

УДК 536.1, 612.5

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТКАНИ, ПОРАЖЕННОЙ ОПУХОЛЕВЫМИ КЛЕТКАМИ, ПРИ ГИПЕРТЕРМИЧЕСКОЙ ТЕРАПИИ

Дж. Дутта<sup>\*,\*\*</sup>, Б. Кунду<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Джадавпурский университет, 700032 Калькутта, Индия

<sup>\*\*</sup> Инженерный институт MCKV, 711204 Ховрах, Индия

E-mails: jdutta.mech@gmail.com, bkundu@mech.net.in

С использованием модели теплопроводности, содержащей два времени релаксации, интегральных преобразований и метода фильтрации построено аналитическое решение трехмерной задачи о теплопереносе, моделирующее распределение температуры в ткани организма, подвергаемой местной гипертермии. Используются модифицированное начальное условие и краевые условия. Построены изотермы в различных сечениях исследуемой области при различных термомеханических и геометрических параметрах задачи. Результаты аналитического решения сравниваются с экспериментальными данными. Показано, что при моделировании распределения температуры в ткани, поврежденной опухолевыми клетками, необходимо решать трехмерную задачу.

**Ключевые слова:** трехмерная задача, аналитическое решение, теплопроводность, живая местная гипертермия, время релаксации.

DOI: 10.15372/PMTF20200607

**Введение.** Суть гипертермической терапии заключается в передаче тепла от внешнего источника в определенную область человеческого тела, в результате чего происходит разрушение злокачественных клеток без повреждения здоровой ткани [1, 2]. Из результатов теоретического исследования процесса переноса тепла в организме следует, что при изучении поведения раковых опухолей при гипертермической терапии можно использовать модель теплопроводности с двумя временами релаксации [3]. Эта модель не содержит допущений модели теплопроводности Фурье, в которой скорость распространения тепла бесконечна.

Одно- и двумерное моделирование температурного поля в ткани организма возможно в том случае, если поврежденная область ткани имеет небольшие размеры ( $5 \div 10$  мм). Местная гипертермическая терапия применяется в случаях, когда опухоль поражает весь орган достаточно большого размера (легкое, грудь, простату и пр.) [2]. При этом целесообразно использовать моделирование трехмерных тепловых потоков.

Как правило, при моделировании переноса тепла в ткани организма применяются численные методы решения трехмерных задач. В работе [4] получено численное решение трехмерной задачи, сформулированной с использованием закона теплопереноса с двумя

временами релаксации, в [5] методом конечных элементов с помощью модели теплопереноса Фурье решена задача теплопроводности, имеющая приложение в лазерной хирургии глаза, в работе [6] с использованием функции Грина и трехмерной модели теплопроводности с двумя временами релаксации решена задача теплопроводности, также имеющая приложение в лазерной хирургии глаза. Трехмерное численное моделирование с помощью нелинейного закона теплопроводности Фурье выполнено в работе [7], точное аналитическое решение задачи теплопроводности, сформулированной на основе трехмерного закона Фурье, получено в работе [8]. В то же время отсутствуют работы, в которых с использованием модели теплопереноса с двумя временами релаксации исследуется температурное поле в ткани организма до начала терапевтического лечения. Такой анализ необходим для точного определения распределения температуры в тканях.

**1. Основные дифференциальные уравнения задачи.** Область, занятая тканью, моделируется кубом с длиной ребра, равной  $L$  (рис. 1). Уравнение переноса тепла в ткани, полученное с использованием модели теплопроводности с двумя временами релаксации, имеет следующий вид [9]:

$$\begin{aligned} \rho C_p \tau_q \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial t^2} + (\rho C_p + \tau_q \omega_b \rho_b C_b) \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} - \\ - k \nabla^2 T(x, y, z, t) - k \tau_T \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 T(x, y, z, t)) - \omega_b \rho_b C_b (T_b - T(x, y, z, t)) - \\ - \tau_q \left( \frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial Q_S}{\partial t} \right) - Q_m - Q_S = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $C_p, C_b$  — удельные теплоемкости ткани и крови соответственно, Дж/(кг · °С);  $k$  — теплопроводность ткани, Вт/(кг · °С);  $Q_m, Q_S$  — скорость генерации метаболического и пространственного тепла соответственно, Вт/м<sup>3</sup>;  $t$  — время, в течение которого подводится тепло, с;  $T$  — локальная температура кожной ткани, °С;  $T_b$  — артериальная температура кожной ткани, °С;  $x, y, z$  — пространственные координаты, м;  $\omega_b$  — скорость перфузии крови, с<sup>-1</sup>;  $\rho_b$  — плотность крови, кг/м<sup>3</sup>;  $\tau_q, \tau_T$  — времена релаксации потока тепла и градиента температуры соответственно, с. В предположении, что скорость

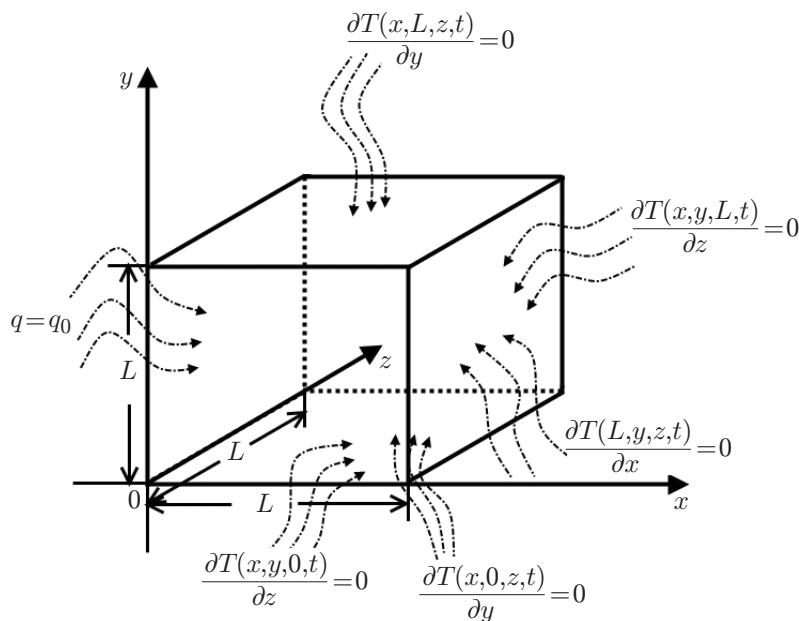


Рис. 1. Область, занятая тканью, и краевые условия для рассматриваемой задачи теплопроводности [8]

выделения метаболического тепла постоянна ( $Q_m = \text{const}$ ) и пространственный нагрев отсутствует ( $Q_s = 0$ ), запишем уравнение (1) в безразмерном виде [10]

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + \text{Ve}_T^2 \frac{\partial^3 \theta}{\partial X^2 \partial F} + \text{Ve}_T^2 \frac{\partial^3 \theta}{\partial Y^2 \partial F} + \text{Ve}_T^2 \frac{\partial^3 \theta}{\partial Z^2 \partial F} - \beta^2 \theta + Q_m^* - (1 + \text{Ve}_q^2 \beta^2) \frac{\partial \theta}{\partial F} - \text{Ve}_q^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial F^2} = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2) введены следующие безразмерные переменные:

$$\theta = \frac{T - T_b}{T_r - T_b}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega_b \rho_b C_b L^2}{k}}, \quad (3)$$

$$F = \frac{\alpha t}{L^2}, \quad \text{Ve}_q = \sqrt{\frac{\alpha \tau_q}{L^2}}, \quad \text{Ve}_T = \sqrt{\frac{\alpha \tau_T}{L^2}}, \quad Q_m^* = \frac{Q_m L^2}{k(T_r - T_b)}.$$

В (2), (3)  $F$  — безразмерное время терапевтического воздействия;  $L$  — длина области, занятой тканью, м;  $Q_m^*$  — безразмерная скорость генерации метаболического тепла;  $T_r$  — отсчетная температура потока тепла, °С;  $\text{Ve}_q$ ,  $\text{Ve}_T$  — числа Верно для потока тепла и градиента температуры соответственно;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — безразмерные пространственные координаты;  $\alpha$  — температуропроводность, м<sup>2</sup>/с;  $\beta$  — безразмерный коэффициент перфузии крови;  $\theta$  — локальная температура ткани.

При  $x = 0$  (см. рис. 1) задается постоянный тепловой поток. На других гранях куба, расположенных вдоль осей  $y$  и  $z$ , ставятся условия симметрии. Поэтому краевые условия в безразмерных переменных записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0} = -Q, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=1} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=1} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z} \Big|_{Z=1} = 0.$$

Здесь  $Q = q_0 L / (k(T_r - T_b))$  — безразмерный поток тепла;  $q_0$  — постоянный поток тепла, Вт/м<sup>2</sup>.

В модели биотермомеханики кожи предполагается, что распределение температуры в ткани организма является функцией пространственных переменных [11], поскольку перенос энергии происходит вследствие метаболических процессов до начала терапевтического лечения. Для уравнений (2) ставятся следующие начальные условия:

$$F = 0: \quad \theta = \theta_{st}(X, Y, Z), \quad \frac{\partial \theta}{\partial F} = 0.$$

Здесь  $\theta_{st} = (T_{st} - T_b) / (T_r - T_b)$  — безразмерная установившаяся температура;  $T_{st}$  — установившаяся температура кожной ткани, °С. В случае стационарного процесса уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \theta_{st}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{st}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta_{st}}{\partial Z^2} - \beta^2 \theta_{st} + Q_m^* = 0, \quad F = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) описывает установившийся процесс нагрева ткани до начала терапевтического лечения. Краевые условия для этого уравнения задаются следующим образом:

$$\frac{\partial \theta_{st}}{\partial X} \Big|_{X=0} = \text{Bi} (\theta_{st} \Big|_{X=0} - \theta_c), \quad \frac{\partial \theta_{st}}{\partial X} \Big|_{X=1} = 0, \quad \frac{\partial \theta_{st}}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta_{st}}{\partial Y} \Big|_{Y=1} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta_{st}}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta_{st}}{\partial Z} \Big|_{Z=1} = 0$$

( $Bi = hL/k$  — число Био;  $\theta_c = (T_a - T_b)/(T_r - T_b)$  — безразмерная температура;  $T_a$  — температура окружающей среды, °C).

Для решения уравнения (5) с краевыми условиями (6) используем аппроксимацию [8]

$$\theta_{st}(X, Y, Z) = \Phi(X) + \Psi(X, Y, Z) + e^{-\beta X} + e^{-\beta Y} + e^{-\beta Z}, \quad (7)$$

где  $\Phi, \Psi$  — переменные, используемые в фильтрационном подходе.

Из (7) с учетом (6) получаем решение уравнения (5)

$$\begin{aligned} \theta_{st}(X, Y, Z) = & C \operatorname{ch}(\beta X) + \left[ \frac{Bi}{\beta} \left( C + \frac{Q_m^*}{\beta^2} \right) + 1 \right] \operatorname{sh}(\beta X) + \frac{Q_m^*}{\beta^2} + \\ & + 4 \left\{ \left( -b_1 \operatorname{ch} \left( \frac{\beta X}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2} Bi \frac{-b_1 + 1 - \theta_c}{\beta} \operatorname{sh} \left( \frac{\beta X}{\sqrt{2}} \right) \right) \left[ b_2 \operatorname{ch} \left( \frac{\beta Y}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{sh} \left( \frac{\beta Y}{\sqrt{2}} \right) \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ b_2 \operatorname{ch} \left( \frac{\beta Z}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{sh} \left( \frac{\beta Z}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\} + e^{-\beta Y} + e^{-\beta Z}, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 = \frac{Bi(1 - \theta_c) \operatorname{ch}(\beta/\sqrt{2})}{\beta/\sqrt{2} \operatorname{sh}(\beta/\sqrt{2}) + Bi \operatorname{ch}(\beta/\sqrt{2})}, \quad b_2 = \frac{e^{-\beta} - \operatorname{ch}(\beta/2)}{\operatorname{sh}(\beta/\sqrt{2})}, \\ C = \frac{e^{-\beta} - (BiQ_m^*/\beta^2 + 1) \operatorname{ch}(\beta)}{\operatorname{sh}(\beta) + Bi \operatorname{ch}(\beta)/\beta}. \end{aligned}$$

Выражение (8) является выражением для установившейся температуры, которая используется в качестве начального условия при определении распределения температуры при гипертермической терапии в областях, пораженных раковыми клетками.

**2. Аналитическое решение, полученное с использованием процедуры фильтрации.** Для того чтобы преобразовать неоднородные краевые условия в однородные, используем метод отфильтрованных решений, приняв следующее разложение:

$$\theta(X, Y, Z, F) = \Theta(X) + \Omega(X, Y, Z, F). \quad (9)$$

Здесь  $\Theta, \Omega$  — переменные, используемые в фильтрационном подходе. Уравнение (2) с учетом представления (9) расщепляется на уравнения

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} - \beta^2 \Theta + Q_m^* = 0; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} + \operatorname{Ve}_T^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial X^2 \partial F} + \operatorname{Ve}_T^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial Y^2 \partial F} + \operatorname{Ve}_T^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial Z^2 \partial F} - \\ - \beta^2 \Omega - (1 + \operatorname{Ve}_q^2 \beta^2) \frac{\partial \Omega}{\partial F} - \operatorname{Ve}_q^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial F^2} = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

Решение уравнения (10) с учетом краевых условий (4) записывается в следующем виде:

$$\Theta(X) = \frac{Q}{\beta} \left( \frac{\operatorname{ch}(\beta X)}{\operatorname{th}(\beta)} - \operatorname{sh}(\beta X) \right) + \frac{Q_m^*}{\beta^2}.$$

Общее решение уравнения (3) можно представить в форме [12]

$$\theta(X, Y, Z, F) = \Theta(X) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Omega'''(i, j, k, F) N_i N_j N_k, \quad (12)$$

где  $\Omega'''$  — трансформанта  $\Omega$ :

$$\Omega'''(i, j, k, F) = \int_{X=0}^1 \int_{Y=0}^1 \int_{Z=0}^1 \Omega(X, Y, Z, F) N_i N_j N_k dX dY dZ, \quad (13)$$

$$\Omega(X, Y, Z, F) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Omega'''(i, j, k, F) N_i N_j N_k —$$

преобразование, обратное преобразованию (13);  $N_i, N_j, N_k$  — нормированные интегралы;  $i, j, k$  — неотрицательные целые числа. Применяя преобразование (12) к уравнению (11), получаем

$$\text{Ve}_q^2 \frac{d^2 \Omega'''}{dF^2} + (\alpha_i^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_j^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_k^2 \text{Ve}_T^2 + 1 + \text{Ve}_q^2 \beta^2) \frac{d\Omega'''}{dF} + (\alpha_i^2 + \alpha_j^2 + \alpha_k^2 + \beta^2) \Omega''' = 0, \quad (14)$$

где  $\alpha_i = i\pi$ ,  $\alpha_j = j\pi$ ,  $\alpha_k = k\pi$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots$ ) — собственные функции.

Уравнение (14) является однородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Используя в качестве начального условия установившуюся температуру (8) и учитывая условия ортогональности, для неустановившегося температурного поля  $\theta(X, Y, Z, F)$  получаем окончательное выражение:

— при

$$(\alpha_i^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_j^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_k^2 \text{Ve}_T^2 + 1 + \text{Ve}_q^2 \beta^2)^2 - 4\text{Ve}_q^2 (\alpha_i^2 + \alpha_j^2 + \alpha_k^2 + \beta^2) > 0$$

$$\theta(X, Y, Z, F) = \frac{Q}{\beta} \left( \frac{\text{ch}(\beta X)}{\text{th}(\beta)} - \text{sh}(\beta X) \right) + \frac{Q_m^*}{\beta^2} +$$

$$+ 8 \sum_{X=0}^{\infty} \sum_{Y=0}^{\infty} \sum_{Z=0}^{\infty} E_{ijk} e^{M_1 F} \left( \text{ch}(M_2 F) - \frac{M_1}{M_2} \text{sh}(M_2 F) \right) \cos(\alpha_i X) \cos(\alpha_j Y) \cos(\alpha_k Z);$$

— при

$$(\alpha_i^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_j^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_k^2 \text{Ve}_T^2 + 1 + \text{Ve}_q^2 \beta^2)^2 - 4\text{Ve}_q^2 (\alpha_i^2 + \alpha_j^2 + \alpha_k^2 + \beta^2) = 0$$

$$\theta(X, Y, Z, F) = \frac{Q}{\beta} \left( \frac{\text{ch}(\beta X)}{\text{th}(\beta)} - \text{sh}(\beta X) \right) + \frac{Q_m^*}{\beta^2} +$$

$$+ 8 \sum_{X=0}^{\infty} \sum_{Y=0}^{\infty} \sum_{Z=0}^{\infty} E_{ijk} e^{M_1 F} (1 - M_2 F) \cos(\alpha_i X) \cos(\alpha_j Y) \cos(\alpha_k Z);$$

— при

$$(\alpha_i^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_j^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_k^2 \text{Ve}_T^2 + 1 + \text{Ve}_q^2 \beta^2)^2 - 4\text{Ve}_q^2 (\alpha_i^2 + \alpha_j^2 + \alpha_k^2 + \beta^2) < 0$$

$$\theta(X, Y, Z, F) = \frac{Q}{\beta} \left( \frac{\text{ch}(\beta X)}{\text{th}(\beta)} - \text{sh}(\beta X) \right) + \frac{Q_m^*}{\beta^2} +$$

$$+ 8 \sum_{X=0}^{\infty} \sum_{Y=0}^{\infty} \sum_{Z=0}^{\infty} E_{ijk} e^{M_1 F} \left( \cos(M_2 F) - \frac{M_1}{M_2} \sin(M_2 F) \right) \cos(\alpha_i X) \cos(\alpha_j Y) \cos(\alpha_k Z).$$

Здесь  $M_1, M_2$  — безразмерные константы:

$$M_1 = - \frac{\alpha_i^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_j^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_k^2 \text{Ve}_T^2 + 1 + \text{Ve}_q^2 \beta^2}{2\text{Ve}_q^2},$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{(\alpha_i^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_j^2 \text{Ve}_T^2 + \alpha_k^2 \text{Ve}_T^2 + 1 + \text{Ve}_q^2 \beta^2)^2 - 4\text{Ve}_q^2(\alpha_i^2 + \alpha_j^2 + \alpha_k^2 + \beta^2)}}{2\text{Ve}_q^2}.$$

Безразмерные константы  $E_{ijk}$  можно определить, используя начальное условие (уравнение (8)):

$$\begin{aligned} E_{ijk} = & -b_1 b_2 \frac{\beta^3 \text{sh}(\beta/\sqrt{2}) \text{sh}^2(\beta/2) \cos(\alpha_i) \cos(\alpha_j) \cos(\alpha_k)}{\sqrt{2}(\beta^2/2 + \alpha_i^2)(\beta^2/4 + \alpha_j^2)(\beta^2/4 + \alpha_k^2)} - \\ & - b_1 b_2 \frac{\beta^3 \text{sh}(\beta/\sqrt{2}) \text{sh}(\beta/2) \cos(\alpha_i) \cos(\alpha_k) [\text{ch}(\beta/2) \cos(\alpha_j) - 1]}{\sqrt{2}(\beta^2/2 + \alpha_i^2)(\beta^2/4 + \alpha_k^2)(\beta^2/4 + \alpha_j^2)} - \\ & - b_1 b_2 \frac{\beta^3 \text{sh}(\beta/\sqrt{2}) \text{sh}(\beta/2) \cos(\alpha_i) \cos(\alpha_j) [\text{ch}(\beta/2) \cos(\alpha_k) - 1]}{\sqrt{2}(\beta^2/2 + \alpha_i^2)(\beta^2/4 + \alpha_j^2)(\beta^2/4 + \alpha_k^2)} - \\ & - b_1 \frac{\beta^3 \text{sh}(\beta/\sqrt{2}) \cos(\alpha_i) [\text{ch}(\beta/2) \cos(\alpha_k) - 1] [\text{ch}(\beta/2) \cos(\alpha_j) - 1]}{\sqrt{2}(\beta^2/2 + \alpha_i^2)(\beta^2/4 + \alpha_k^2)(\beta^2/4 + \alpha_j^2)} + \\ & + \frac{\sqrt{2} \text{Bi}(b_1 + 1 - \theta_c)}{\beta} b_2 \frac{\beta^3 \text{sh}^2(\beta/2) \cos(\alpha_k) \cos(\alpha_j) [\text{ch}(\beta/\sqrt{2}) \cos(\alpha_i) - 1]}{2\sqrt{2}(\beta^2/4 + \alpha_k^2)(\beta^2/4 + \alpha_j^2)(\beta^2/2 + \alpha_i^2)} + \\ & + \frac{\sqrt{2} \text{Bi}(b_1 + 1 - \theta_c)}{\beta} \beta^3 \times \\ & \times \frac{[\text{ch}(\beta/\sqrt{2}) \cos(\alpha_i) - 1] \text{sh}(\beta/2) \cos(\alpha_k) [(\beta/2) \text{ch}(\beta/2) \cos(\alpha_j) - \beta/2]}{\sqrt{2}(\beta^2/2 + \alpha_i^2)(\beta^2/4 + \alpha_k^2)(\beta^2/4 + \alpha_j^2)} + \\ & + \frac{\sqrt{2} \text{Bi}(b_1 + 1 - \theta_c)}{\beta} b_2 \beta^3 \frac{[\text{ch}(\beta/\sqrt{2}) \cos(\alpha_i) - 1] \text{sh}(\beta/2) \cos(\alpha_j) [\text{ch}(\beta/2) \cos(\alpha_k) - 1]}{\sqrt{2}(\beta^2/2 + \alpha_i^2)(\beta^2/4 + \alpha_j^2)(\beta^2/4 + \alpha_k^2)} + \\ & + \frac{\sqrt{2} \text{Bi}(b_1 + 1 - \theta_c)}{\beta} \beta^3 \frac{[\text{ch}(\beta/\sqrt{2}) \cos(\alpha_i) - 1] [\text{ch}(\beta/2) \cos(\alpha_j) - 1] [\text{ch}(\beta/2) \cos(\alpha_k) - 1]}{\sqrt{2}(\beta^2/2 + \alpha_i^2)(\beta^2/4 + \alpha_j^2)(\beta^2/4 + \alpha_k^2)}. \end{aligned}$$

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** В данной работе область, в которой исследовалось распределение температуры в ткани, представляла собой куб с размерами  $100 \times 100 \times 100$  мм. Значения термофизических констант приняты такими же, как в работе [4]: удельная теплоемкость ткани  $C_p = 4000$  Дж/(кг · °С), удельная теплоемкость крови  $C_b = 3770$  Дж/(кг · °С), температура крови  $T_b = 37$  °С, теплопроводность ткани  $k = 0,5$  Вт/(м · °С). Скорость генерации метаболического тепла  $Q_m = 245$  Вт/м<sup>3</sup>. Поток внешнего тепла  $q_0 = 1000$  Вт/м<sup>2</sup>.

Полученные результаты численного решения трехмерной задачи сравнивались с результатами работы [13], в которой было предложено устройство, позволяющее подавать необходимую дозу тепла при лечении рака. Эксперименты проводились на ткани свиньи. Термобиологические характеристики человека и свиньи различаются, однако результаты проведенного сравнения могут быть использованы при исследовании трехмерного распределения тепла в мышечной ткани.

На рис. 2 приведены расчетные и экспериментальные зависимости температуры от времени в точке с координатами  $x = y = z = 0,07$  м. Видно, что результаты, полученные при решении трехмерной задачи, лучше согласуются с экспериментальными данными.

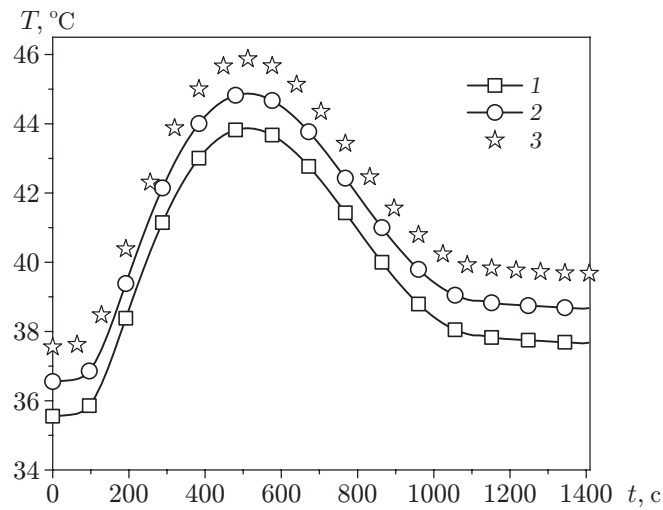


Рис. 2. Зависимость температуры от времени:

1 — результаты двумерного моделирования, 2 — результаты трехмерного моделирования, 3 — экспериментальные данные

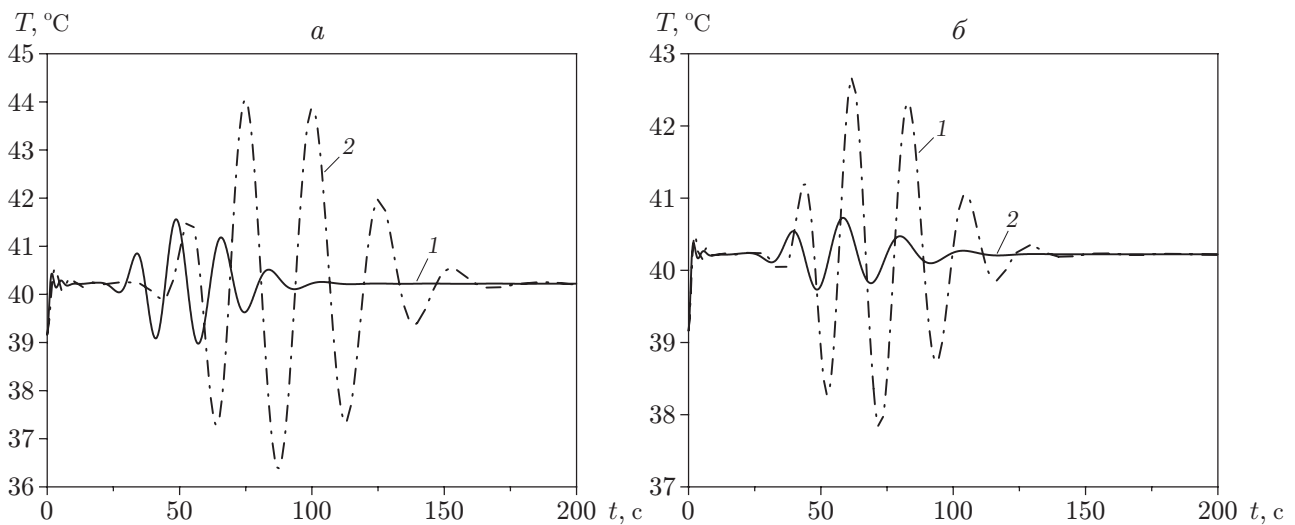


Рис. 3. Зависимость температуры от времени при  $\omega_b = 0,2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\theta_c = 1$ ,  $Bi = 0,1$  и различных значениях  $\tau_q$  (а) и  $\tau_T$  (б):

а —  $\tau_T = 0,3 \text{ с}$  (1 —  $\tau_q = 4 \text{ с}$ , 2 —  $\tau_q = 6 \text{ с}$ ), б —  $\tau_q = 5 \text{ с}$  (1 —  $\tau_T = 0,3 \text{ с}$ , 2 —  $\tau_T = 0,4 \text{ с}$ )

Различия между максимальными значениями температуры, полученными при решении двумерной и трехмерной задач, и максимальным значением температуры, полученным в эксперименте, составляют 5,32 и 2,66 % соответственно.

На рис. 3, а приведена зависимость температуры от времени в точке  $x = y = z = 0,07 \text{ м}$  при  $\tau_T = 0,3 \text{ с}$  и различных значениях  $\tau_q$ . При  $\tau_q = 6 \text{ с}$  максимальное значение температуры равно  $T = 43,97 \text{ °C}$ , при  $\tau_q = 4 \text{ с}$   $T = 41,72 \text{ °C}$ . В обоих случаях кривые имеют волнообразный характер, что определяется значениями  $\tau_q$ ,  $\tau_T$ . В рассматриваемом случае  $\tau_q/\tau_T > 1$ . При выполнении этого неравенства дифференциальное уравнение, описывающее распространение энергии, является гиперболическим [3]. Очевидно, что с увеличением  $\tau_q$  увеличиваются скорость распространения волны и максимальное значение температуры,

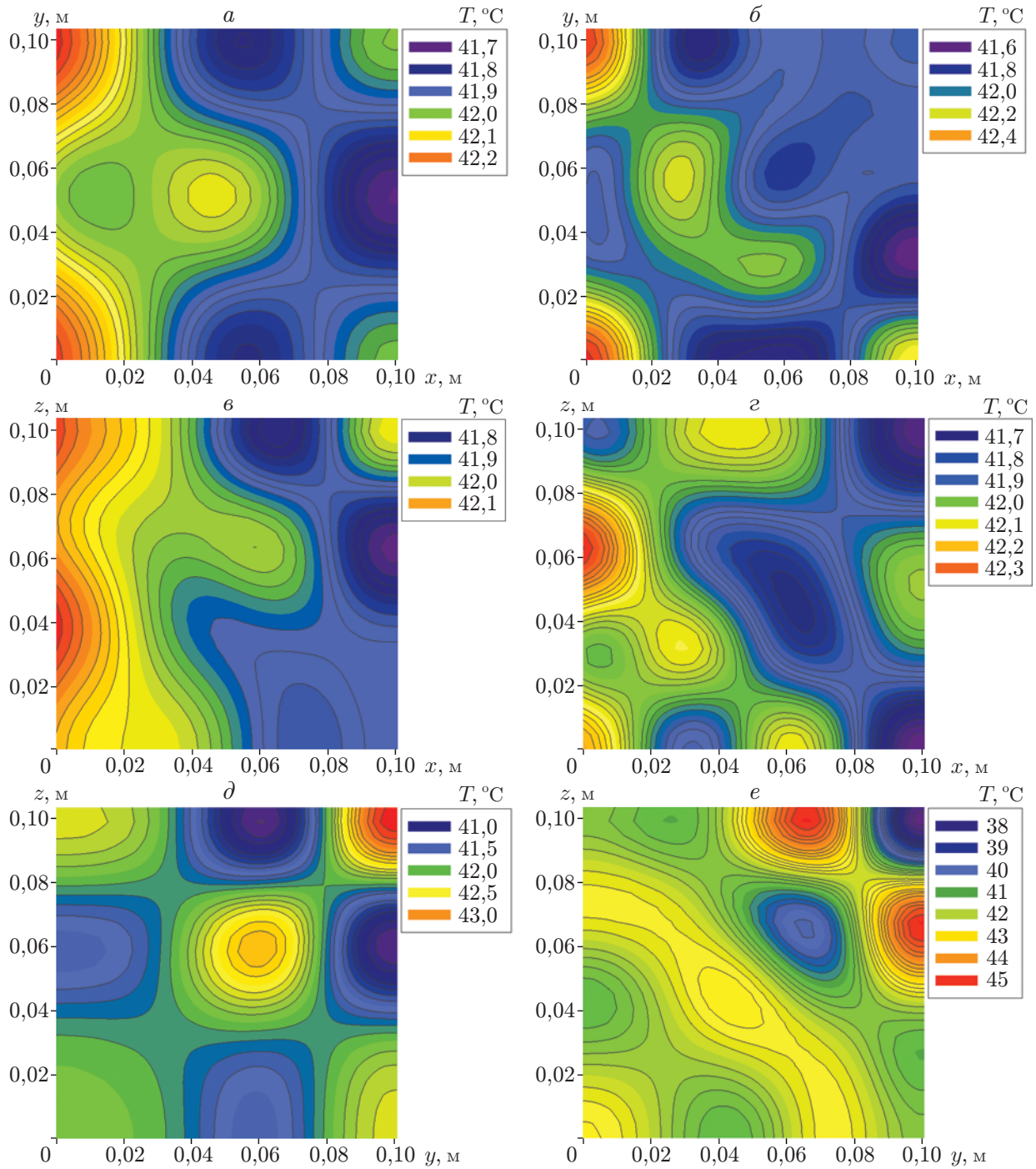


Рис. 4. Изотермы в различных областях кожной ткани при различных значениях времен релаксации:

$a$  —  $t = 10$  с,  $z = 0,05$  м,  $\tau_q = 7$  с,  $\tau_T = 0,5$  с;  $б$  —  $t = 15$  с,  $z = 0,06$  м,  $\tau_q = 6$  с,  $\tau_T = 0,3$  с;  $в$  —  $t = 15$  с,  $y = 0,07$  м,  $\tau_q = 5$  с,  $\tau_T = 0,4$  с;  $г$  —  $t = 20$  с,  $y = 0,06$  м,  $\tau_q = 5$  с,  $\tau_T = 0,3$  с;  $д$  —  $t = 15$  с,  $x = 0,03$  м,  $\tau_q = 6$  с,  $\tau_T = 0,4$  с;  $е$  —  $t = 20$  с,  $x = 0,06$  м,  $\tau_q = 7$  с,  $\tau_T = 0,4$  с



а также количество максимумов на кривых. На рис. 3,б приведена зависимость температуры от времени в точке  $x = y = z = 0,07$  м при  $\tau_q = 5$  с и различных значениях  $\tau_T$ . Наличие времени релаксации в градиенте температуры обуславливает наличие диффузии в любой среде. Таким образом, решение трехмерной задачи теплопроводности с двумя временами релаксации описывает распространение температуры в средах, в которых оно не описывается законом Фурье [3, 14].

На рис. 4 приведены изотермы в различных плоскостях при различных значениях параметров исследуемого терапевтического процесса. Расположение изотерм в плоскостях  $(x, y)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$  свидетельствует о том, что краевые условия (4) выполняются с достаточной точностью. Температура, полученная в результате моделирования, меняется в диапазоне  $40 \div 42$  °С, что совпадает с диапазоном температур, при которых проводится гипертермическая терапия [1].

**Заключение.** В работе выполнено аналитическое исследование модели теплопереноса в тканях организма. В качестве начального условия использовано реальное трехмерное распределение температуры в ткани. Проведено сравнение аналитического решения с экспериментальными данными, полученными для ткани свиньи. Установлено, что с увеличением времени релаксации  $\tau_q$  амплитуда тепловых колебаний увеличивается, а с увеличением времени релаксации  $\tau_T$  — уменьшается. Максимальная температура находится в диапазоне  $40 \div 45$  °С, соответствующем диапазону температур, в котором термические повреждения ткани при использовании гипертермии минимальны. Полученные в работе результаты можно использовать при составлении плана терапевтического лечения с применением гипертермии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Habash R. W., Bansal R., Krewski D., Alhafid H. T.** Thermal therapy. Pt 3. Ablation techniques // *Critic. Rev. Biomed. Engng.* 2007. V. 35. P. 1–22.
2. **Mallory M., Gogineni E., Jones G. C., et al.** Therapeutic hyperthermia: The old, the new, and the upcoming // *Critic. Rev. Oncol./Hematol.* 2016. V. 97. P. 56–64.
3. **Tzou D. Y.** Macro- to microscale heat transfer: The lagging behavior. 2nd ed. N. Y.: John Wiley and Sons, 2015.
4. **Majchrzak E., Turchan L.** The general boundary element method for 3D dual-phase lag model of bioheat transfer // *Engng Anal. Boundary Elements.* 2015. V. 50. P. 76–82.
5. **Joukar A., Nammakie E., Niroomand-Oscuii H.** A comparative study of thermal effects of 3 types of laser in eye: 3D simulation with bioheat equation // *J. Thermal Biology.* 2015. V. 49/50. P. 74–81.
6. **Ma J., Yang X., Liu S., et al.** Exact solution of thermal response in a three-dimensional living bio-tissue subjected to a scanning laser beam // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2018. V. 124. P. 1107–1116.
7. **Reis R. F., Loureiro F. S., Lobosco M.** 3D numerical simulations on GPUs of hyperthermia with nanoparticles by a nonlinear bioheat model // *J. Comput. Appl. Math.* 2016. V. 295. P. 35–47.
8. **Dutta J., Kundu B.** Exact analytical formulation of three-dimensional pennes bioheat model in regional hyperthermia with modified initial condition // *J. Inst. Engrs. (India). Ser. C.* 2020. V. 101. P. 271–279. DOI: 10.1007/s40032-019-00534-w.
9. **Dutta J., Kundu B.** A revised approach for an exact analytical solution for thermal response in biological tissues significant in therapeutic treatments // *J. Thermal Biology.* 2017. V. 66. P. 33–48.
10. **Kundu B.** Exact analysis for propagation of heat in a biological tissue subject to different surface conditions for therapeutic applications // *Appl. Math. Comput.* 2016. V. 285. P. 204–216.

11. **Xu F.** Introduction to skin biothermomechanics and thermal pain / F. Xu, T. Lu. Berlin; Heidelberg; L.; N. Y.: Sci. Press Beijing: Springer-Verlag, 2011.
12. **Hahn D. W.** Heat conduction / D. W. Hahn, M. N. Özisik. Hoboken: John Wiley and Sons, 2012.
13. **Ware M. J., Nguyen L. P., Law J. J., et al.** A new mild hyperthermia device to treat vascular involvement in cancer surgery // Sci. Rep. 2017. V. 7. 11299. DOI: 10.1038/s41598-017-10508-6.
14. **Dombrovsky L. A., Timchenko V., Jackson M.** Indirect heating strategy for laser induced hyperthermia: An advanced thermal model // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 4688–4700.

*Поступила в редакцию 19/XII 2019 г.,  
после доработки — 17/III 2020 г.  
Принята к публикации 30/III 2020 г.*

---