

УДК 532.517.4

Закрученное течение в цилиндрическом контейнере: решеточные уравнения Больцмана и уравнения Навье – Стокса*

М.В. Сальников¹, К.С. Кинзин^{1,2}, В.А. Иващенко¹, И.В. Наумов^{1,2},
Р.И. Мулляджанов^{1,2}

¹Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

E-mail: salnikovitsbras@gmail.com

Проведено систематическое сравнение результатов численного моделирования однофазного течения в цилиндрическом контейнере с неподвижными стенками и вращающимся верхним торцом в рамках решеточных уравнений Больцмана и уравнений Навье–Стокса. Исследованы различные режимы ограниченного вихревого течения жидкости в пространстве двух параметров, а именно: числа Рейнольдса и отношения высоты к радиусу цилиндрического контейнера. Проведен анализ сеточной сходимости обоих решений. Показано, что данные хорошо согласуются как между собой, так и с имеющимися экспериментальными данными, включая диаграмму появления возвратного течения на оси цилиндра, что соответствует распаду вихря.

Ключевые слова: прямое численное моделирование, уравнения Навье–Стокса, решеточные уравнения Больцмана, закрученный поток, распад вихря.

Введение

Последние несколько лет большую популярность приобретает метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method — LBM) [1]. Он используется для моделирования течений в несмешивающихся жидкостях [2], многофазных течениях [3], задачах теплообмена [4, 5] и изотропной турбулентности [6]. Данный метод возник в результате эволюции метода решеточных газов (Lattice Gas Automata — LGA), который впервые был представлен в работе [7]. В LGA решетка является d -мерной, а ее ячейки — квадратными или кубическими. Метод предполагает, что газ движется по решетке с дискретными скоростями по дискретному пространству согласно дискретным шагам по времени. Первые решеточные уравнения Больцмана использовались для расчета вязкости как дополнение к методу LGA в работе [8]. Для того чтобы устранить статистический шум, авторы [9]

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19-19-00083). Разработка численных методов выполнена в рамках государственного задания Института теплофизики СО РАН.

ввели усредненные функции распределения, которые положили начало развитию метода LBM из LGA.

Решеточное уравнение Больцмана описывает эволюцию дискретной функции распределения частиц. Отличительной особенностью этого подхода является линейная система уравнений, определяющая взаимодействие соседних вычислительных узлов, при этом нелинейные эффекты учитываются локально. В [10] было введено важное упрощение LBM путем представления решеточного уравнения Больцмана (Lattice Boltzmann Equalization — LBE) с линеаризованным оператором столкновений, который предполагает, что распределение близко к локальному состоянию равновесия. Самой простой линеаризованной моделью столкновений является модель Бхатнагара–Гросса–Крука (Bhatnagar–Gross–Krook — BGK) [11]. В решеточной модели BGK (LBGK) [12] используется локальная равновесная функция распределения для восстановления макроскопических уравнений Навье–Стокса.

Локальность взаимодействий функций распределения в LBM делает этот метод привлекательным для проведения параллельных высокопроизводительных вычислений [13], включая графические процессоры. В ряде публикаций проведено сравнение производительности LBM с другими методами [13–17] и показано преимущество метода LBM для класса задач, в которых рассматривается несжимаемая жидкость в потоке с малым числом Маха. Однако преимущество в производительности нивелируется в случае сложных конфигураций [15]. LBM подходит для решения задач в сложных геометрических формах, внутри которых сохраняется масса [14].

Граничные условия играют существенную роль в моделировании LBM [18, 19], определяя порядок точности всего вычисления. Граничное условие Bounce Back широко используется в LBM. В этом граничном условии функция распределения частиц в ячейке пристеночной решетки определяется функцией распределения частиц противоположного ей направления. Bounce Back обладает вторым порядком точности на прямой стенке, плоскость которой ориентирована вдоль узлов вычислительной области.

Зачастую границы, которые необходимо исследовать, сложны по форме. Наиболее простой подход к работе с такими границами состоит в том, чтобы аппроксимировать их в виде лестницы, используя для каждой ячейки схему Bounce Back [20, 21] для реализации условия непротекания. В случае криволинейной геометрии точность Bounce Back уменьшается до первого порядка. Существуют более точные схемы учета граничных условий [22], однако их имплементация может отразиться на производительности вычислений.

Преимущество подхода, в котором сложная граница описывается лестничной структурой [23], состоит в том, что он является самым быстрым и простым в имплементации и при достаточно подробном разбиении вычислительной решетки его точность совпадает с аналитическими решениями [23]. Для тестирования предложенных подходов необходимо использовать по возможности простую геометрию.

В настоящей работе в качестве модельной задачи рассматривается течение в цилиндрическом контейнере с вращающимся торцом. Такая конфигурация является, например, простейшей моделью для исследования ограниченного вихревого движения для отладки режимов работы при создании вихревых биореакторов [24, 25]. В классическом случае торцом является твердая крышка, неподвижная вдоль оси цилиндра, выполненная из того же материала, что и стенки контейнера. Цилиндр полностью заполнен жидкостью, герметично закрыт и теплоизолирован, а его стенки являются непротекаемыми. В изложенной

постановке задачи режимы течения зависят только от отношения высоты цилиндра к его радиусу (h/R) и числа Рейнольдса $Re = \omega R^2/\nu$, где ν — кинематическая вязкость жидкости, ω — угловая скорость вращения торца.

Из-за действия центробежных сил в закрученном течении жидкость растекается от центра вращающейся крышки к боковым стенкам и спускается вдоль границы контейнера вниз. Достигнув дна, жидкость по спирали сходится к оси и образует восходящий закрученный поток вдоль оси цилиндра. Экспериментальные и численные исследования показали, что при определенных значениях вышеуказанных режимных параметров происходят изменения структуры вихревого течения [26–30], когда в центральном восходящем вихре возникает устойчивая рециркуляционная зона возвратного течения [31, 32].

В работе представлены результаты расчетов по решеточным уравнениям Больцмана и уравнениям Навье–Стокса [33, 34] на примере закрученного ограниченного течения в цилиндрическом контейнере в сравнении с экспериментальными данными.

1. Метод решеточных уравнений Больцмана

Только малый класс задач в гидродинамике можно разрешить аналитически. Численные методы, в свою очередь, бывают сложны в имплементации и распараллеливании. Для моделирования задачи распада вихря в цилиндре использован метод решеточных уравнений Больцмана. Идея метода заключается в том, что вместо решения интегродифференциальных уравнений для получения необходимых параметров системы необходимо решить систему алгебраических нелинейных уравнений. В рамках мезомасштаба LBM отвечает решению уравнений Навье–Стокса. Основное преимущество этого метода в том, что он относительно прост в реализации и обладает высоким потенциалом для параллельных расчетов. Основной рассматриваемой величиной в методе решеточных уравнений Больцмана является дискретная функция распределения $f_i(\vec{x}, t)$, где индекс i отвечает за направление движения частиц. Функции распределения $f_i(\vec{x}, t)$, которые также называются популяциями, представляют собой плотность частиц, обладающих скоростью $\vec{c}_i = (c_{ix}, c_{iy}, c_{iz})$ в точке (x, y, z) в момент времени t . Из набора дискретных функций распределения определяются плотность и импульс в данной точке пространства по формулам

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_i f_i(\vec{x}, t), \quad \rho u_\alpha(\vec{x}, t) = \sum_i c_{i\alpha} f_i(\vec{x}, t). \quad (1)$$

Аргументы в дискретных функциях распределения также являются дискретными. В это определение входит конечный набор векторов скоростей, число ячеек вычислительной области, а также пространство времени, которое разбито на шаги определенной величины. Шаги по времени и по пространству задают соответствующие разрешения вычислительной области. Традиционно их определяют в безразмерных переменных (lattice units) равными единице.

Дискретные скорости сформированы в конечный набор векторов \vec{c}_i . Эти наборы обозначаются через $DdQq$, где d — размерность задачи, q — число векторов скоростей в наборе. Наиболее популярными наборами для решения уравнений Навье–Стокса являются $D1Q3$, $D2Q9$, $D3Q15$, $D3Q19$ и $D3Q27$ [35]. Векторы скоростей также представлены в безразмерных величинах, а критерий обезразмеривания равен скорости звука: $c_s^2 = (1/3)\Delta x^2/\Delta t^2$. В настоящей работе использован набор скоростей $D3Q27$.

Дискретизированное относительно популяций уравнение Больцмана записывается в виде

$$f_i(\bar{x} + \bar{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\bar{x}, t) + \Omega_i(\bar{x}, t)$$

и определяет распределение жидких частиц, движущихся со скоростью \bar{c}_i к соседней точке $\bar{x} + \bar{c}_i \Delta t$ и достигающих ее ко времени $t + \Delta t$. В то же время на функции распределения действует оператор столкновений $\Omega_i(\bar{x}, t)$. Этот оператор перераспределяет жидкие частицы между функциями распределения. В настоящей работе использовано приближение для оператора столкновений, которое называется оператором Бхатнагара–Гросса–Крука:

$$\Omega_i(\bar{x}, t) = -\frac{f_i - f_i^{\text{eq}}}{\tau} \Delta t. \quad (2)$$

Оператор (2) определяет, как функции распределения преобразуются в равновесные функции распределения за время τ . Дискретная равновесная функция распределения f_i^{eq} имеет вид

$$f_i^{\text{eq}} = w_i \rho \left(1 + \frac{u_\alpha c_{i\alpha}}{c_s^2} + \frac{(u_\alpha c_{i\alpha})^2}{2c_s^4} - \frac{u_\alpha u_\alpha}{2c_s^2} \right), \quad (3)$$

здесь w_i — весовые функции, которые выбираются специально для каждого отдельного набора скоростей [35]. Равновесные функции распределения таковы, что $\rho = \sum_i f_i = \sum_i f_i^{\text{eq}}$,

$\rho u_\alpha = \sum_i c_{i\alpha} f_i = \sum_i c_{i\alpha} f_i^{\text{eq}}$, и зависят от локальных значений плотности и скорости.

Связь уравнений LBM с уравнениями Навье–Стокса осуществляется через определение кинематической вязкости и тензора напряжений:

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right),$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau} \right) \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{\text{neq}},$$

где неравновесная функция распределения $f_i^{\text{neq}} = f_i - f_i^{\text{eq}}$.

В случае применения оператора ВГК основное уравнение LBM принимает вид

$$f_i(\bar{x} + \bar{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\bar{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} \left(f_i(\bar{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\bar{x}, t) \right). \quad (4)$$

Уравнение (4) разделено на два шага: шаг столкновений (локальный) и шаг переноса (нелокальный). Шаг столкновений определяется как

$$f_i^*(\bar{x}, t) = f_i(\bar{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} \left(f_i(\bar{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\bar{x}, t) \right), \quad (5)$$

где f_i^* — функция распределения после столкновения. Столкновение представляет собой алгебраическую операцию, локальную относительно ячейки в вычислительной решетке. Шаг переноса определяется как

$$f_i(\bar{x} + \bar{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\bar{x}, t). \quad (6)$$

Алгоритм решения LBM в случае отсутствия внешних сил и граничных условий состоит из итеративного расчета шагов столкновения и переноса. Перед шагом столкновения вычисляются плотность и скорость (1) для определения равновесных функций распределения (3). Затем производится шаг столкновений (5) и определяются f_i^* . После шага столкновений следует перенос f_i^* (6) в соседние ячейки.

Начальные условия в методе LBM определяются согласно равновесной функции распределения f_i^{eq} (3), которая рассчитывается в соответствии с заданными в начальный момент времени пространственными распределениями плотности и импульса.

Для моделирования процессов, приближенных к физическим, в постановке задачи необходимо определить граничные условия. В LBM граничные условия применяются к граничным ячейкам решетки x_b , примыкающим как минимум к одной ячейке, которая определена как часть твердой материи, и еще к одной ячейке, в которой проводится моделирование жидкости. Также граничные условия в LBM применяются к функциям распределения. В гидродинамике самым частым для моделирования граничных условий является условие непротекания. Наиболее популярная схема применения этого условия в LBM называется Bounce Back. Рабочий принцип схемы: популяции ударяются о твердую стенку во время шага переноса и отражаются в противоположную сторону. Таким образом гарантируется отсутствие потоков через границу системы.

В случае покоящейся стенки граничное условие Bounce Back изменяет функции распределения согласно формуле

$$f_{\bar{i}}(\bar{x}_b, t + \Delta t) = f_i^*(\bar{x}_b, t),$$

где дискретные скорости функций распределения $f_{\bar{i}}$ и f_i^* удовлетворяют соотношениям $c_{\bar{i}} = -c_i$.

На основании Bounce Back также можно записать условие Дирихле для постоянной скорости:

$$f_{\bar{i}}(\bar{x}_b, t + \Delta t) = f_i^*(\bar{x}_b, t) - 2w_i \rho_w \frac{c_{ia} u_w}{c_s^2}, \quad (7)$$

где u_w — заданная скорость на границе, ρ_w — плотность на границе системы, определяемая как среднее значение плотности в соседних ячейках вычислительной области, в которых проводится моделирование жидкости. В алгоритме LBM граничные условия применяются к ячейкам после шага переноса. Главной особенностью этого класса граничных условий является то, что криволинейная поверхность определена в них в качестве ступенчатой последовательности ячеек (“staircase-like structure”). В результате такого приближения порядок точности криволинейных граничных условий будет линейным относительно частоты дискретизации пространства вычислительной области. В этой модели имплементированные граничные условия Bounce Back обладают первым порядком точности.

Целью настоящей работы являлось определение характеристик жидкости, находящейся в цилиндре, верхняя крышка которого вращалась с постоянной угловой скоростью ω . Для этого была выбрана решетка D3Q27 размером $N = 200^3$. Радиус цилиндра R отсчитывался от центра решетки, где проходит вертикальная ось цилиндра. Ячейки вне цилиндра

определяются как твердое тело. В граничных ячейках, которые соприкасались с ячейками твердого тела и жидкости, определялось граничное условие Bounce Back. Оно также определялось на дне цилиндра. На верхней плоской поверхности фигуры задавалось граничное условие Дирихле, согласно формуле (7). В основном объеме тех ячеек, которые не соприкасались с твердой стенкой, рассчитывались уравнения LBM в приближении оператора BGK, согласно формулам (5), (6). В начальный момент времени импульс жидкости в каждой ячейке задавался равным нулю, а безразмерная плотность — равной единице. Цилиндр ориентирован таким образом, чтобы его ось была сонаправлена с осью z пространства вычислительной области. Связь между безразмерными и физическими единицами определялась согласно критериям подобия данной задачи: числу Рейнольдса $Re = \omega R^2/\nu$ и отношению высоты цилиндра к его радиусу h/R . Непосредственная имплементация данного численного метода осуществлялась на базе открытого пакета Palabos (Parallel Lattice Boltzmann Solver) [36].

2. Прямое моделирование уравнений Навье–Стокса

В целях верификации данных, полученных в результате моделирования методом LBM, проведено параллельное исследование задачи распада вихря в цилиндре методом прямого численного моделирования уравнения Навье–Стокса. Для вычислений был использован открытый спектральный код Nek5000 [37], имеющий третий порядок точности для дискретизации по времени и восьмой для дискретизации по пространству. Было выбрано заведомо превышающее необходимое сеточное разрешение в более чем $7 \cdot 10^6$ узлов со сгущением вблизи стенок. Расчет проводился до формирования стационарного решения, когда за безразмерный период времени, равный 10, поля скорости и давления не менялись на величину более 10^{-6} .

Численное моделирование проводилось в рамках безразмерных уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

$$T_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

где u_i — компоненты вектора поля скорости, p — давление, T_{ij} — безразмерная форма тензора напряжений.

3. Описание геометрии и вычислительной сетки

В реализации Palabos форма цилиндра была описана лестничной структурой, состоящей из квадратных ячеек одинакового размера, на которых задано граничное условие непротекания, в то время как в методе Nek5000 решетка не является изотропной, а границы внешних ячеек совпадают с границей твердого тела, на котором задано граничное условие непротекания ($v_x = v_y = v_z = 0$). Различия в описаниях геометрии по двум методам иллюстрирует рис. 1. На рис. 1а области, где происходит моделирование жидкости, показаны красным, области, где вычислительная решетка соответствует твердой стенке, —

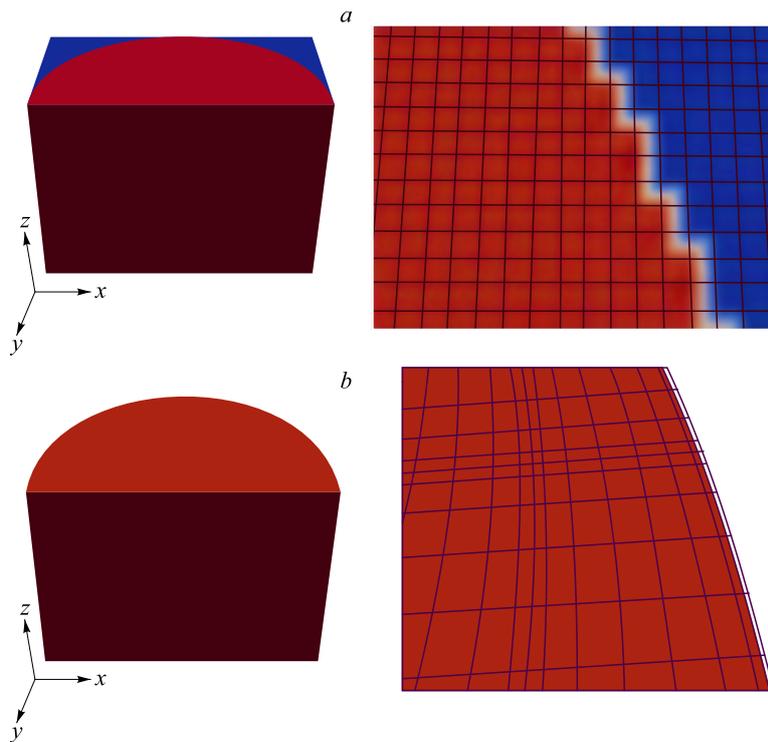


Рис. 1. Иллюстрация половины геометрии цилиндра и вычислительной сетки, использованных в рамках вычислительных кодов Palabos (a) и Nek5000 (b).

Области моделирования течения жидкости обозначены красным.

синим цветом. Граничные ячейки, которые соприкасаются с ячейками жидкости и стенкой, белые.

4. Результаты и обсуждение

Была выполнена серия расчетов поля скорости в цилиндре, крышка которого вращалась с постоянной угловой скоростью. Расчеты проводились в интервале критериев подобия $Re = 1000 - 2500$ и $h/R = 1,25 - 2,75$. Для каждого числа Рейнольдса и критерия подобия расчеты проводились до тех пор, пока не достигалось стационарное решение.

Согласно [28, 38], в определенном интервале значений Re в приосевом объеме жидкости цилиндра возникает устойчивая рециркуляционная зона возвратного течения. На рис. 2 представлен момент проявления данного феномена, линии тока в центральном срезе цилиндра соответствуют $Re = 1025, 1050, 1075, 1100$. На рис. 2 видно, что при увеличении Re линии тока изгибаются все сильнее, пока в приосевой области не становятся перпендикулярны оси цилиндра. Момент появления таких линий тока считается в настоящей работе моментом образования зоны рециркуляции и определяется с точностью до половины шага по параметру Re , при котором проходили измерения. Согласно установленному критерию возникновения циркуляций, для параметра $h/R = 1,25$ определено возникновение локализованного эффекта при $Re = 1037,5$ с точностью до $12,5 Re$.

На рис. 3a представлен характерный пример рециркуляционной зоны. Видно, что при данном наборе параметров зона симметрична относительно оси цилиндра и занимает существенный объем в центре вычислительной области. На рис. 3b представлен результат

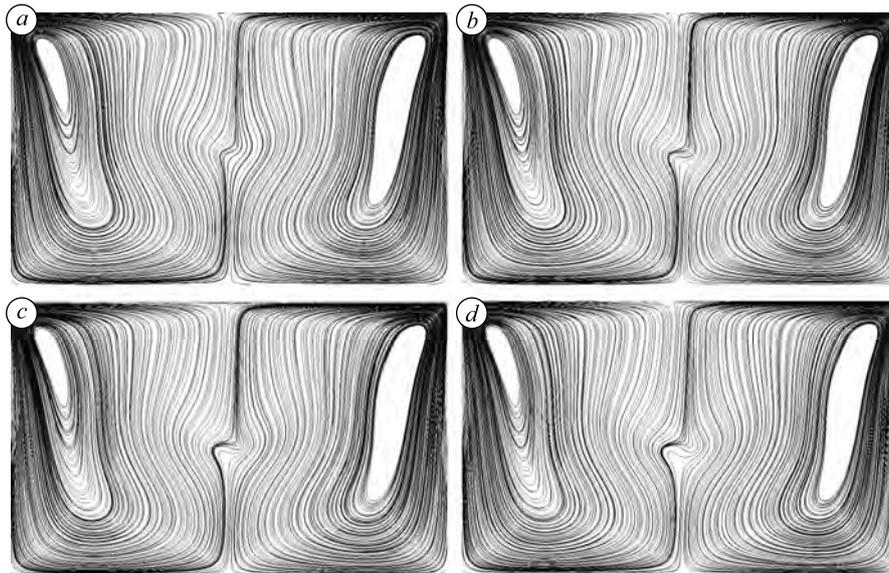


Рис. 2. Линии тока в плоскости цилиндра $x-z$ в точке $y = R$ для параметров $h = 1,25$, $R = 0,5$ для чисел Рейнольдса $Re = 1025$ (a), 1050 (b), 1075 (c), 1100 (d).

расчета методом Nek5000. Сравнение результатов показывает хорошее совпадение линий тока.

На рис. 4 приведено сравнение амплитуды скоростей на перпендикулярном срезе, выполненном по центру локализованного эффекта. Видно, что результаты моделирования двумя методами также хорошо согласуются.

В рамках работы исследована решеточная сходимость результатов данного метода, т.е. неизменность получаемых результатов относительно разрешения выбранной решетки. Очевидно, что результаты не должны меняться в определенных пределах до тех пор, пока числа ячеек оказывается достаточно для моделирования потока. Доказательством того, что измерения выполнены в разумной области разрешений, служат представленные на рис. 5, 6 измерения линий тока и амплитуд скоростей для параметров $Re = 1500$, $h/R = 1,5$ с разрешениями $N = 100^3$ и 200^3 . На рис. 5 видно, что изменения в числе ячеек не влияют на характер стационарного течения. На рис. 6 приведены амплитуды скоростей в разрезе, выполненном перпендикулярно оси на высоте возникновения рециркуляции. Для различных разрешений модели результаты отклоняются на величину не более 2 %.

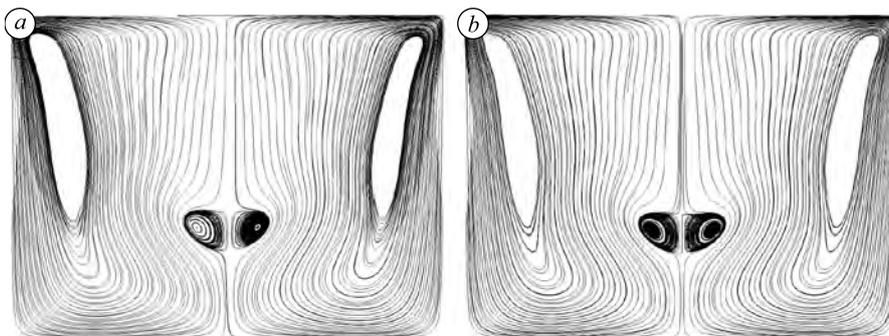


Рис. 3. Линии тока в плоскости цилиндра $x-z$ в точке $y = R$ для параметров $h/R = 1,5$, $Re = 1500$, полученные с помощью программных пакетов Palabos (a) и Nek5000 (b).

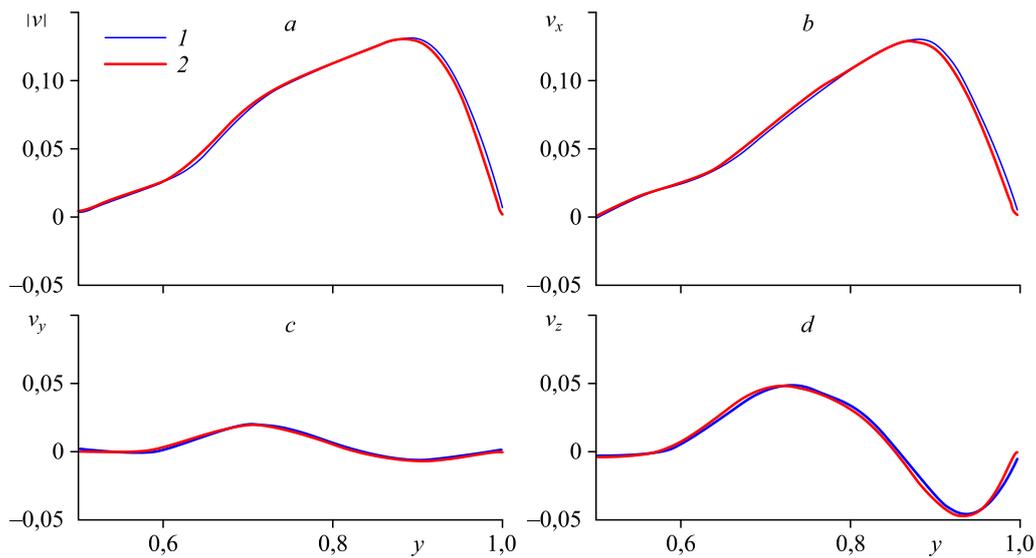


Рис. 4. Сравнение зависимостей пространственных распределений нормированных амплитуды и компонент скоростей жидкости $|v|$ (a), v_x (b), v_y (c), v_z (d) в плоскости x - y в точке $z = h/3$, рассчитанных с помощью программных пакетов Nek5000 (1) и Palabos (2) при $Re = 1500$, $h/R = 1,5$. Скорости нормированы на характерное значение линейной скорости, определяемое на верхней поверхности цилиндра.

В интервале критериев подобия $Re = 1000 - 2500$ и $h/R = 1,25 - 2,75$ был проведен поиск наличия зон локализованных обратных циркуляций. Возникновение этих зон определялось согласно алгоритму, описанному в пояснении к рис. 2. На рис. 7 представлена диаграмма возникновения приосевой рециркуляции в сравнении с данными, полученными методом прямого численного расчета, и экспериментальными результатами [24, 39].

Выводы

В настоящей работе проведено систематическое сравнение результатов численного моделирования однофазного течения в цилиндрическом контейнере с неподвижными стенками и вращающимся верхним торцом в рамках решеточных уравнений Больцмана и уравнений Навье–Стокса. Для прямого численного моделирования уравнений Навье–

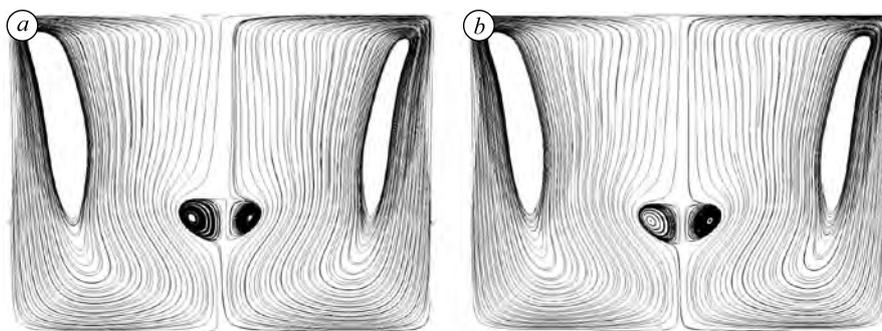


Рис. 5. Линии тока в плоскости цилиндра x - z в точке $y = R$ при $Re = 1500$, $h/R = 1,5$ для числа ячеек $N = 100^3$ (a), 200^3 (b).

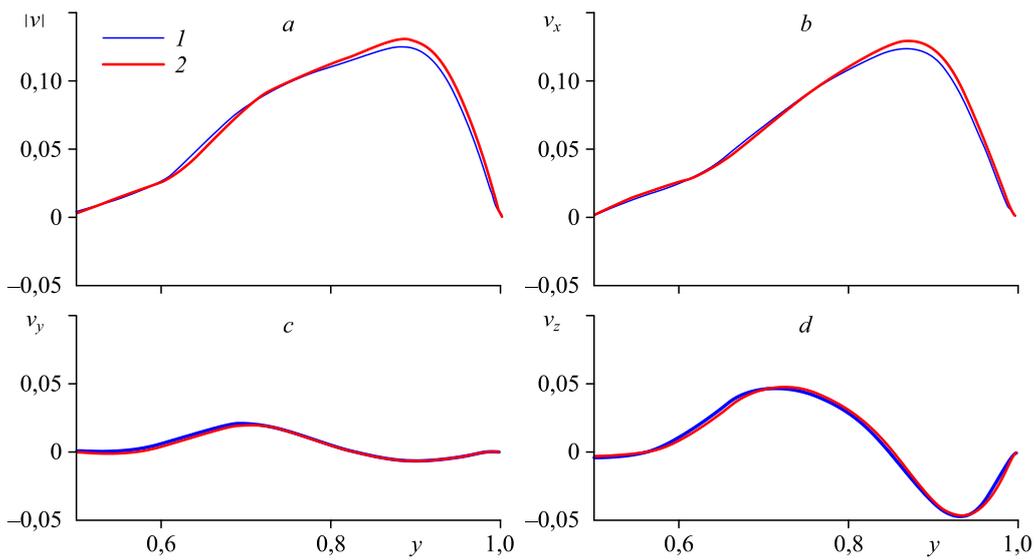


Рис. 6. Сравнение зависимостей пространственных распределений нормированных амплитуды и компонент скоростей жидкости $|v|$ (a), v_x (b), v_y (c), v_z (d) в плоскости x - y в точке $z = h/3$, рассчитанных для разрешения вычислительной области $N = 100^3$ (1) и 200^3 (2) при $Re = 1500$, $h/R = 1,5$.

Скорости нормированы на характерное значение линейной скорости, определяемое на верхней поверхности цилиндра.

Стокса применялся спектральный вычислительный код Nek5000 с подробным пространственным разрешением для валидации результатов расчета на основе вычислительного кода Palabos в рамках решеточных уравнений Больцмана. В рамках Palabos была использована относительно грубая аппроксимация криволинейной геометрии. На примере диаграммы появления возвратного течения на оси цилиндра показано, что данные численных расчетов хорошо согласуются как между собой, так и с имеющимися экспериментальными данными, что подтверждает приемлемую точность расчетов в рамках решеточных уравнений Больцмана с текущим определением криволинейной геометрии.

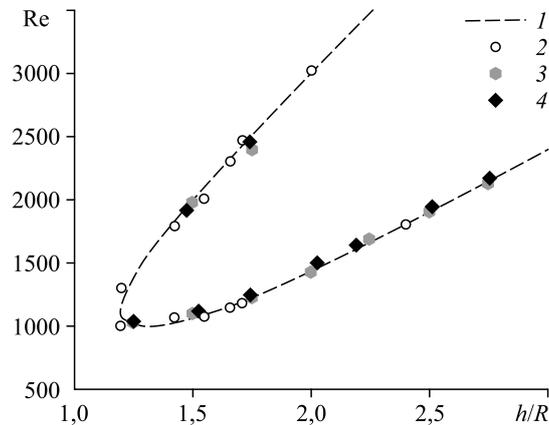


Рис. 7. Диаграмма наличия зон локализованных обратных рециркуляций. Символы соответствуют моментам появления феномена в зависимости от различных значений Re и h/R ; экспериментальные данные работ [39] (1) и [24] (2), результаты численного расчета настоящей работы, полученные с помощью Palabos (3) и Nek5000 (4).

Список литературы

1. **Perumal D.A., Dass A.K.** A review on the development of lattice Boltzmann computation of macro fluid flows and heat transfer // Alexandria Engng J. 2015. Vol. 54, Iss. 4. P. 955–971.
2. **Gunstensen K., Rothman D.H., Zaleski S., Zanetti G.** Lattice Boltzmann model of immiscible fluids // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43. P. 4320–4327.
3. **Grunau D., Chen S., Eggart K.** A lattice Boltzmann model for multi-phase fluid flows // Phys. Fluids A. 1993. Vol. 5. P. 2557–2562.
4. **Han-Taw C., Jae-Yuh L.** Numerical analysis of hyperbolic heat conduction // Intern. J. Heat Mass Transf. 1993. Vol. 36. P. 2891–2898.
5. **Gupta N., Chaitanya G.R., Mishra S.C.** Lattice Boltzmann method applied to variable thermal conductivity conduction and radiation problems // J. Thermophys. Heat Transfer. 2006. Vol. 20. P. 895–902.
6. **Chen S., Wang Z., Shan X., Doolen G.D.** Lattice Boltzmann computational fluid dynamics in three dimensions // J. Stat. Phys. 2000. Vol. 68. P. 379–400.
7. **Hardy J., Pomeau Y., Pazzis O.** Time evolution of a two-dimensional classical lattice system // Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 31. P. 276–279.
8. **Frisch U., Hasslacher B., Pomeau Y.** Lattice-gas automata for the Navier–Stokes equations // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1505–1508.
9. **McNamara G., Zanetti G.I.** Use of a Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 61, No. 20. P. 2332–2335.
10. **Higuera F., Jimenez J.** Boltzmann approach to lattice gas simulations // Europhys. Lett. 1989. Vol. 9. P. 663–668.
11. **Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.** A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Phys. Rev. 1954. Vol. 94. P. 511–525.
12. **Chen H., Chen S., Matthaeus W.H.** Recovery of the Navier–Stokes equation using a lattice-gas Boltzmann method // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. R5339–R5342.
13. **Succi S.** The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Oxford: Oxford University Press, 2001. 288 p.
14. **Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D.** The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // Intern. J. Multiphas. Flow. 2003. Vol. 29, Iss. 1. P. 117–169.
15. **Geller S., Krafczyk M., Tölke J., Turek S., Hron J.** Benchmark computations based on lattice-Boltzmann, finite element and finite volume methods for laminar flows // Comput. Fluids. 2006. Vol. 35, Iss. 8–9. P. 888–897.
16. **Yoshino M., Inamuro T.** Lattice Boltzmann simulations for flow and heat/mass transfer problems in a three-dimensional porous structure // Intern. J. Num. Meth. Fluids. 2003. Vol. 43, Iss. 2. P. 183–198.
17. **Dünweg B., Ladd A.J.C.** Advances in Polymer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 78 p.
18. **Noble D.R., Chen S., Georgiadis J.G., Buckius R.O.** A consistent hydrodynamic boundary condition for the lattice Boltzmann method // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. P. 203–209.
19. **Yu D., Mei R., Shyy W.** A unified boundary treatment in lattice Boltzmann method // AIAA Paper. 2003. No. 2003–0953.
20. **Chopard B., Droz M.** Cellular automata modeling of physical systems. Cambridge University Press; 1998. 340 p.
21. **Chopard B., Dupuis A., Masselot A., Luthi P.** Cellular automata and lattice Boltzmann techniques: an approach to model and simulate complex systems // Adv. Complex Syst. 2002. Vol. 5. P. 103–246.
22. **Bouzidi M., Firdaouss M., Lallemand P.** Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13. P. 3452–3459.
23. **Stahla B., Chopard B., Latt J.** Measurements of wall shear stress with the lattice Boltzmann method and staircase approximation of boundaries // Computers and Fluids. 2010. Vol. 39, Iss. 9. P. 1625–1633.
24. **Наумов И.В., Миккельсен Р.Ф., Окулов В.Л.** Формирование застойной зоны на оси замкнутого закрученного течения // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21, № 6. С. 799–802.
25. **Herrada M.A., Shtern V.N., Torregrosa M.M.** The instability nature of vogel-escudier flow // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 766. P. 590–610.
26. **Liow K.Y.S., Tan B.T., Thouas G., Thompson M.C.** CFD modeling of the steady-state momentum and oxygen transport in a bioreactor that is driven by an aerial rotating disk // Modern Phys. Letters B. 2009. Vol. 23. P. 121–127.
27. **Brøns M., Voigt L.K., Sørensen J.N.** Topology of vortex breakdown bubbles in a cylinder with a rotating bottom and a free surface // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 428. P. 133–148.
28. **Lo Jacono D., Nazzarinia M., Brøns M.** Experimental vortex breakdown topology in a cylinder with a free surface // Phys. Fluids. 2009. Vol. 21, Iss. 11. P. 111704-1–111704-4.
29. **Наумов И.В., Кашкарова М.В., Миккельсен Р.Ф., Окулов В.Л.** Структура ограниченного закрученного течения при различных фазовых граничных условиях на неподвижном торце цилиндра // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 1. P. 93–98.
30. **Naumov I.V., Herrada M.A., Sharifullin B.R., Shtern V.N.** Slip at the interface of a two-fluid swirling flow // Phys. Fluids. 2018. Vol. 30, Iss. 7. P. 074101-1–074101-7.

31. **Shtern V.N., Torregrosa M.M., Herrada M.A.** Effect of swirl decay on vortex breakdown in a confined steady axisymmetric flow // *Phys. Fluids*. 2012. Vol. 24. P. 043601.
32. **Herrada M.A., Shtern V.N., Torregrosa M.M.** The instability nature of Vogel-Escudier flow // *J. Fluid Mech.* 2015. Vol. 766. P. 590–610.
33. **Patankar S.V.** *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington, DC: Taylor and Francis, 1980. 197 p.
34. **Ferziger J.H., Peric M., Leonard A.** *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3rd ed. N. Y.: Springer. 2002. Vol. 50. 426 p.
35. **Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Vigen E.M.** *The Lattice Boltzmann Method — Principles and Practice*, New York: Springer International Publishing, 2017. 694 p.
36. **Latt J., Malaspina O., Kontaxakis D. et al.** Palabos: parallel lattice Boltzmann solver // *Computers and Mathematics with Applications*. 2021. Vol. 81. P. 334–350.
37. **Fischer P.F., Lottes J.W., Kerkemeier S.G.** Nek5000 — URL: <https://nek5000.mcs.anl.gov/>, 2008 (submittal date: 01.02.2022).
38. **Spohn A., Mory M., Hopfinger E.J.** Observations of vortex breakdown in an open cylindrical container with a rotating bottom // *Exp. Fluids*. 1993. Vol. 14. P. 70–77.
39. **Escudier M.P.** Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall // *Exp. Fluids*. 1984. Vol. 2. P. 189–196.

*Статья поступила в редакцию 5 марта 2022 г.,
после доработки — 21 марта 2022 г.,
принята к публикации 22 марта 2022 г.*