

УДК 533.6.11

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ОТКРЫВАЕМОЙ С ТОРЦА ТРУБЕ

В. И. Борисенко, М. А. Кутищев, В. П. Мукоид

Государственный научно-инженерный центр систем контроля и аварийного реагирования
Госкоматома Украины, 252011 Киев

В рамках одномерной модели рассматривается задача о внезапном вскрытии одного из торцов удлиненной цилиндрической емкости, содержащей газ под давлением. Предложена новая форма граничного условия на открытом торце трубы, которая учитывает местное гидродинамическое сопротивление, обусловленное неоднородностью реальной физической задачи. Система уравнений газовой динамики интегрируется численным методом распада разрывов Годунова. Детально описана процедура численной реализации нелинейного краевого условия на открытом срезе трубы. Графики, полученные в результате расчетов, сравниваются с экспериментальными данными и свидетельствуют о целесообразности использования предложенной методики.

Введение. Задача об опорожнении газонаполненной цилиндрической емкости в среду с заданным постоянным давлением считается классической в теории неустановившихся течений. Основная особенность задачи заключается в возникновении колебательного процесса, в результате которого появляются обратные течения и газ проникает из внешней среды в полость цилиндра.

Задача исследовалась многими авторами [1–3]. Общим для указанных работ является тот факт, что в качестве граничного условия на открытом торце трубы задается постоянное давление, равное давлению на бесконечности. Используя законы сохранения, находят остальные гидродинамические параметры потока в выходном сечении. Получаемое таким образом решение имеет характер незатухающего колебательного процесса, что противоречит опытным данным [4], поскольку авторы теоретических исследований не учитывали потери энергии на открытом торце трубы, обусловленные неоднородностью течения.

В [5, 6] рассматриваются задачи численного моделирования одномерных течений газа в сложной системе труб с учетом местных сопротивлений, которые вводятся только в местах сочленения соседних одномерных участков путем задания внутренних граничных условий. Последние, представляющие интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии, в итоге сводятся к решению задачи о распаде разрыва на скачке площади сечения трубы [7–10]. На концах одномерных участков граничные условия задаются обычным образом без учета местных сопротивлений [5, 6].

В настоящей статье закономерности газодинамических течений в трубе исследуются с учетом местного сопротивления в выходном сечении трубы. Задача решается численно методом распада разрывов Годунова [11]. Детально описана процедура численной реализации граничного условия с учетом сопротивления, она универсальна и может с успехом использоваться в других численных методах. Приведенный графический материал, основанный на результатах многочисленных расчетов, сравнивается с результатами экспериментов и подтверждает эффективность и целесообразность предлагаемой методики.

1. Постановка задачи. Пусть в цилиндрической трубе, закрытой мембранами, содержится газ при давлении $p = p_0$ и плотности $\rho = \rho_0$. В момент времени $t = 0$ правая мембрана удаляется, и при $t > 0$ начинается истечение газа во внешнюю среду с давлением $p = p_\infty$. Требуется описать возникающие в трубе движения газа.

В рамках модели невязкого нетеплопроводного газа уравнения, описывающие нестационарное поведение среды в трубе, имеют вид [11]

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} = 0; \quad (1.1)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho(e + u^2/2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u(e + u^2/2) + pu \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Здесь e — внутренняя энергия единицы массы газа, u — скорость в направлении оси x . Система дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) замыкается с помощью уравнения состояния идеального газа

$$e = \frac{p}{(\kappa - 1)\rho}, \quad (1.3)$$

где κ — показатель адиабаты.

В качестве краевого условия на левой границе $x = 0$ принимается условие непротекания $u = 0$. Что касается границы $x = L$, то согласно модифицированному уравнению Бернулли разность между «истинным» значением давления в выходном сечении и внешним $p = p_\infty$ равна величине сопротивления. Это соотношение с учетом направления потока представим в виде

$$p - p_\infty = \xi \rho \frac{|u|u}{2} \quad \text{при} \quad x = L, \quad (1.4)$$

где ξ — некоторая константа [12], учитывающая местное сопротивление той или иной природы.

2. Метод численного решения и способ реализации граничных условий. Для решения поставленной начально-краевой задачи используем метод распада разрывов Годунова [11]. Примем традиционные для данного метода обозначения. Задача о распаде разрыва является для этого метода элементарной операцией. Для внутренних узлов разностной сетки необходимые формулы приведены в [11]. Остановимся на способе реализации граничных условий.

Условие непроницаемости на левом торце трубы $x = 0$ сводится к решению задачи о распаде разрыва при симметричных начальных данных. Торце $x = L$ идентифицируем с узлом разностной сетки $j = J$. Краевое условие на правом торце $x = L$ в принятых обозначениях запишется в виде

$$P_J - p_\infty - \xi(R_1)_J \frac{|U_J|U_J}{2} = 0. \quad (2.1)$$

Соотношение для определения значения плотности R_1 слева от контактного разрыва (в зоне, примыкающей справа к левой волне) представим в виде, несколько отличающемся от [11]:

$$R_1(P) = \begin{cases} (\rho_1 a_1)[a_1 - \rho_1 f(P, p_1, \rho_1)]^{-1}, & \text{если } P > p_1; \\ (\kappa P)[c_1 + (\kappa - 1)f(P, p_1, \rho_1)/2]^{-2}, & \text{если } P < p_1, \end{cases} \quad (2.2)$$

где p_1, ρ_1 и c_1 — давление, плотность и скорость звука в крайней правой ячейке разностной сетки; $a_1 = a_1(P, p_1, \rho_1)$ — массовая скорость. С целью упрощения изложения опустим

нижние индексы, кроме ∞ , а также обозначим $f(P) = f(P, p_1, \rho_1) = (P - p_1)/a_1(P, p_1, \rho_1) = (P - p)/a(P)$, причем выражение для массовой скорости $a(P)$ на левой волне (ударной или разрежения) приведено в [11].

Прибавляя к условию (2.1) условие на левой волне, получим систему трансцендентных уравнений для определения P и U

$$P - p_\infty - \xi R(P) \frac{|U|U}{2} = 0; \quad (2.3)$$

$$U - u + \frac{P - p}{a(P)} = 0. \quad (2.4)$$

Таким образом, задача численной реализации граничного условия на открытом торце трубы свелась к расчету задачи о распаде разрыва, когда на левой волне выполняется условие динамической совместности (2.4), а на правой — условие (2.3).

Система (2.3), (2.4) является системой вида

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ U \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Находим матрицу Якоби системы (2.5):

$$W(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \|F'_{mn}\|, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1 - \xi \frac{|U|U}{2} R'(P),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\xi |U| R(P), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = f'(P), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1.$$

Рассмотрим возможные ситуации:

а) $P > p$ (влево идет ударная волна). Используя выражения для $a(P)$ и $R(P)$, получим

$$a'(P) = \frac{(\varkappa + 1)\rho}{4a(P)}, \quad R'(P) = \frac{\rho^2 [a(P)f'(P) - a'(P)f(P)]}{[a(P) - \rho f(P)]^2},$$

б) $P < p$ (влево идет волна разрежения):

$$R'(P) = \frac{\varkappa}{[c - ((\varkappa - 1)/2)f(P)]^2} \left[1 - \frac{(\varkappa - 1)P f'(P)}{c - ((\varkappa - 1)/2)f(P)} \right].$$

Для нахождения P и U используем итерационный процесс Ньютона [13]

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i-1)} - W^{-1}(\mathbf{x}^{(i-1)})\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i-1)}),$$

причем

$$W^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} F'_{22} & -F'_{12} \\ -F'_{21} & F'_{11} \end{pmatrix}, \quad \Delta = F'_{11}F'_{22} - F'_{12}F'_{21}.$$

В качестве начального приближения следует взять $P^{(0)} = p_\infty$, $U^{(0)} = u - f(P^{(0)})$, что соответствует условию полного отражения [11].

После доведения итерационного процесса до сходимости определяем скорость левой волны D . Если $D < 0$, то для «больших» величин P , U и R , используемых в разностной схеме, принимаем значения, рассчитанные по предложенной методике. Этот случай (дозвуковое истечение) наиболее интересен для рассматриваемой задачи. В противном случае ($D \geq 0$) имеем дело со сверхзвуковым режимом истечения и полагаем $P = p$, $U = u$, $R = \rho$.

Отметим, что при использовании для описания процесса уравнений акустики [11] система, соответствующая системе (2.3), (2.4), имеет вид

$$P - p_\infty - \xi \rho_0 \frac{|U|U}{2} = 0, \quad U - u + \frac{P - p}{\rho_0 c_0} = 0.$$

Исключая из рассмотрения давление на разрыве P , приходим к уравнению для скорости

$$\frac{\xi}{2c_0} |U|U + U + \frac{p_\infty - p}{\rho_0 c_0} - u = 0.$$

Физически допустимое решение имеет вид

$$U = \frac{(\mp 1 \pm \sqrt{D})c_0}{\xi}, \quad D = 1 \mp \frac{2\xi}{c_0} \left(\frac{p_\infty - p}{\rho_0 c_0} - u \right),$$

причем верхние знаки соответствуют истечению, нижние — втоку. В обоих случаях $P = p - (U - u)\rho_0 c_0$.

Очевидно, что формулы для расчета распада разрыва на левой границе отличаются от приведенных только знаками и использованием «малых» величин из крайней левой ячейки.

3. Анализ результатов расчетов. Рассматривалась цилиндрическая труба длиной $L = 2$ м, заполненная воздухом с давлением $p_0 = 1,6 \cdot 10^5$ Па. Параметры окружающей среды полагались равными $p_\infty = 10^5$ Па, $\rho_\infty = 1,3$ кг/м³. Показатель адиабаты $\kappa = 1,4$. Параметр ξ , если не оговорено отдельно, принимал значения $\xi = 0,5$ при опорожнении трубы и $\xi = 1,2$ в случае ее заполнения. Для оценки внутренней сходимости решения проводились расчеты на последовательности сгущающихся сеток с числом счетных ячеек $J = 25, 50, 100$. Расчеты показали, что получить вполне приемлемое решение удастся на довольно грубой сетке, когда счетная область разбивается на 50 счетных интервалов ($J = 50$).

На рис. 1 представлены кривые, характеризующие изменение во времени давления на закрытом торце трубы с учетом и без учета потерь энергии в открытом сечении. Сплошные кривые получены по линеаризованным уравнениям, штриховые — с привлечением уравнений (1.1), (1.2). Для обеих моделей отказ от учета гидродинамического сопротивления в выходном сечении приводит к стабильному незатухающему колебательному режиму. Для кривых, полученных по предлагаемой модели, характерно уменьшение амплитуды колебаний, что качественно соответствует результатам эксперимента. Различия в

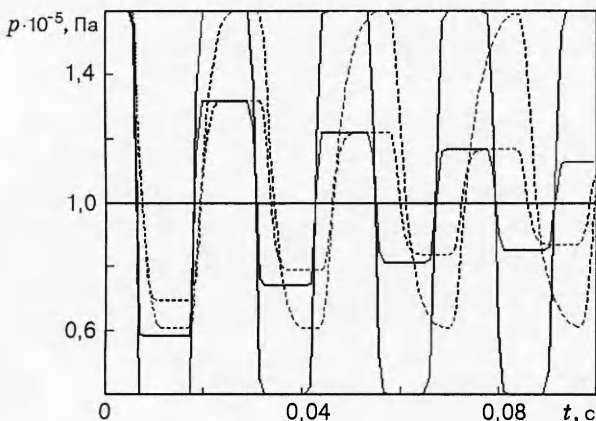


Рис. 1

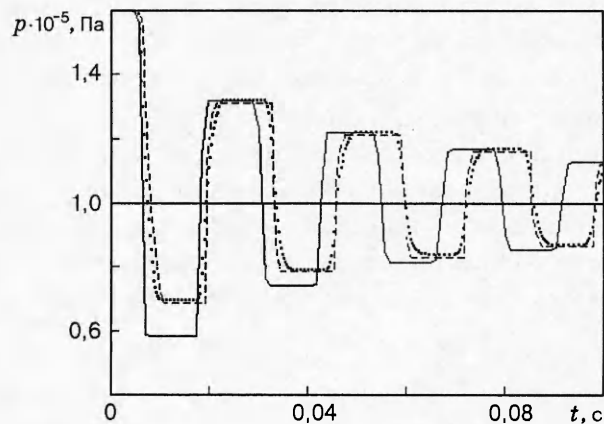


Рис. 2

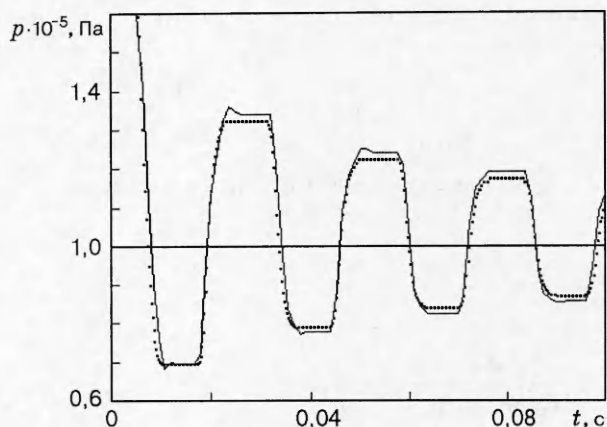


Рис. 3

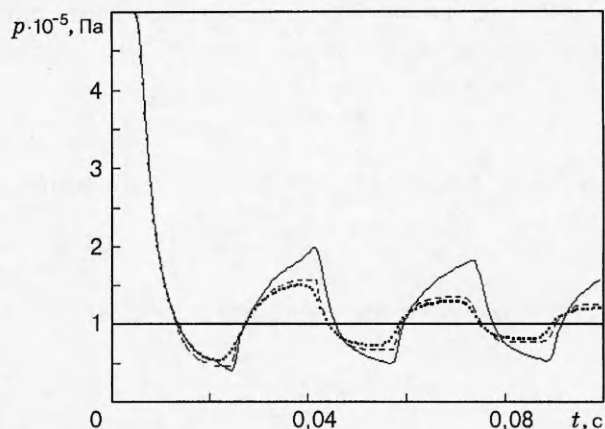


Рис. 4

амплитуде и периоде колебаний в линейной и нелинейной моделях обусловлено различием скоростей распространения волн сжатия и разрежения.

Результаты численного моделирования (сплошная кривая — линейная модель, пунктирная — нелинейная) и эксперимента [4] (штриховая кривая) представлены на рис. 2. Наблюдается хорошее качественное и количественное совпадение результатов эксперимента и результатов, полученных по нелинейной модели (1.1)–(1.4). Линейная модель дает неудовлетворительный результат.

Кривые на рис. 3 получены по нелинейной модели (1.1)–(1.4) с привлечением различных численных методов. Пунктирная линия соответствует методу Годунова, сплошная — двухшаговой схеме Лакса — Вендроффа [14]. В обоих случаях граничное условие на открытом торце трубы (1.4) реализовывалось с помощью процедуры, изложенной в п. 2. Отмечается удовлетворительное совпадение результатов. На сплошной кривой наблюдаются характерные для схем высокого порядка точности осцилляции решения, которые проявляются в большей степени при сгущении используемой разностной сетки.

На рис. 4 представлены результаты, полученные с привлечением краевого условия (1.4) (пунктирная линия) и без учета гидродинамического сопротивления (сплошная) при значении начального давления в трубе $p_0 = 5 \cdot 10^5$ Па. Начиная с момента времени $t = 0,02$ с характер поведения кривых существенно отличается. При этом только решение с граничным условием (1.4) находится в хорошем качественном и количественном согласии с результатами эксперимента (штриховая линия) [15].

Таким образом, в настоящей работе предложен эффективный численный подход, позволяющий свести, вообще говоря, неоднородную задачу опорожнения (заполнения) трубы к одномерной, результаты решения которой соответствуют экспериментальным данным. Этот подход особенно целесообразно применять в случае, когда требуется рассчитать газодинамические процессы в сложной системе труб, как это делается в [5, 6], поскольку непосредственный расчет всей области течения газа трудновыполним.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дулов В. Г. Неустановившийся процесс истечения газа из цилиндрического баллона // Вестн. Ленингр. ун-та. 1957. № 13. С. 132–145.

2. Дмитриева С. Л., Дубровская Л. М., Комаровский Л. В. О граничных условиях на открытом конце трубы при нестационарном истечении или втоке газа из пространства в трубу // *Аэрогазодинамика: Сб. ст. / Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1979. С. 118–123.*
3. Брук-Левинсон Э. Т., Ромашко Е. А. Одностороннее адиабатическое истечение мгновенно нагретого газа из цилиндра в среду с конечным давлением // *Физика и техника аэротермических методов управления и диагностики лазерного излучения: Сб. ст. / Минск: Изд-во АН БССР, 1981. С. 76–87.*
4. Levy M. J., Potter J. H. Gas flow in a rarefaction wavetube // *Naval Eng. J. 1964. N 9. P. 941–950.*
5. Воеводин А. Ф., Сафин Р. И. Алгоритм численного расчета течения газа в системе труб с учетом местных сопротивлений // *Числ. методы механики сплош. среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; Ин-т теорет. и прикл. механики. 1981. Т. 12, № 1. С. 20–29.*
6. Яушев И. К. Комплекс программ для решения задач о распаде и его применение при численном расчете течений газа в каналах сложной конфигурации // *Модульный анализ: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики. 1978. С. 101–110.*
7. Дулов В. Г. Распад произвольного разрыва параметров газа на скачке площади сечения // *Вестн. Ленингр. ун-та. 1958. № 19. С. 76–99.*
8. Яушев И. К. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. № 8, вып. 2. С. 109–120.*
9. Павлов С. В., Яушев И. К. Задача о распаде произвольного разрыва параметров газа в разветвленных каналах // *Численный анализ: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики. 1978. С. 75–82.*
10. Павлов С. В. К задаче о распаде произвольного разрыва в каналах с местным сопротивлением // *Числ. методы механики сплош. среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; Ин-т теорет. и прикл. механики. 1978. Т. 9, № 3. С. 119–127.*
11. *Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976.*
12. *Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975.*
13. *Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.*
14. *Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.*
15. *Кутищев М. А. Газодинамика шумообразования и разработка мероприятий по снижению интенсивности шума на выпуске двигателей внутреннего сгорания: Автореф. дис... д-ра техн. наук. Харьков: Харьков. ин-т инженеров. ж.-д. трансп., 1992.*

*Поступила в редакцию 10/XII 1996 г.,
в окончательном варианте — 22/V 1997 г.*