

Легко заметить принципиальную возможность распространения изложенных расчетных схем на все оболочки, для которых матрицы Грина могут быть предварительно рассчитаны согласно [1, 2].

Поступила 1 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавеля С. П. Про один спосіб побудови матриць Гріна для зчленованих оболонок. Доп. АН УРСР, Сер. А, 1969, № 12.
2. Гавеля С. П. Про напружений стан пологих оболонок при концентрованих навантаженнях. Доп. АН УРСР, Сер. А, 1968, № 4.
3. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Київ, Вид-во АН УРСР, 1961.

УДК 624.041+043

ПРОЕКТИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН С ПРИМЕНЕНИЕМ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Г. И. Брызгалин

(Волгоград)

Рассматриваются две задачи оптимального проектирования концентрических кольцевых пластин из анизотропного композитного материала, нагруженных равномерным давлением p по внутреннему либо внешнему контуру. С помощью процедуры построения рациональных проектов [1, 2] записаны решения, не являющиеся оптимальными, которые затем улучшаются численно.

Материал считается состоящим из связующего, армированного тонкими высокопрочными волокнами; при составлении основных уравнений он рассматривается как сплошная анизотропная среда. Волокна ориентированы в радиальном (1) и окружном (2) направлениях. Объемные интенсивности армирования обозначены s_1, s_2 — это неотрицательные величины, сумма которых не должна превышать некоторого значения s^* , определяемого из технологических соображений.

Принимается, что радиальное σ_1 и окружное σ_2 напряжения связаны с соответствующими деформациями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и интенсивностями армирования линейной зависимостью

$$\sigma_i = E s_i \varepsilon_i \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

где E — постоянная материала.

Деформации считаются ограниченными некоторой предельной величиной ε^* . При радиусах пластины a, b ($a < b$) и постоянной толщине H объем арматуры записывается в виде

$$V = 2\pi H \int_a^b (s_1 + s_2) r dr \quad (2)$$

Чтобы решения были пригодны для материалов с любыми значениями постоянных E, s^*, ε^* , вводятся безразмерные величины

$$\begin{aligned} e_i &= \varepsilon_i / \varepsilon^*, & \zeta_i &= s_i / 2s^*, & \tau_i &= \sigma_i / 2E s^* \varepsilon^* \\ q &= p / 2E s^* \varepsilon^*, & W &= V / \pi H a^2 s^* \end{aligned} \quad (3)$$

за которыми сохраняются те же названия, что и для соответствующих размерных.

Переменные e_i, τ_i, ζ_i являются функциями безразмерного радиуса $\rho = r/a$.

Согласно закону (1) интенсивности армирования можно выразить через напряжения и деформации $\zeta_i = \tau_i / e_i$. Основные величины τ_1, τ_2, e_1, e_2 удовлетворяют условиям равновесия и совместности

$$\tau_2 = \rho d\tau_1/d\rho + \tau_1, \quad e_1 = \rho de_2/d\rho + e_2 \quad (4)$$

и ограничениям в виде неравенств, определяемым требованиями положительности интенсивностей армирования и ограниченности деформаций и суммарной интенсивности армирования

$$\tau_i / e_i \geq 0, \quad e_i \leq 1, \quad \tau_1 / e_1 + \tau_2 / e_2 \leq 2 \quad (5)$$

Задача 1. На внутреннем контуре ($\rho = 1$) действует равномерное давление q , внешний контур ($\rho = 2$) свободен. Проектируется кольцевая пластина, имеющая наименьший объем арматуры и выдерживающая заданную нагрузку.

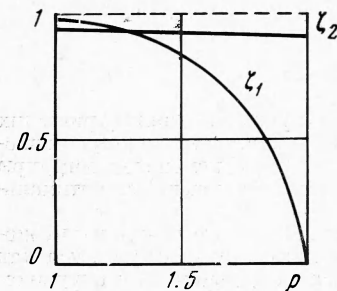
Как показано в [2], используя решение задачи теории упругости для изотропного кольца, можно построить рациональный проект анизотропного тела, определяемый следующими функциями, принимаемыми здесь за начальное приближение

$$\begin{aligned} \tau_1^\circ = e_1^\circ &= -0.8 / \rho^2 + 0.2, & \zeta_1^\circ &\equiv 1 \\ \tau_2^\circ = e_2^\circ &= 0.8 / \rho^2 + 0.2, & \zeta_2^\circ &\equiv 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Процедура получения этих функций несущественна для настоящего изложения, поскольку легко убедиться непосредственно, что (6) действительно удовлетворяет соотношениям (4), (5). Граничные значения функции τ_1° также согласуются с заданным способом нагружения кольца: на внешнем контуре давление отсутствует и $\tau_1^\circ(2) = 0$, на внутреннем контуре задано давление q и $\tau_1^\circ(1) = -0.6$. Итак, для давления $q = 0.6$ функции (6) определяют рациональный проект, который будет улучшаться численным методом, чтобы при неизменном значении q найти новые функции τ_1, τ_2, e_1, e_2 и выражающиеся через них ζ_1, ζ_2 , дающие меньшее значение функционала (4).

Для начального приближения (6) относительный объем арматуры $W^\circ = 3$.

Решение задачи производилось методом локальных вариаций [3]. Отрезок [1,2] переменной разбивался на 100 равных частей, непрерывные функции заменены дискретными, а дифференциальные соотношения — конечно-разностными. В первом цикле варьирования функции получали приращение $h = 0.01$, в последнем $h = 0.0004$. Предпоследний цикл варьирования с шагом $h = 0.00167$ дал значение W , всего на 0.5% превышающее окончательное, равное $W = 2.427$. Экономия в объеме арматуры по сравнению с исходным проектом составляет 19%.



Фиг. 1

Программа была составлена на языке АЛГЭМ, счет произведен на машине «Минск-22». На фиг. 1 представлены функции ζ_1, ζ_2 , определяющие интенсивности армирования в радиальном и окружном направлениях для окончательного проекта (пунктир — начальный график этих функций согласно (6)).

Задача 2. На внешнем контуре пластины ($\rho = 2$) действует равномерное давление q , внутренний контур ($\rho = 1$) свободен. Проектируется пластина, для которой параметр q принимает наибольшее значение, т. е. пластина, оптимальная по прочности. Объем арматуры не должен превышать максимально возможного значения, равного 3.

Известен оптимальный по массе равнопрочный проект (см. [2]), который при безразмерном давлении $q^\circ = 0.375$ имеет объем арматуры $W^\circ = 1.5$ и характеризуется следующими функциями:

$$\begin{aligned} \tau_1^\circ = 0.5 / \rho^2 - 0.5 &= -\zeta_1^\circ, & e_1^\circ &\equiv -1 \\ \tau_2^\circ = -0.5 / \rho^2 - 0.5 &= -\zeta_2^\circ, & e_2^\circ &\equiv -1 \end{aligned} \quad (7)$$

Легко убедиться, что эти функции удовлетворяют соотношениям (4), (5) и граничным условиям данной задачи. Отправляясь от функций (7), как от начального приближения, необходимо варьировать их таким образом, чтобы функционал $q = -\tau_1(2)$ принял наибольшее значение. Этот функционал, определенный на функциях τ_1, e_2 (остальные выражаются через эти две, что можно видеть из (4), (5)), не является аддитивным. В связи с этим метод локальных вариаций в данном случае неприменим, и для решения задачи использовался следующий алгоритм улучшения функционала.

Отрезок изменения независимой переменной [1,2] разбивается на 100 разных частей точками ρ_k ($0 \leq k \leq 100$). Вместо непрерывных функций вводятся дискретные, например вместо основных функций $\tau_1(\rho)$ и $e_2(\rho)$ рассматриваются функции $\tau[k], e[k]$, где $\tau[k] = -\tau_1(\rho_k), e[k] = -e_2(\rho_k)$ (знак минус введен для того, чтобы варьируемые функции были положительными). Производные этих функций заменены «ле-

выми» отношениями конечных разностей, например $d\tau_1/d\rho$ при $\rho = \rho_k$ заменено на $-(\tau[k] - \tau[k-1])/100$. Соотношения (4), (5) и выражение для объема арматуры переписаны так, что в них входят только функции $\tau[k]$, $e[k]$, начальное приближение которых τ^0 , e^0 найдено из (7). Отправляясь от этих функций, строим первое пробное приближение τ_p^1 , придавая значению функции τ приращение при $k = 100$

$$\tau_p^1[k] = \tau^0[k] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 99), \quad \tau_p^1[100] = \tau^0[100] + h$$

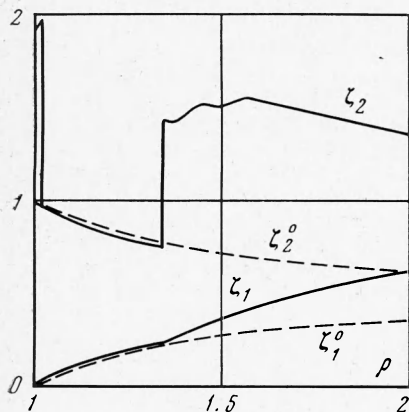
Если эта функция удовлетворяет всем ограничениям R (определяемым условиями (4), (5), граничными условиями и ограничением на объем арматуры $W \leq 3$), то считаем ее первым истинным приближением τ^1 . Каждое новое пробное приближение начинаем строить с того, что $\tau^1[100]$ придает положительное приращение, в связи с этим функционал $q = \tau[100] = \tau_1(\rho_{100})$ в таком процессе не может уменьшаться.

На фиг. 2 жирными линиями условно изображено истинное приближение для функций $\tau[k]$, $e[k]$, тонкими линиями — пробное приближение, процесс построения которого дошел до точки $k = j - 1$, пунктиром — возможные варианты построения пробного приближения в $j - 1$. Если при любом выборе значений в точке $j - 1$ ограничения R на пробные функции, проверяемые в точке j , не выполняются, то все пробное приближение (тонкие линии) отбрасывается и процесс варьирования начинается сначала (при меньшем значении шага h), отправляясь от последнего истинного приближения (жирные линии). Если же в точке j условия R выполнены, производится их проверка в точке $j - 1$; в случае удовлетворения их и в этой точке пробное приближение считается истинным, поскольку левее этой точки значения функций и их производных не изменялись, в противном случае переходим к точке $j - 2$.

Перебор вариантов, производимый таким образом, не обеспечивает сравнения всех функций, близких к данному истинному приближению, так что нельзя утверждать, что описанный процесс обязательно приведет к максимальному значению функционала. Однако он приводит к улучшению функционала, которое на практике может оказаться весьма существенным.

По описанному алгоритму составлена программа на языке АЛГОЛ и произведен расчет на машине БЭСМ-4 ВЦ МГУ. Окончательные графики функций ζ_1 и ζ_2 изображены на фиг. 3. Разрывность функции ζ_2 не противоречит существу задачи, поскольку интенсивность армирования в окружающем направлении вполне может быть изменена скачком. Функции e_1, e_2 изменились незначительно, причем практически можно считать $e_1 \equiv -1$, так что график для ζ_1 дает полное представление об окончательном варианте основной варьируемой функции τ_1 , начальный вид которой изображен пунктиром ($\tau_1^0 \equiv -\zeta_1^0$).

Шаг варьирования изменялся от 0.01 до $0.61 \cdot 10^{-6}$. Наибольшее значение функционала $q = 0.621$, объем арматуры возрос до $W = 2.57$.



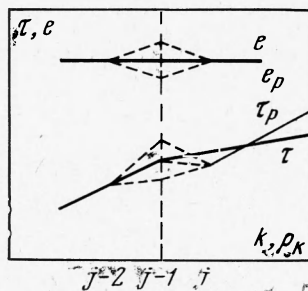
Фиг. 3

Можно показать, что рассмотренная задача имеет точное решение, дающее абсолютно оптимальный проект

$$\tau_1^* = 1/\rho^2 - 1 = -\zeta_1^*, \quad e_1^* \equiv -1$$

$$\tau_2^* = -1/\rho^2 - 1 = -\zeta_2^*, \quad e_2^* \equiv -1$$

Объем арматуры такого проекта равен предельно возможному $W^* = 3$, прочность $q^* = 0.75$: на фиг. 3 пунктирные линии изображают зависимость для непрерывных функций $0.5\zeta_1^*$, $0.5\zeta_2^*$. Сравнивая с полученным численным решением, можно заключить, что оно приводит к разрывной функции ζ_2 , весьма отличной от ζ_2^* .



Фиг. 2

Количественные результаты численного решения следует признать удовлетворительными: удельная прочность q/W проекта, построенного численным методом, примерно равна удельной прочности оптимального, относительный недобор по прочности составляет 17%, по объему арматуры — 14%; по сравнению с начальным приближением (7) прочность возросла на 65%.

Поступила 3 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Брызгалин Г. И. К рациональному проектированию анизотропных плоских тел со слабым связующим. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 4.
2. Брызгалин Г. И. Проектирование упругого анизотропного тела с равнонапряженной арматурой. Сб. «Металловедение и прочность материалов», Волгоград, Нижне-Волжское изд-во, 1968.
3. Черноусько Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 4.

УДК 624.131.54

О ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ГРУНТОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

М. Н. Захаров, И. Н. Иващенко

(Москва)

Экспериментально исследованы возможности применения теории Генки — Надаи при сложном нагружении грунтов. Для песка и суглинка нарушенной структуры получено, что необходимые предпосылки теории Генки — Надаи выполняются при сложном нагружении на достаточно плавных путях нагружения.

Современные методы расчета в механике грунтов основываются на простейшей деформационной теории Генки — Надаи

$$S_{ij} = G_s \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

где S_{ij} — девиатор напряжений, ε_{ij} — девиатор деформаций, G_s — секущий модуль кривой зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций.

Соблюдение исходных предпосылок этой теории [1] (совпадение главных осей тензоров напряжений и деформаций и подобие их девиаторов) исследовано при сложном нагружении грунтов, в том числе при изменении направления осей главных напряжений. Такая постановка исследования определяется тем, что нагружение элемента грунтового массива является, как правило, сложным. В то же время экспериментальные исследования сложного нагружения грунтов в настоящее время почти отсутствуют.

Эксперименты поставлены на полых цилиндрических образцах грунта, нагруженных осевой силой и гидростатическим давлением, неодинаковым внутри и снаружи образцов. Различные комбинации этих нагрузок позволяют исследовать деформации грунта как в условиях простого, так и сложного нагружения. Приложение на торцах крутящего момента приводит к изменению положения осей главных напряжений σ_1 и σ_3 .

Экспериментальная установка позволяла испытывать образцы высотой 80 мм, внутренним и внешним диаметром 35 и 60 мм соответственно. Приложение вертикальной нагрузки и крутящего момента осуществлялось механическими системами, а гидростатического давления — сжатым воздухом через глицерин и резиновые оболочки. Вертикальная деформация образца измерялась индикатором часового типа, соединенным с нагрузочным штоком, с точностью 0.01 мм. Радиальная и тангенциальная деформации определялись по изменениям наружного и внутреннего диаметров образца, измеряемых по объему глицерина во внутренней и наружной полостях прибора с точностью до 0.05 см³. Угловая деформация определялась по геодезическому лимбу, закрепленному на нагрузочном штоке, с точностью до 0°02'. Задаваемые нагрузки фиксировались образцовыми манометрами и динамометром с ценой делений 0.05 кг/см².