheta_{2k}, \dots$, описывающие деформации кинематической группы элемента, вычисляются по формулам

$$l_i = e_i, \quad \vartheta_{2k} = \frac{1}{l_i} (\psi_{2k}^* - \psi_{2k}), \quad \vartheta_{1j} = \frac{1}{l_i} (\psi_{1j}^* - \psi_{1j}),$$

$$\eta_{i1} = \frac{3}{1 + \eta_{i3}}, \quad \eta_{i2} = \frac{1}{6}\eta_{i1}\eta_{i3}, \quad \eta_{i3} = \frac{12D_1}{C_\Gamma l_i^2}.$$

Здесь L_1, L_2, L_3 — L -координаты [28]; индексом “*” отмечены величины, соответствующие деформированному состоянию элемента. Величины $e_i^*, \psi_{2k}^*, \dots$ определяются соотношениями, аналогичными (1).

Соотношения (6) представляют собой точное решение линейной задачи об изгибе балки Тимошенко при заданных углах поворота концевых сечений. Заметим, что соотношения (5), (6) обеспечивают выполнение условия постоянства деформаций в элементе.

Подставляя (5), (6) в (4), получаем выражение для потенциальной энергии конечного элемента

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T K \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \vartheta_{23}, \vartheta_{12}, \vartheta_{21}, \vartheta_{13}, \vartheta_{22}, \vartheta_{11})^T,$$

где \mathbf{u} — вектор, включающий деформации кинематической группы элемента; K — матрица жесткости, зависящая от упругих свойств материала и начальной геометрии элемента. Матрица жесткости вычисляется по формулам

$$K = \begin{pmatrix} K_\varepsilon & 0 \\ 0 & K_\varkappa + K_\Gamma \end{pmatrix},$$

$$K_\varepsilon = A_e(B_1 \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}^T - 2B_2(\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T - \beta)), \quad K_\varkappa = \int_{A_e} C^T Q C dA_e, \quad K_\Gamma = W^T S W,$$

$$Q = D_1 \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}^T - 2D_2(\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T - \beta),$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = 2 \begin{pmatrix} aa_1 - 2a_1^2 \\ aa_2 - 2a_2^2 \\ aa_3 - 2a_3^2 \end{pmatrix}, \quad S = C_\Gamma A_e \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix},$$

где отличные от нуля компоненты матриц W, C имеют вид

$$W_{11} = W_{12} = \eta_{12}, \quad W_{23} = W_{24} = \eta_{22}, \quad W_{35} = W_{36} = \eta_{32},$$

$$C_{11} = (1 + \eta_{11}(L_3 - L_2))/l_1, \quad C_{12} = -(1 + \eta_{11}(L_2 - L_3))/l_1,$$

$$C_{23} = (1 + \eta_{21}(L_1 - L_3))/l_2, \quad C_{24} = -(1 + \eta_{21}(L_3 - L_1))/l_2,$$

$$C_{35} = (1 + \eta_{31}(L_2 - L_1))/l_3, \quad C_{36} = -(1 + \eta_{31}(L_1 - L_2))/l_3.$$

Многочлены второго порядка, входящие в выражение для K_\varkappa , интегрируются точно по трем точкам с использованием кубатурных формул Гаусса [28].

Для формулировки уравнений, необходимых для итерационного решения нелинейных задач, важную роль играют коэффициенты первой и второй вариаций энергии деформации

$$\delta \Pi_e = \mathbf{g}_e^T \delta \mathbf{q}_e, \quad \delta^2 \Pi_e = \delta \mathbf{q}_e^T H_e \delta \mathbf{q}_e,$$

где \mathbf{g}_e, H_e — градиент и гессиан потенциальной энергии элемента соответственно; $\delta \mathbf{q}_e$ — вектор вариаций независимых переменных, определяемый степенями свободы кинематической группы:

$$\mathbf{q}_e = (\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \mathbf{q}_3^T)^T, \quad \mathbf{q}_i = (x_{1i}^*, x_{2i}^*, x_{3i}^*, \omega_{1i}, \omega_{2i})^T, \quad i = 1, 2, 3.$$

При вычислении кинетической энергии треугольного конечного элемента полагаем, что масса элемента сосредоточена в его узлах, причем вклад массы в каждый узел пропорционален соответствующему углу треугольника. Инерция вращения поперечных волокон

относительно осей касательных к срединной поверхности не учитывается. В результате кинетическая энергия элемента равна

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_e M_e \dot{\mathbf{q}}_e,$$

$$M_e = \text{diag}(\boldsymbol{\mu}_1^T, \boldsymbol{\mu}_2^T, \boldsymbol{\mu}_3^T), \quad \boldsymbol{\mu}_i = \rho h A_e (\alpha_i / \pi) (1, 1, 1, 0, 0)^T,$$

где M_e — диагональная матрица масс; α_i — угол при узле i ; точка обозначает производную по времени; ρ — плотность материала.

4. Интегрирование уравнений движения. Нелинейные уравнения движения конечно-элементной модели оболочки запишем в матричном виде

$$M\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где M, C — матрица масс и матрица демпфирования соответственно; \mathbf{g} — градиент полной потенциальной энергии оболочки, зависящий от ее текущей конфигурации.

Для интегрирования уравнений (7) движения применим неявную схему Ньюмарка. Временной интервал разбивается на конечные интервалы длиной Δt . В момент времени $t + \Delta t$ решение системы находится с помощью итерационной процедуры Ньютона — Рафсона по схеме

$$(H_{(p)}^{t+\Delta t} + a_1 M + a_4 C) \delta \mathbf{q}_{(p+1)}^{t+\Delta t} = -\mathbf{g}_{(p)}^{t+\Delta t} - (a_1 M + a_4 C)(\mathbf{q}_{(p)}^{t+\Delta t} - \mathbf{q}^t) + \\ + (a_2 M - a_5 C)\dot{\mathbf{q}}^t + (a_3 M - a_6 C)\ddot{\mathbf{q}}^t; \quad (8)$$

$$a_1 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1 - 2\alpha}{2\alpha}, \quad a_4 = \frac{\beta}{\alpha \Delta t}, \quad a_5 = 1 - \frac{\alpha}{\beta}, \quad a_6 = \left(1 - \frac{\beta}{2\alpha}\right) \Delta t,$$

где $\alpha = 1/4$; $\beta = 1/2$ [29].

На каждой итерации с использованием решения системы (8) уточняется положение узлов и присоединенных векторов по формулам

$$\mathbf{r}_n^{*(p+1)} = \mathbf{r}_n^{*p} + \delta \mathbf{r}_n^{*p}, \\ \mathbf{d}_n^{*(p+1)} = c_1^p \mathbf{d}_n^{*p} + c_2^p (\mathbf{t}_{1n}^{*p} \delta \omega_{1n}^p + \mathbf{t}_{2n}^{*p} \delta \omega_{2n}^p), \\ \mathbf{t}_{mn}^{*(p+1)} = \mathbf{t}_{mn}^{*p} - \delta \omega_{mn}^p (c_2^p \mathbf{d}_n^{*p} + c_3^p (\mathbf{t}_{1n}^{*p} \delta \omega_{1n}^p + \mathbf{t}_{2n}^{*p} \delta \omega_{2n}^p)), \\ \delta \omega_n^p = ((\delta \omega_{1n}^p)^2 + (\delta \omega_{2n}^p)^2)^{1/2}, \quad c_1^p = \cos \delta \omega_n^p, \quad c_2^p = \frac{\sin \delta \omega_n^p}{\delta \omega_n^p}, \quad c_3^p = \frac{1 - \cos \delta \omega_n^p}{(\delta \omega_n^p)^2},$$

где p — номер итерации; n — номер узла; $\mathbf{t}_{1n}^*, \mathbf{t}_{2n}^*$ — вспомогательные единичные векторы, составляющие с присоединенным вектором \mathbf{d}_n^* ортогональную тройку векторов.

Определив решение $\mathbf{q}^{t+\Delta t}$ с заданной точностью, скорости и ускорения на шаге $t + \Delta t$ вычисляем по формулам

$$\ddot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} = a_1 \mathbf{q}^{t+\Delta t} - a_1 \mathbf{q}^t - a_2 \dot{\mathbf{q}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{q}}^t, \\ \dot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} = a_4 \mathbf{q}^{t+\Delta t} - a_4 \mathbf{q}^t + a_5 \dot{\mathbf{q}}^t + a_6 \ddot{\mathbf{q}}^t.$$

5. Результаты расчетов. Построенный треугольный конечный элемент с 15 степенями свободы используется ниже при решении ряда задач нелинейного деформирования и устойчивости упругих оболочек.

5.1. Колебания физического маятника. Рассмотрим свободные колебания физического маятника в виде подвешенной за конец балки длиной $l = 1$ м, шириной $b = l/4$ и толщиной $h = l/100$. В начальный момент времени балка отклоняется на угол $\theta_0 = 0,999\pi$ относительно положения статического равновесия и затем совершает колебания в поле сил

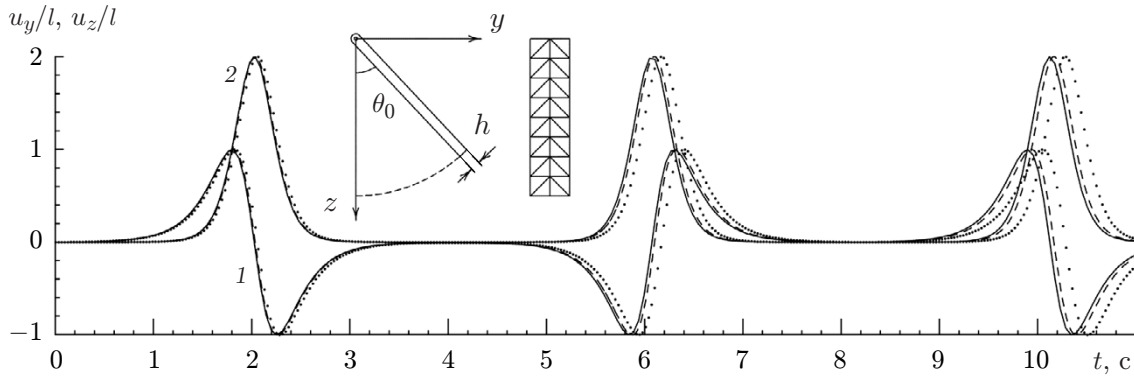


Рис. 2. Схема физического маятника и зависимости перемещения конца маятника от времени:

сплошные линии — аналитическое решение, пунктирные — численное решение для сетки размером 2×4 , штриховые — численное решение для сетки размером 2×8 ; 1 — u_y , 2 — u_z

тяжести с ускорением свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Здесь и далее в расчетах демпфирование не учитывается.

На рис. 2 приведено численное решение задачи, полученное при $\Delta t = 0,0044 \text{ с}$. На каждом шаге по времени требуются 2–4 итерации для нахождения решения. Полученные результаты хорошо согласуются с точным аналитическим решением для жесткого маятника

$$u_y/l = 2k(\sqrt{1 - k^2 \text{cd}^2 \omega t} \text{cd} \omega t - k'), \quad u_z/l = 2k^2(1 - \text{cd}^2 \omega t),$$

где u_y , u_z — перемещения свободного конца балки в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно; $\omega = \sqrt{3g/(2l)}$; $k = \sin \theta_0/2$ — модуль эллиптического интеграла; $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительный модуль; $\text{cd} \omega t$ — эллиптическая функция Якоби. Согласно точному решению период колебаний составляет $T = 4K/\omega = 8,0997 \text{ с}$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода.

Заметная погрешность конечно-элементного решения, полученного при использовании грубой сетки размером 2×4 , объясняется несогласованностью матрицы масс. При увеличении числа элементов наблюдается быстрая сходимость к аналитическому решению.

5.2. Движение тонкостенного кольца. Рассмотрим задачу о сложном движении короткой цилиндрической оболочки, вызванном импульсной нагрузкой (см., например, [9, 30]). Примем следующие данные: радиус $R = 7,5 \text{ м}$, длина $L = 3 \text{ м}$, толщина стенки $h = 0,02 \text{ м}$, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^8 \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$, плотность материала $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$. Сетка конечных элементов получена разбиением оболочки на 3 и 32 участка в осевом и окружном направлениях соответственно. Общее число степеней свободы модели равно 640. Сетка и схема нагружения показаны на рис. 3. В каждом отмеченном узле действует сила $p(t)$, изменяющаяся по закону

$$p(t) = \begin{cases} 10t, & 0 < t < 0,5, \\ 10(1 - t), & 0,5 < t < 1, \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

В начальный момент времени перемещения, скорости и ускорения равны нулю. Шаг интегрирования по времени принят равным $0,005 \text{ с}$.

В результате нагружения оболочка совершает сложное движение, включающее поступательное и вращательное движения, на которые налагаются свободные колебания с

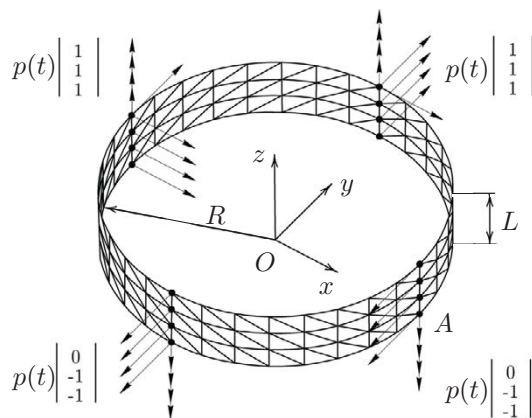


Рис. 3. Схема нагружения кольца и конечно-элементная сетка

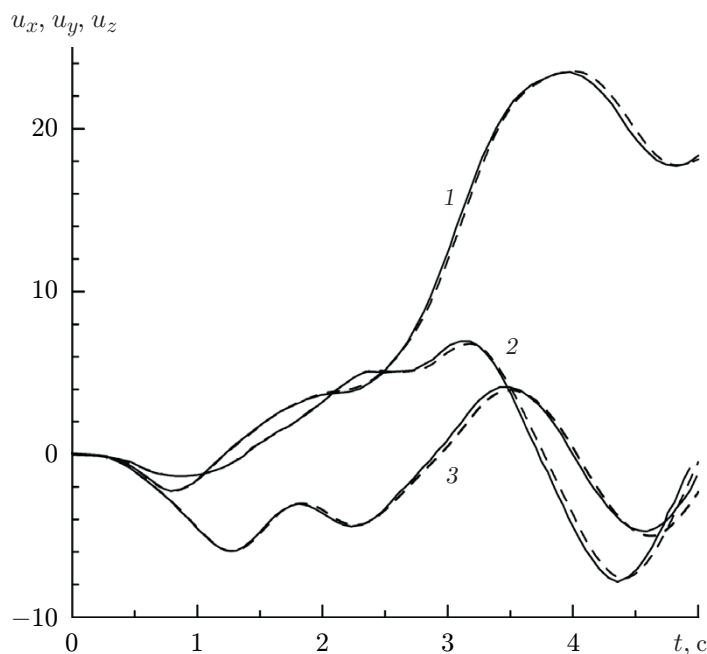


Рис. 4. Перемещения точки A кольца:

сплошные линии — решение [9], штриховые — численное решение; 1 — u_x , 2 — u_y , 3 — u_z

конечной амплитудой. На рис. 4 приведены зависимости перемещений точки $A(R; 0; 0)$ от времени. Конфигурации оболочки с интервалом 2 с показаны на рис. 5.

Зависимости кинетической, потенциальной и полной энергии оболочки от времени представлены на рис. 6. После снятия импульсной нагрузки центр масс оболочки движется поступательно вдоль оси Ox с постоянной скоростью 7,08 м/с. При $t > 1$ с значение полной энергии остается постоянным и равным 432 Н·м, что согласуется с теоретическим значением 445,2 Н·м [30].

5.3. Устойчивость эйлера стержня. Исследуем поведение прямолинейного шарнирно опертого стержня при осевом сжатии. Известно, что при статической нагрузке, превышающей критическое значение $P_{cr} = (\pi/l)^2 EI$ (эйлерова нагрузка), стержень переходит в устойчивое изогнутое состояние. При увеличении нагрузки в закритической об-

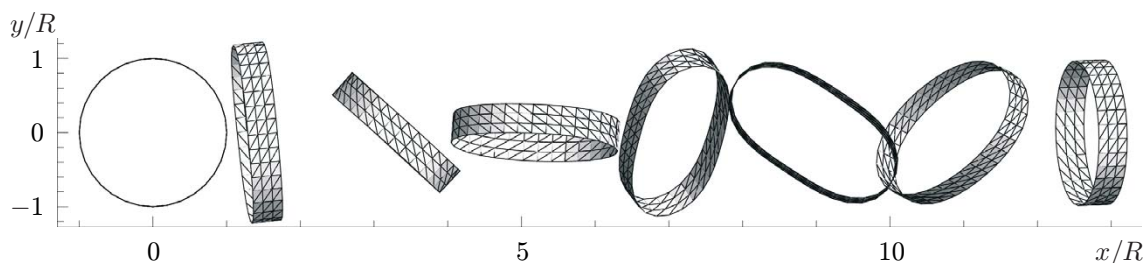
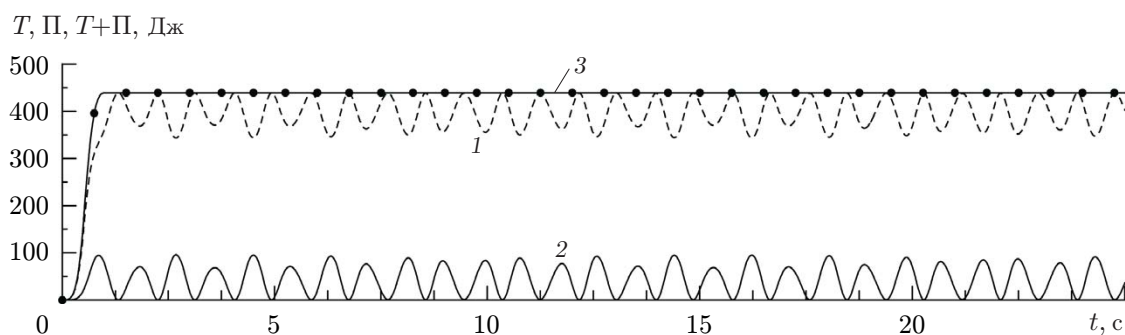


Рис. 5. Деформированные состояния кольца в различные моменты времени

Рис. 6. Зависимости кинетической T (1), потенциальной Π (2) и полной $T+\Pi$ (3) энергии кольца от времени

ласти деформирования опертые концы начинают сближаться, и при достижении значения $P \approx 2,1833P_{cr}$ опоры совмещаются. В этом случае изогнутый стержень получает возможность свободно вращаться как твердое тело вокруг точки совмещения опор. При дальнейшем увеличении внешней силы происходит прощелкивание (вторичная потеря устойчивости), в результате чего стержень поворачивается на угол, равный 180° , выпрямляется и занимает новое устойчивое состояние равновесия при растягивающей силе. Решение этой задачи в статической постановке рассматривалось в работах [31–33]. Начальная стадия выпучивания сжимаемого стержня с учетом сил инерции изучалась в [34, 35].

Исследуем динамическую задачу устойчивости на примере стержня длиной l с узким прямоугольным сечением с размерами $b = l/40$, $h = l/200$. Для характеристик материала примем следующие значения: $E = 2,077 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0$, $\rho = 8166$ кг/м³. Нагрузка возрастает по линейному закону $P = P_{cr}t/t_{cr}$, где t_{cr} — момент времени (задаваемый параметр), в который достигается критическое значение P_{cr} .

Расчетная схема для стержня показана на рис. 7. Используется равномерная сетка размером 2×40 . При $x = l$ перемещения узлов равны нулю, а узлы, к которым приложена сжимающая сила P , могут смещаться только в направлении оси Ox . Для инициирования потери устойчивости вводится геометрическая неправильность вида

$$w_0(x) = \varepsilon_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \varepsilon_2 \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

где $\varepsilon_1 = h/100$, $\varepsilon_2 = l/100$ — амплитуды неправильностей, определяющие эксцентрическое расположение опор и отклонение оси стержня от прямолинейной формы соответственно.

На рис. 8 показаны диаграммы деформирования стержня для “быстрого” ($t_{cr} = 0,25$ с) и “медленного” ($t_{cr} = 4$ с) режимов нагружения. В обоих случаях интервал $0 < t < 2t_{cr}$ разбивался на 16 000 шагов для интегрирования по времени. Из рис. 8 следует, что выпучивание стержня при “быстром” нагружении происходит при нагрузке, значительно

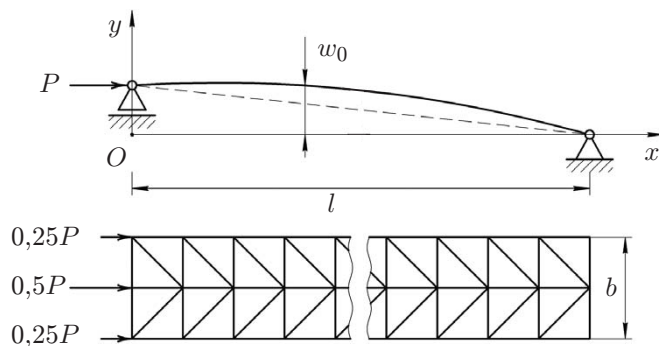


Рис. 7. Расчетная схема для стержня

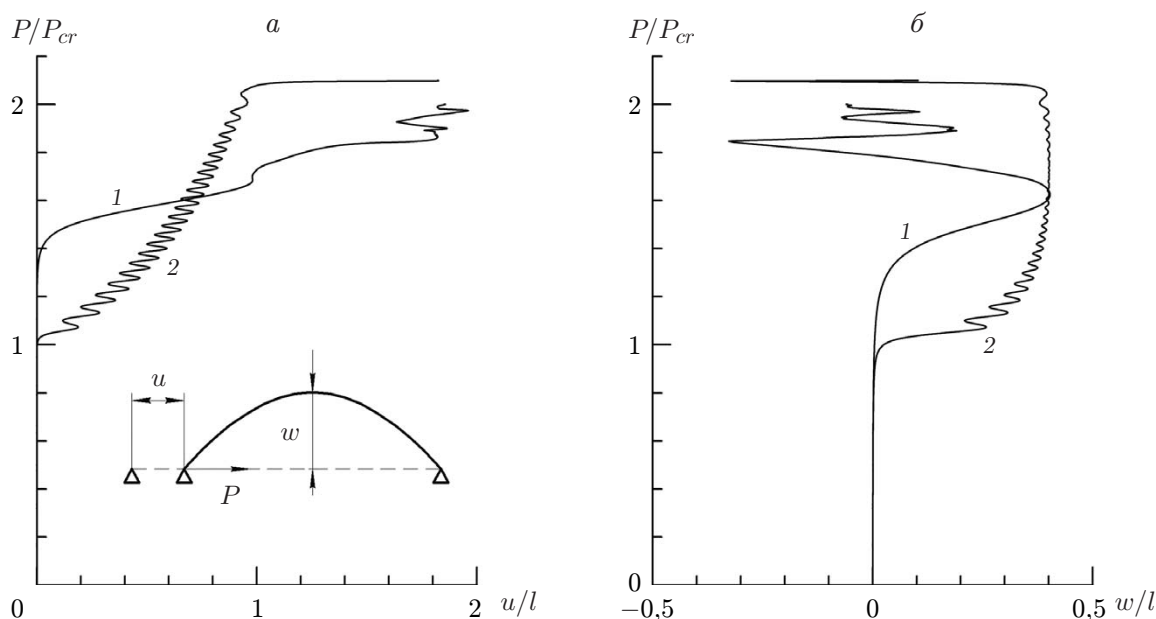


Рис. 8. Кинематическая схема и зависимости нагрузки от осевого перемещения (а) и прогиба (б) сжатого стержня:

1 — $t_{cr} = 0,25$ с, 2 — $t_{cr} = 4$ с

превышающей значение P_{cr} . Этот эффект запаздывания объясняется влиянием сил инерции.

Конфигурации стержня в различные моменты времени показаны на рис. 9. При сближении эксцентрически расположенных опор искривленный стержень начинает поворачиваться как твердое тело по часовой стрелке. После прохождения левого конца стержня через неподвижную опору изогнутый стержень мгновенно поворачивается и переходит в растянутое состояние. При этом возбуждаются колебания с конечной амплитудой, сравнимой с длиной стержня.

5.4. *Устойчивость цилиндрической оболочки при радиальном сжатии.* Исследуем нелинейное деформирование и потерю устойчивости цилиндрической оболочки при радиальном сжатии. Нагружение осуществляется путем задания радиальных смещений w четырех точек, симметрично расположенных в среднем поперечном сечении оболочки. Примем линейный закон $w = vt$, где v — постоянная скорость нагружения. Материал имеет следующие характеристики: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0$, $\rho = 7800$ кг/м³. Использована

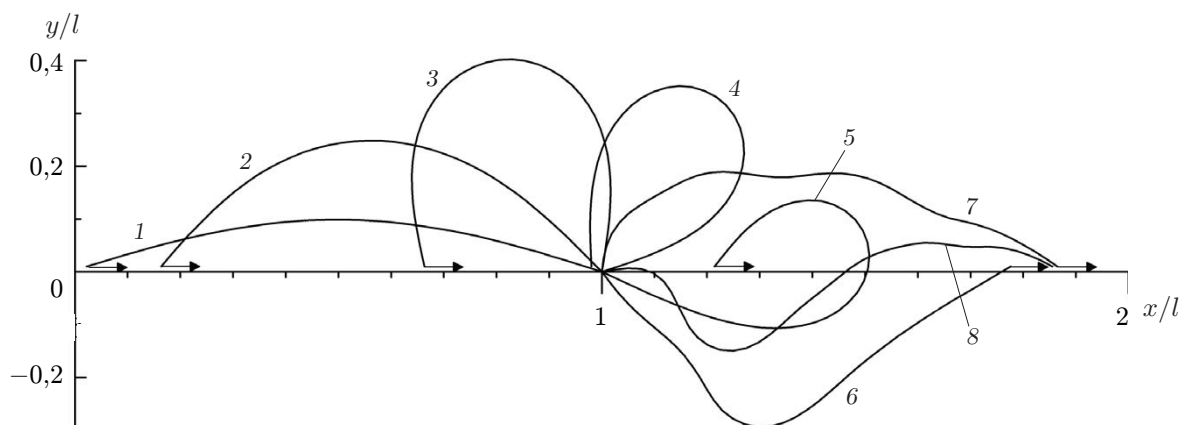


Рис. 9. Формы стержня при быстром нагружении сжимающей силой ($t_{cr} = 0,25$ с):

1 — $t = 0,350$ с, 2 — $t = 0,375$ с, 3 — $t = 0,400$ с, 4 — $t = 0,425$ с, 5 — $t = 0,450$ с, 6 — $t = 0,4625$ с, 7 — $t = 0,475$ с, 8 — $t = 0,500$ с

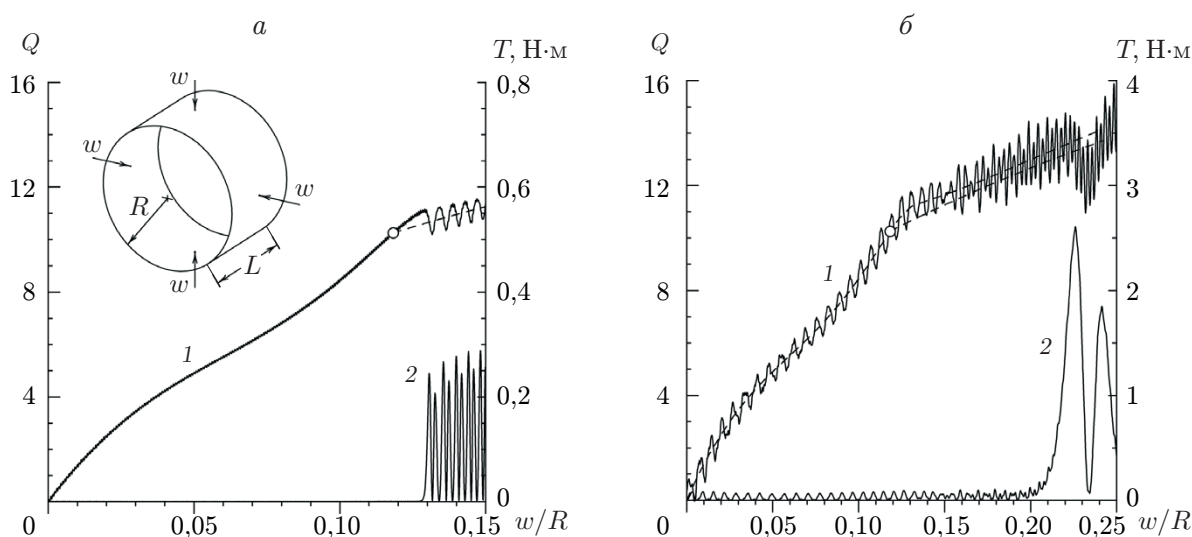


Рис. 10. Схема нагружения и диаграммы деформирования цилиндрической оболочки при радиальном сжатии со скоростью $v = 0,05$ с (а) и $v = 0,5$ с (б):

1 — Q , 2 — T ; сплошные линии — решение динамической задачи, штриховые — решение статической задачи, точки — точки бифуркации для статического решения

сетка, полученная путем разбиения оболочки на 12 и 72 элемента по меридиональной и окружной координатам соответственно. Для инициирования выпучивания оболочки в четырех точках, расположенных между точками кинематического нагружения, приложены знакопередающиеся малые силы, направленные вдоль оси.

На рис. 10 показана зависимость параметра нагружения $Q = PR^2/(DL)$ (P — радиальная сила в точке нагружения) и кинетической энергии оболочки T от заданного прогиба w . Решение статической задачи (штриховые линии) показывает, что на кривой деформирования имеется точка бифуркации, при достижении которой возможен переход к несимметричным формам равновесия оболочки с четко выраженной депланацией поперечных сечений. В [36] установлено, что критическое значение параметра нагружения равно $Q_{cr} = 10,251$. В случае динамического нагружения с относительно малой

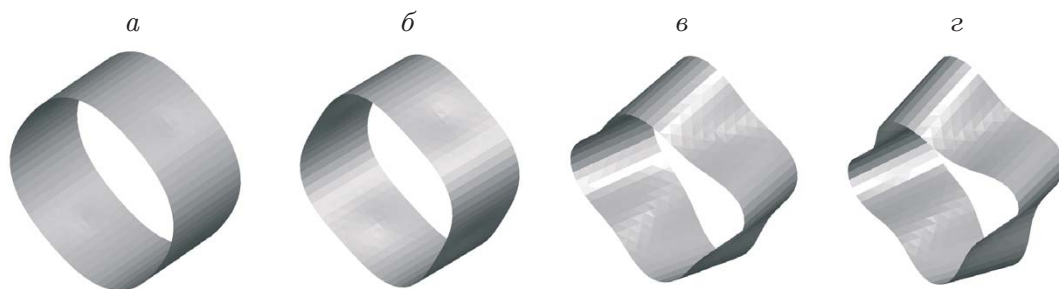


Рис. 11. Деформированные состояния оболочки при $v = 0,05$ с:
 a — $t = 0,1$ с, b — $t = 0,25$ с, v — $t = 0,5$ с, z — $t = 0,75$ с

скоростью $v = 0,05$ с оболочка теряет устойчивость при большем значении параметра $Q = 11,0$, которое определено как первый локальный максимум на кривой деформирования при $w/R = 0,129$, $t = 0,258$ с. После прохождения указанного максимума происходит переход к несимметричным конфигурациям. Увеличение скорости нагружения до $v = 0,5$ с приводит к интенсивным колебаниям, которые затрудняют анализ устойчивости симметричных форм равновесия с использованием диаграммы нагрузка — прогиб. Поэтому в качестве критерия динамической потери устойчивости принят первый максимум кинетической энергии оболочки как функции времени. Показано, что оболочка теряет устойчивость при $w/R = 0,226$, $t = 0,0452$ с. Таким образом, происходит значительное запаздывание потери устойчивости, вызванное влиянием сил инерции.

На рис. 11 показаны деформированные состояния оболочки в различные моменты времени.

Заключение. Предложен криволинейный треугольный трехузловой конечный элемент для исследования нелинейной динамики упругих оболочек. Элемент обладает меньшим по сравнению с большинством известных аналогов числом степеней свободы, которые включают три перемещения и два угла поворота нормалей в каждом узле (всего 15 степеней свободы). Особенностью подготовки расчетной модели оболочки является задание не только координат узлов, но и направляющих косинусов узловых нормалей к срединной поверхности оболочки.

Компактность конечно-элементной формулировки достигается за счет использования инвариантов, которые выражаются через три нормальные компоненты деформаций в направлении сторон элемента. Использование инвариантов позволяет избежать громоздких матричных преобразований координат и упростить получение разрешающей системы уравнений для определения деформированных конфигураций конечно-элементной модели оболочки.

Верификация конечного элемента подтверждает его эффективность для исследования нелинейного деформирования и устойчивости упругих оболочек при больших перемещениях и углах поворота. Анализ результатов решения рассмотренных тестовых задач свидетельствует о важности учета инерционных эффектов при исследовании нелинейного деформирования и устойчивости оболочек в условиях динамического нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yang T. Y., Saigal S. A curved quadrilateral element for static analysis of shells with geometric and material nonlinearities // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1985. V. 21, N 4. P. 617–635.

2. **Kant T., Kommineni J. R.** Geometrically non-linear transient analysis of laminated composite and sandwich shells with a refined theory and C^0 finite elements // *Comput. Structures*. 1994. V. 52, N 6. P. 1243–1259.
3. **Reddy J. N., Chandrashekhara K.** Geometrically non-linear transient analysis of laminated, doubly curved shells // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 1985. V. 20, N 2. P. 79–90.
4. **Nanda N., Bandyopadhyay J. N.** Geometrically nonlinear transient analysis of laminated composite shells using the finite element method // *J. Sound Vibrat.* 2009. V. 325. P. 174–185.
5. **Ganapathi M., Varadan T. K.** Application of a field-consistent shear flexible element for nonlinear dynamic analysis of laminated shells // *Finite Elements Anal. Design*. 1992. V. 12. P. 105–116.
6. **Patel B. P., Singh S., Nath Y.** Stability and nonlinear dynamic behaviour of cross-ply laminated heated cylindrical shells // *Latin Amer. J. Solids Structures*. 2006. V. 3. P. 245–261.
7. **Kuhl D., Ramm E.** Constraint energy momentum algorithm and its application to non-linear dynamics of shells // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 1996. V. 136, N 3/4. P. 293–315.
8. **Hughes T. J. R., Liu W. K., Levit I.** Nonlinear dynamic finite element analysis of shells // *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*. Berlin; Heidelberg: Springer, 1981. P. 151–168.
9. **Zhang Z., Liu D. H., Liu D. Y.** Degenerated shell element with composite implicit time integration scheme for geometric nonlinear analysis // *Intern. J. Numer. Methods Engng.* 2016. V. 105, N 7. P. 483–513.
10. **Isoldi L., Awruch A. M., Teixeira P. R. F., Morsch I. B.** Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of composite laminates shells with triangular finite element // *J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Engng.* 2008. V. 30, N 1. P. 84–93.
11. **Argyris J., Papadrakakis M., Mouroutis Z. S.** Nonlinear dynamic analysis of shells with the triangular element TRIC // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2003. V. 192. P. 3005–3038.
12. **To C. W. S., Wang B.** Transient responses of geometrically nonlinear laminated composite shell structures // *Finite Elements Anal. Design*. 1998. V. 31, N 2. P. 117–134.
13. **Li S., Zhang J., Cui X.** Nonlinear dynamic analysis of shell structures by the formulation based on a discrete shear gap // *Acta Mech.* 2019. V. 230. P. 3571–3591.
14. **Campello E. M. B., Pimenta P. M., Wriggers P.** An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational DOFs and general hyperelasticity. Pt 2. Shells // *Comput. Mech.* 2011. V. 48. P. 195–211.
15. **Ota N. S. N., Wilson L., Neto A. G., et al.** Nonlinear dynamic analysis of creased shells // *Finite Elements Anal. Design*. 2016. V. 121, N 15. P. 64–74.
16. **Brank B., Briseghella L., Tonello N., Damjanić F. B.** On non-linear dynamics of shells: implementation of energy-momentum conserving algorithm for a finite rotation shell model // *Intern. J. Numer. Methods Engng.* 1998. V. 42, N 3. P. 409–442.
17. **Brank B., Korelc J., Ibrahimbegović A.** Dynamics and time-stepping schemes for elastic shells undergoing finite rotations // *Comput. Structures*. 2003. V. 81, N 12. P. 1193–1210.
18. **Coda H. B., Paccola R. R.** Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells // *Math. Problems Engng.* 2009. V. 2009. P. 1–32.
19. **Sansour C., Wriggers P., Sansour J.** Nonlinear dynamics of shells: theory, finite element formulation, and integration schemes // *Nonlinear Dynamics*. 1997. V. 13. P. 279–305.
20. **Balah M., Al-Ghamedy H. N.** Energy-momentum conserving algorithm for nonlinear dynamics of laminated shells based on a third-order shear deformation theory // *J. Engng Mech.* 2005. V. 131, N 1. P. 12–22.

21. **Flores F. G., Oñate E.** Rotation-free finite element for the non-linear analysis of beams and axisymmetric shells // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2006. V. 195, N 41–43. P. 5297–5315.
22. **Oñate E., Cendoya P., Miquel J.** Non-linear explicit dynamic analysis of shells using the BST rotation-free triangle // *Engng Comput.* 2002. V. 19, N 6. P. 662–706.
23. **Gärdsback M., Tibert G.** A comparison of rotation-free triangular shell elements for unstructured meshes // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2007. V. 196, N 49–52. P. 5001–5015.
24. **Espath L. F. R., Braun A. L., Awruch A. M., Dalcin L. D.** A NURBS-based finite element model applied to geometrically nonlinear elastodynamics using a corotational approach // *Intern. J. Numer. Methods Engng.* 2015. V. 102, N 13. P. 1839–1868.
25. **Guo Y. J., Pan M. D., Wei X. H., et al.** Implicit dynamic buckling analysis of thin-shell isogeometric structures considering geometric imperfections // *Intern. J. Numer. Methods Engng.* 2023. V. 124. P. 1055–1088.
26. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** Кинематические группы и конечные элементы в механике деформируемого тела // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 1994. № 3. С. 67–82.
27. **Kuznetsov V. V., Levyakov S. V.** Phenomenological invariants and their application to geometrically nonlinear formulation of triangular finite elements of shear deformable shells // *Intern. J. Solids Structures.* 2009. V. 46. P. 1019–1032.
28. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
29. **Бате К.** Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. М.: Стройиздат, 1982.
30. **Gebhardt C. G., Romero I., Rolfes R.** A new conservative/dissipative time integration scheme for nonlinear mechanical systems // *Comput. Mech.* 2020. V. 65. P. 405–427.
31. **Maddocks J. H.** Stability of nonlinearly elastic rods // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1984. V. 85. P. 311–354.
32. **Domokos G.** Global description of elastic bars // *Z. angew. Math. Mech.* 1994. Bd 74. S. 289–291.
33. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** О вторичной потере устойчивости эйлерова стержня // *ПМТФ.* 1999. Т. 40, № 6. С. 184–185.
34. **Корнев В. М.** Анализ процесса выпучивания стержней при ударе // *ПМТФ.* 1980. № 5. С. 180–184.
35. **Ильгамов М. А.** Исследование инерционной стадии выпучивания стержня при продольном сжатии // *ПМТФ.* 2017. Т. 58, № 4. С. 180–188.
36. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** Уточненная геометрически нелинейная формулировка треугольного конечного элемента тонкой оболочки // *ПМТФ.* 2007. Т. 48, № 5. С. 160–172.

*Поступила в редакцию 14/IX 2023 г.,
после доработки — 8/I 2024 г.
Принята к публикации 29/I 2024 г.*