

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович и др. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
2. А. М. Гришин, В. М. Фомин. Сопряженные и нестационарные задачи механики реагирующих сред. Новосибирск: Наука, 1984.
3. J. B. Zeldovich, G. I. Barenblatt. Comb. Flame, 1959, 3, 61.
4. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1941, 11, 1, 159.
5. К. Г. Шкадинский, Б. И. Хайкин, А. Г. Мержанов. ФГВ, 1971, 7, 1, 19.
6. А. П. Алдушин, Т. М. Мартемьянова, А. Г. Мержанов и др. ФГВ, 1973, 9, 5, 613.
7. Б. В. Новожилов. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973.
8. V. J. Matkowsky, G. I. Sivashinsky. SIAM, Appl. Math., 1978, 35, 3, 464.
9. К. Г. Шкадинский, М. И. Лебедева. ФГВ, 1975, 11, 4, 530.
10. К. Г. Шкадинский, Б. И. Хайкин. — В кн.: Горение и взрыв. М.: Наука, 1972.
11. Г. И. Барнеблатт, Я. Б. Зельдович, А. Г. Истратов. ПМТФ, 1968, 1, 156.
12. Я. Б. Зельдович. ЖФХ, 1948, 22, 1, 27.
13. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1966.
14. V. Lewis, G. Elbe. J. Chem. Phys., 1934, 2, 8, 537.
15. Н. Н. Калиткин. Численные методы. М.: Наука, 1978.
16. Л. К. Филиппов. Докл. АН СССР, 1984, 277, 2, 310.

Поступила в редакцию 23/VIII 1984,
после доработки — 11/V 1985

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОДНОСТАДИЙНЫХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

В. С. Берман
(Москва)

Начиная с классических работ [1—3], вопросу устойчивости распространения стационарных фронтов одностадийных химических реакций посвящено большое количество исследований, некоторые из которых обсуждаются в [4]. В последнее время получен ряд интересных результатов, обобщающих ряд утверждений предыдущих работ, подробное рассмотрение которых приведено в обзорах [5, 6].

Проводились исследования устойчивости как в «большом» (полагалось, что начальное распределение концентрации в некотором смысле существенно отличается от стационарного бегущего решения [1, 4—8]), так и в «малом», когда начальное возмущение слабо отличается от стационарного решения [4, 9, 10].

Основной результат, полученный в этой области, — впервые отмеченный в [9] факт, что в ряде случаев краевая задача линеаризованного уравнения для возмущений не имеет положительных собственных чисел, что соответствует устойчивости фронта реакции. Собственное число $\lambda = 0$ всегда есть решение задачи. Это свойство — следствие инвариантности выражения, описывающего стационарную волну, относительно сдвига по пространственной координате, а линеаризация его для возмущений является «уравнением в вариациях». Следовательно, в силу теоремы Пуанкаре [11] одно из решений будет производным по координате от решения нелинейной задачи. На основе этого факта и теоремы о нулях собственных функций [12, 13] в [9] показано, что это решение для ряда кинетических функций и скоростей распространения волны реакции соответствует максимальному собственному числу ($\lambda = 0$), поэтому все остальные собственные числа имеют отрицательную действительную часть и, следовательно, приводят к устойчивости. Нулевое собственное значение соответствует сдвигу образующегося решения относительно начального стационарного распределения.

Представляет интерес провести исследование спектра линеаризованной задачи для возмущений как при устойчивости, так и при неустой-

чивости стационарного решения, а также определить характерные времена нарастания возмущений при неустойчивости. В общем случае это исследование провести не удастся. Поэтому основной интерес представляет возможность точного изучения спектра собственных значений линейаризованной задачи и определения собственных функций.

В данной работе изучается спектр нескольких задач. Одна из них описывает ситуацию, близкую к распространению экзотермического пламени в газе [3], вторая моделирует изотермическое распространение цепной химической реакции [1, 2]. В работе находятся спектр и собственные функции задачи.

1. Основные уравнения. В безразмерной форме задача, описывающая протекание химической реакции в среде с кондуктивным переносом вещества (энергии), сводится к решению безразмерного нелинейного уравнения диффузии

$$\partial\Theta/\partial t' = \partial^2\Theta/\partial x'^2 + f(\Theta), \quad (1.1)$$

где Θ — концентрация (температура); t' — время; x' — пространственная координата; $f(\Theta)$ — нелинейная функция, определяемая кинетикой химической реакции. Для описания решения в системе координат, движущейся относительно лабораторной системы со скоростью c , перейдем от переменных (t', x') к (t, x)

$$t = c^2 t', \quad x = c(x' - t'c). \quad (1.2)$$

Тогда (1.1) принимает следующий вид:

$$\partial\Theta/\partial t = \partial^2\Theta/\partial x^2 + \partial\Theta/\partial x + \mu f(\Theta), \quad \mu = c^{-2}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим функцию $f(\Theta)$:

$$f(0) = f(1) = 0, \quad f(\Theta), \quad 0 < \Theta < 1, \quad df(\Theta)/d\Theta \geq 0. \quad (1.4)$$

Тогда при граничных условиях

$$\Theta(-\infty, t) = 1, \quad \Theta(+\infty, t) = 0$$

задача допускает при определенных значениях μ — собственных чисел нелинейной краевой задачи — решения $\Theta_s(x)$, для которых $\partial\Theta/\partial t = 0$. Причем если $df(\Theta)/d\Theta > 0$, то $k = 4\mu df(0)/d\Theta \leq 1$ [1, 4], и существует спектр собственных значений, для которых $0 \leq k \leq 1$, а если $df(0)/d\Theta = 0$, существует единственное значение μ [3, 4]

$$\frac{d^2\Theta_s}{dx^2} + \frac{d\Theta_s}{dx} + \mu f(\Theta_s) = 0, \quad (1.5)$$

$$\Theta_s(-\infty) = 1, \quad \Theta_s(+\infty) = 0.$$

При $x \rightarrow +\infty$ решения имеют вид

$$\Theta_s(x \rightarrow +\infty) = 0[\exp(-x)], \quad df/d\Theta = 0, \quad (1.6)$$

$$\Theta_s(x \rightarrow +\infty) = 0[\exp(-1 \pm \sqrt{1-k} 2^{-1}x)], \quad df(0)/d\Theta > 0, \\ 0 \leq k \leq 1.$$

Полагаем далее, что решение нестационарной задачи имеет вид

$$\Theta(x, t) = \Theta_s(x) + \varepsilon[\exp(\lambda t)u(x) + \exp(\lambda^* t)u^*(x)], \quad (1.7) \\ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

где λ — в общем случае комплексная величина; $u(x)$ — комплекснозначная функция; операция $()^*$ означает комплексное сопряжение. Предполагаем, что

$$0 \leq |u|/|\Theta_s| \leq M = \text{const}, \quad M = O(1). \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) в (1.3), линейризуя ($\varepsilon \rightarrow 0$) и оставляя главный член

в разложении, получим

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + \left[\mu \frac{df(\Theta_s)}{d\Theta} - \lambda \right] u = 0, \quad (1.9)$$

$$u(-\infty) = u(+\infty) = 0.$$

Рассмотрим два вида функции $f(\Theta)$:

$$f_1(\Theta) = \Theta^n - \Theta^{2n-1}, \quad n > 1, \quad (1.10)$$

и

$$f_2(\Theta) = \Theta - \Theta^{2m-1}, \quad m > 1. \quad (1.11)$$

Задание $f(\Theta)$ в виде (1.10) соответствует единственному решению (1.5), что следует из того факта, что эта функция по своим свойствам напоминает функцию

$$f_0(\Theta) = (1 - \Theta) \exp[\beta(\Theta - 1)] \quad (1.12)$$

(β — безразмерная энергия активации), применяемую при описании горения газов [3] в случае подбора полей концентрации и температуры. При $n \rightarrow +\infty$ максимум смещается к $\Theta = 1$ («горячему» концу) в отличие от функции f_0 , которая нуждается в обрезании при $\Theta \rightarrow 0$ [4] для существования стационарного режима, в то время как $f_1(\Theta)$ ведет себя в окрестности $\Theta = 0$ необходимым образом.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что задача (1.5) и (1.10) допускает решение в виде

$$\frac{d\Theta_{1s}}{dx} = -\Theta_{1s}(1 - \Theta_{1s}^{n-1}), \quad \mu = n. \quad (1.13)$$

Решая (1.13), имеем

$$\Theta_{1s}(x) = [1 + \exp(n-1)(x - \text{const})]^{-1/(n-1)}.$$

Константа — аддитивная постоянная и может быть выбрана произвольно в соответствии с выбором точки отсчета ($x=0$) на оси x .

Уравнения (1.5) и (1.10) инвариантны относительно умножения на число a , где a корень уравнения

$$a^{n-1} = 1. \quad (1.14)$$

Рассмотрим теперь функцию $f_2(\Theta)$. Она аналогична изученной в [1, 2, 4] и при $m > 1$ разрешима, если $0 \leq \mu \leq 1/4$. Решение (1.5) и (1.11) в общем случае неизвестно. В [14] показано, что кроме очевидного непрерывного преобразования $\bar{x} = x + d_1$ (1.5) и (1.11) допускают преобразование при $\mu = m(m+1)^{-2}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + a^{-1} \ln [1 + d_2 \exp(ax)], \\ \bar{y} &= y \exp[(m+1)^{-1}(x - \bar{x})], \\ a &= (m-1)(m+1)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь d_1 и d_2 — параметры ($d_2 \geq 0$). Тогда можно показать, что (1.5) и (1.11) допускают решение вида

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_{2s}}{dx} &= -(1+m)^{-1} \Theta_{2s} (1 - \Theta_{2s}^{m-1}), \\ \mu &= m(m+1)^{-2}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Отсюда

$$\Theta_{2s}(x) = \{1 + \exp(m-1)(m+1)^{-1}(x - \text{const})\}^{-1/(m-1)}. \quad (1.17)$$

Отметим, что уравнения (1.5) и (1.11) инвариантны относительно дискретного преобразования — умножения на число b , где b корень

уравнения

$$b^{m-1} = 1. \quad (1.18)$$

2. Краевая задача. Из общей теории [4, 9, 10] следует, что краевая задача (1.9) для $f = f_1(\Theta)$ имеет собственные числа с отрицательной действительной частью, а при $f = f_2(\Theta)$ с положительной. Далее будут найдены распределение этих корней и связь между $\lambda_r = \operatorname{Re} \lambda$ и $\lambda_i = \operatorname{Im} \lambda$ на всей плоскости λ .

Как уже отмечалось, $\lambda = 0$ — собственное значение задачи. При $f = f_1$

$$u(x; \lambda = 0) = \Theta_{1s}(1 - \Theta_{1s}^{n-1}), \quad (2.1)$$

а при $f = f_2$

$$u(x; \lambda = 0) = \Theta_{2s}(1 - \Theta_{2s}^{m-1}). \quad (2.2)$$

Поскольку функция Θ_s , определяемая из (1.5), монотонно убывает и инвариантна относительно сдвига, можно перейти от x к новой независимой переменной Θ_s .

$$p = \frac{d\Theta_s}{dx}; \quad \frac{d}{dx} = p(\Theta_s) \frac{d}{d\Theta_s}, \quad (2.3)$$

$$p \frac{dp}{d\Theta_s} + p + \mu f(\Theta_s) = 0,$$

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} = p^2 \frac{d^2}{d\Theta_s^2} + \left(p \frac{dp}{d\Theta_s} + p \right) \frac{d}{d\Theta_s}. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (1.9) с учетом (2.3), имеем

$$p^2(\Theta_s)^2 \frac{d^2 u}{d\Theta_s^2} - \mu f(\Theta_s) \frac{du}{d\Theta_s} + [\mu f(\Theta_s) - \lambda] u = 0, \quad (2.5)$$

$$u(\Theta_s = 1) = 0, \quad u(0) = 0.$$

В обоих случаях $P(\Theta_s)$ выражается соответственно через (1.13) и (1.16). Учитывая далее инвариантность (1.5) и (2.5) относительно умножения на a (1.14) и соответственно на b (1.18), перейдем от Θ_s к новым независимым переменным

$$z = \Theta_{1s}^{n-1}, \quad z = \Theta_{2s}^{m-1}. \quad (2.6)$$

Тогда при (1.10) уравнение (2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} (n-1)^2 z^2 (1-z)^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z(1-z)(n-1)[n-2-2z(n-1)] \frac{du}{dz} + \\ + (n^2 z - z^2 n(2n-1) - \lambda) u = 0, \quad (2.7) \\ u(z=1) = u(z=0) = 0, \end{aligned}$$

в случае (1.11) —

$$\begin{aligned} (m-1)^2 z^2 (1-z)^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z(1-z)(m-1)[m-2-2z(m-1)] \frac{du}{dz} + \\ + \{m - m(2m-1)z^2 - \delta\} u = 0, \quad (2.8) \\ \delta \equiv \lambda(m+1)^2, \quad u(z=1) = u(z=0) = 0. \end{aligned}$$

Задачи (2.7) и (2.8) принадлежат к классу обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Они относятся к типу Римана [11, 13, 15], и их решения могут быть выражены через гипергеометрические функции. Для этого перейдем от задач (2.7) и (2.8) к гипергеометрическим уравнениям при помощи

замены

$$u(z) = z^A (1-z)^B y(z).$$

Для (2.7)

$$A = 2^{-1}(n-1)^{-1}(1+R_1), \quad B = 2^{-1}(n-1)^{-1}(-1+R_2), \quad \bar{R}_1 = (1+4\lambda)^{1/2}, \\ \alpha = 2^{-1}(n-1)^{-1}(R_1+R_2-2n), \quad \beta = 2^{-1}(n-1)(R_1+R_2+4n-2), \quad (2.9) \\ R_2 = [(2n-1)^2 + 4\lambda]^{1/2},$$

$$\gamma = 1 + (n-1)^{-1}R_1, \quad \bar{\gamma} = 1 + R_2(n-1)^{-1},$$

в случае (2.8)

$$A = 2^{-1}(m-1)^{-1}(m+1-R_1), \quad B = 2^{-1}(m-1)^{-1}(-m+1+R_2), \\ R_1 = ((m-1)^2 + 4\delta)^{1/2}, \\ \alpha = 2^{-1}(m-1)^{-1}(R_2-R_1-2m), \quad \beta = 2^{-1}(m-1)(R_2-R_1+4m-2), \quad (2.10) \\ \gamma = 1 - (m-1)^{-1}R_1, \quad \bar{\gamma} = 1 + (m-1)^{-1}R_2, \quad R_2 = [(3m-1)^2 + 4\delta]^{1/2},$$

а $y(z)$ удовлетворяет уравнению

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{dy}{dz} - 2\beta y = 0. \quad (2.11)$$

Здесь и везде далее за значение квадратного корня принимается та ветвь, которая при $\lambda = 0$ имеет величину $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$.

3. Анализ задачи (2.7). Рассмотрим случай $\lambda = \lambda_i > 0$, тогда общее решение (2.7) с учетом (2.11) имеет вид [15]

$$u(z) = z^A (1-z)^B [C_1 F(\alpha, \beta, \bar{\gamma}, 1-z) + C_2 (1-z)^{1-\bar{\gamma}} F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, 1-z)], \quad (3.1)$$

$$\bar{\alpha}' = \alpha - \bar{\gamma} + 1, \quad \bar{\beta}' = \beta - \bar{\gamma} + 1, \quad \bar{\gamma}' = 2 - \bar{\gamma},$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, s)$ — гипергеометрическая функция [16]; $F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1$. Для удовлетворения граничного условия при $z = 1$ необходимо положить $C_2 = 0$, а для того, чтобы решение (3.1) не обращалось тождественно в нуль, необходимо выполнение неравенств $\operatorname{Re} B > 0$ ($C_1 = 1$) или

$$\lambda_i^2 > -[n(n-1) + \lambda_r], \quad \operatorname{Re} \lambda = \lambda_r. \quad (3.2)$$

Решение (3.1) имеет вид

$$u(z) = z^A (1-z)^B F(\alpha, \beta, \bar{\gamma}, 1-z). \quad (3.3)$$

В окрестности $z \rightarrow 0$ решение (3.3) принимает вид [15]

$$u = z^A (1-z)^B [NF(\alpha, \beta, \gamma, z) + Mz^{1-\gamma} \times \\ \times F(1-\bar{\alpha}'; 1-\bar{\beta}'; 2-\gamma; z)], \quad N \neq 0, \quad (3.4)$$

где N и M — известные функции параметров α, β и γ . Для удовлетворения граничному условию $u(0) = 0$ необходимо потребовать выполнения условий

$$\operatorname{Re} A + 1 - \gamma > 0 \quad (3.5)$$

или

$$M = \Gamma(\bar{\gamma}) \Gamma(\gamma-1) \Gamma^{-1}(\alpha) \Gamma^{-1}(\beta) = 0 \quad (3.6)$$

($\Gamma(s)$ — гамма-функция [16]). Условие (3.5) приводит к соотношению

$$\lambda_i^2 < -\lambda_r. \quad (3.7)$$

Условие (3.6) будет выполняться, если один из аргументов Γ -функций, стоящих в знаменателе в (3.6), будет равен целому отрицательному числу или нулю. Возможно только выполнение условия $\alpha = 0$, т. е. $\lambda = 0$, отсюда получаем решение типа (2.1)

$$u(z; \lambda = 0) = z^{1/(n-1)} (1-z), \quad F(0, \beta, \gamma, z) = 1. \quad (3.8)$$

При $\lambda_i = 0$, как можно показать, решение аналогично (3.3). При $\lambda_i < 0$ ограниченное у $z = 1$ решение имеет вид

$$u(z) = z^A (1-z)^{B+1-\bar{\gamma}} F(\bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}', 1-z). \quad (3.9)$$

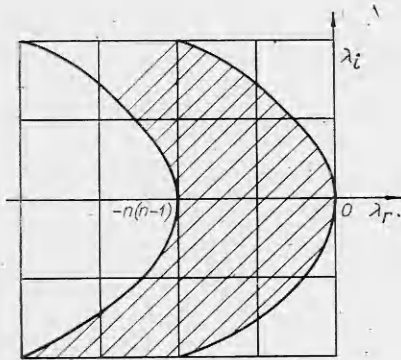


Рис. 1.

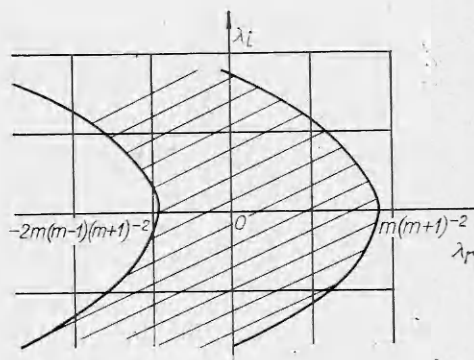


Рис. 2.

При выполнении соотношения (3.2), удовлетворяя граничному условию, при $z \rightarrow 0$ перейдем к (3.7).

Таким образом, найдено полное решение спектральной задачи (2.7). Задача имеет только непрерывный спектр, ограниченный на комплексной плоскости λ -параболами (рис. 1)

$$\begin{aligned} -\sqrt{-\lambda_r} < \lambda_i < \sqrt{\lambda_r}, \quad \lambda_r \geq -n(n-1), \\ +\sqrt{-[n(n+1) + \lambda_r]} < \lambda_i < \sqrt{\lambda_r}, \quad \lambda_r \leq -n(n-1), \\ -\sqrt{-\lambda_r} < \lambda_i < -\sqrt{-[n(n-1) + \lambda_r]}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

и точки $\lambda = 0$, примыкающие к непрерывному спектру.

Если $\lambda_i \geq 0$, то собственные функции имеют вид (3.3), а при $\lambda_i < 0$ — (3.9).

4. Анализ задачи (2.8) проводим аналогично предыдущему пункту и получаем, что для ограниченности решения у $z = 1$ необходимо, чтобы ($\lambda_i \geq 0$)

$$u = z^A (1-z)^B F(\alpha, \beta, \bar{\gamma}, 1-z), \quad (4.1)$$

$$[-2m(m-1)(m+1)^{-2} - \lambda_r] < \lambda_i^2, \quad (4.2)$$

Для ограниченности решения в окрестности $z = 0$ необходимо потребовать выполнения условия $\text{Re } A > 0$, откуда

$$\lambda_i^2 < [m(m+1)^{-2} - \lambda_r]. \quad (4.3)$$

При $\lambda_i < 0$ также должны выполняться ограничения (4.2) и (4.3), и решение имеет вид (3.9).

Таким образом, задача (2.8) допускает только непрерывный спектр собственных значений, заполняющий криволинейную полосу (рис. 2):

$$\begin{aligned} -[m(m+1)^{-2} - \lambda_r]^{1/2} < \lambda_i < [m(m+1)^{-2} - \lambda_r]^{1/2}, \\ \lambda_r \geq -2m(m-1)(m+1)^2, \quad [-2m(m-1)(m+1)^2 - \lambda_r]^{1/2} < \lambda_i < \\ < [m(m+1)^{-2} - \lambda_r]^{1/2}, \\ -[m(m+1)^{-2} - \lambda_r]^{1/2} < \lambda_i < -[-2m(m-1)(m+1)^2 - \lambda_r]^{1/2}, \end{aligned}$$

причем непрерывный спектр лежит и в правой полуплоскости. Если $\alpha = -k$ ($\lambda_i = 0$), $k = 0, 1, 2, \dots$, то функция $F(\alpha, \beta, \bar{\gamma}, 1-z)$ принимает особенно простой вид и имеет вид полинома. При этом

$$[(3m-1)^2 + 4\delta]^{1/2} - [(m-1)^2 + 4\delta]^{1/2} = 2[m - k(m-1)]. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) имеет действительное решение при выполнении условия (4.2), если

$$0 \leq k < 2^{-1}(m-1)^{-1}[3m+1 - (9m^2 - 2m + 1)^{1/2}]. \quad (4.5)$$

При $k = 0$ ($\lambda = 0$) имеем решение вида (2.2)

$$u_0(z) = (1-z)z^{1/(m-1)}. \quad (4.6)$$

Следующее решение с полиномиальным множителем первой степени будет при $m < \bar{m}_1 = 2^{-1}(1 + \sqrt{5}) = 1,618$, тогда

$$\lambda = m(m-1)^2(m+1)^{-1}. \quad (4.7)$$

Полином второй степени ($k=2$) появится при $m < m_2 = (\sqrt{13}-1)2^{-1} = 1,303$

$$\lambda = 3(m-1)^2(2-m)^{-2}(m+1)^{-1}, \quad (4.8)$$

третьей — при $m = m_3 = 6/5$

$$\lambda = 6(m-1)^2(3-m)(m+1)^2(3-2m)^{-2}. \quad (4.9)$$

Для $k \geq 4$ при $m \leq \bar{m}_k$

$$\bar{m}_k < [(k^2 - k - 1) - \sqrt{2k^2 + 2k + 1}](k^2 - 3k)^{-1}, \quad k \geq 4. \quad (4.10)$$

Рассмотрим, в частности, случай $m = 3/2$, т. е. $f(\Theta) = \Theta - \Theta^2$, при этом $z = \Theta_s^{1/2}$, и некоторые собственные значения из непрерывного спектра имеют вид

$$u(\Theta_s, \lambda = 0) = \Theta_s(1 - \sqrt{\Theta_s}), \quad (4.11)$$

$$u(\Theta_s, \lambda = 3/20) = \Theta_s^{1/4}(1 - \Theta_s^{1/2})^{3/2}(1 + 2\Theta_s^{1/2}). \quad (4.12)$$

Оба решения положительны на интервале $-\infty < x < \infty$ и обращаются в нуль только на его концах. При $x \rightarrow -\infty$ решение (4.12) ведет себя как $\exp(-x/4)$, таким образом, функция $\exp(x/2)u(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ не ограничена, поэтому переход от $u(x)$ к $v(x) = \exp(x/2)u(x)$ в уравнении (1.9), как это иногда делают (см. [6]), чтобы привести задачу к виду

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left[\lambda - \left(\frac{1}{4} - \mu \frac{df}{d\Theta_s} \right) \right] v = 0, \quad v(\pm \infty) = 0, \quad (4.13)$$

не позволяет найти часть спектра, лежащую правее прямой $\lambda_r = 0$.

Из сравнения результатов, полученных в этой работе, можно предположить, что и в случаях не интегрируемых точно функций $f(\Theta)$ таких, что $f(1) = f(0) = 0$, $f(\Theta) > 0$, $\Theta \in (0, 1)$ и $\frac{df}{d\Theta}(0) \geq 0$, задача (1.9) имеет только непрерывный спектр, лежащий в криволинейной полосе:

$$\mu \frac{df(1)}{d\Theta} - \lambda_r < \lambda_i < \mu \frac{df(0)}{d\Theta} - \lambda_r.$$

При $\frac{df(0)}{d\Theta} = 0$ $\lambda = 0$.

В спектр задачи (2.8) входят собственные функции $u(\Theta)$ такие, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} (u/\Theta) \rightarrow \infty$. Таким образом, нарушается условие (1.8). Аналогичная ситуация встречается и в задаче, рассмотренной в предыдущем пункте. Нарушение условия (1.8) делает неприменимой формальную линеаризацию (1.3) при $\epsilon \rightarrow 0$ в области $x = 0[\psi(\epsilon)]$, $\psi(\epsilon \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Представляется разумным применение метода деформированных координат [17] для проведения нелинейного анализа устойчивости.

В заключение рассмотрим еще одну модельную задачу, описывающую распространение волны возбуждения в нервном волокне, — уравнение Фиц — Хью — Нагумо [10]. При этом $f(\Theta) = \Theta(1 - \Theta)(\Theta - a)$, $0 \leq a \leq 1/2$, $\mu = 2(1 - 2a)^{-2}$. Решение (1.5) определяется из уравнения

$$\frac{d\Theta_s}{dx} = -b\Theta_s(1 - \Theta_s),$$

$$b = (1 - 2a)^{-1}, \quad z = \Theta_s = [1 + \exp(bx)]^{-1}.$$

Из анализа (2.5) следует, что при

$$\alpha = 1/2[R_1 + R_2 - 4], \quad \beta = 1/2[R_1 + R_2 + 6],$$

$$\gamma = 1 + R_1, \quad R_1 = [(1 + 2a)^2 - 4\delta]^{1/2},$$

$$R_2 = [(3 - 2a)^2 - 4\delta]^{1/2}, \quad \delta = \lambda(1 - 2a)^2,$$

$$A = 1/2[(1 - 2a) + R_1], B = 1/2[-(1 - 2a) + R_2]$$

решение имеет вид (3.3) и (3.9), если

$$-2(1 - a) < \delta < -2a,$$

что соответствует непрерывному спектру. Дискретный спектр состоит при $0 \leq a < 1/3$ из одного значения $\lambda = 0$, а при $1/3 \leq a < 1/2$, кроме того, появляется еще одно изолированное собственное число $\lambda = -3a(1 - a)(1 - 2a)^{-2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Колмогоров, И. Г. Петровский, И. С. Пискунов. Бюл. МГУ. Секц. А, 1. 1937, 6, 1.
2. R. Fisher. Ann. of Eugenics, 1937, 7, 355.
3. Я. Б. Зельдович. ЖФХ, 1948, 22, 27.
4. Я. Б. Зельдович и др. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
5. А. С. Диканский. Уравнения диффузии с нелинейной кинетикой. ВИНТИ, № 1405—80.
6. А. И. Вольперт. Волновые решения параболических уравнений. Препринт ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1983.
7. Я. И. Канель. Докл. АН СССР, 1960, 132, 268.
8. D. Aronson, H. Weinberger. Lect. Notes in Math., 1975, 446, 856.
9. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович. ПММ, 1957, 21, 856.
10. D. H. Sattinger. Advanced of Math., 1976, 22, 312.
11. В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1941.
12. Э. И. Титчмарш. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М.: ИЛ, 1960.
13. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1958.
14. В. С. Берман. Докт. дис. М., 1981.
15. А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
16. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
17. А. Х. Найфе. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 13/IX 1983,
после доработки — 14/VIII 1985

О РЕЖИМАХ РАБОТЫ ФИЛЬТРАЦИОННОГО РЕАКТОРА

А. В. Гужиев, Н. Н. Солдаткина, Г. С. Сузов

(Ленинград)

В последнее время в связи с проблемой интенсификации ряда химических производств и промышленным освоением СВС-технологии возрос интерес к исследованиям в области высокотемпературных реакторов вытеснения [1—5]. Перевод в область высоких температур активированных химико-технологических процессов сопровождается при определенных условиях формированием в канале реактора специфического компактного образования — волны горения. Последняя распространяется с некоторой заранее неизвестной скоростью по смеси исходных реагентов, поступающих в канал с заданной скоростью подачи u_* . Это обстоятельство открывает возможность анализа и классификации режимов работы реакторов вытеснения балансным методом [1—4], основанном на сопоставлении вычисленных по длине канала локальных значений скорости обращенной ко входному сечению волны горения с величиной скорости подачи смеси. Различие этих характерных скоростей определяет степень нестационарности процесса и направление перемещения фронта пламени, а их равенство — местоположение в канале зоны стационарного горения и ее основные характеристики.

Цель настоящей работы состоит в систематическом изложении указанного подхода применительно к анализу высокотемпературных режимов работы реактора вытеснения. В качестве примера выбран фильтра-