

УДК 519.632

## О модели двойной пористости трещиновато-пористых коллекторов на основе гибридной функции перетока\*

А.В. Григорьев<sup>1,2</sup>, Ю.М. Лаевский<sup>1,3</sup>, П.Г. Яковлев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090,

<sup>2</sup>Северо-восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, 58, Якутск, Республика Саха (Якутия), 677000

<sup>3</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: re5itsme@gmail.com (Григорьев А.В.), laev@labchem.ssc.ru (Лаевский Ю.М.), re5itsme@gmail.com (Яковлев П.Г.)

**Григорьев А.В., Лаевский Ю.М., Яковлев П.Г.** О модели двойной пористости трещиновато-пористых коллекторов на основе гибридной функции перетока // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 2. — С. 155–169.

В статье рассматривается модель двойной пористости для трещиновато-пористой среды с использованием комбинации классической и градиентной функций массообмена между трещинами и пористыми блоками в случае течения слабосжимаемой однофазной жидкости. Такая функция массообмена позволяет учитывать анизотропные свойства фильтрации в более общем, по сравнению с известными моделями, виде. Представлены результаты тестовых расчетов для двумерной и трехмерной модельных задач. Вычислительный алгоритм основан на использовании конечно-элементной аппроксимации по пространству и полностью неявной аппроксимации по времени.

DOI: 10.15372/SJNM20180203

**Ключевые слова:** *фильтрация, слабосжимаемая жидкость, трещиновато-пористые среды, модель двойной пористости, функция перетока, априорная оценка, метод конечных элементов, неявная схема.*

**Grigorev A.V., Laevsky Yu.M., Yakovlev P.G.** On the double porosity model of fractured-porous reservoirs based on the hybrid overflow function // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 2. — P. 155–169.

The paper considers a model of double porosity for a fractured porous medium using a combination of classical and gradient mass transfer functions among cracks and porous blocks in the case of a flow of a weakly compressible single-phase fluid. As compared to well-known models, such a mass transfer function allows one to take into account the anisotropic properties of filtration in a more general form. The results of numerical tests for two-dimensional and three-dimensional model problems are presented. The computational algorithm is based on the use of finite element approximation with respect to space and completely implicit approximations with respect to time.

**Keywords:** *filtration, weakly compressible liquid, fractured-porous media, model of double porosity, overflow function, priori, estimation, finite element method, implicit scheme.*

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 15-11-10024).

## Введение

В работе рассматривается задача о фильтрации однофазной слабо сжимаемой жидкости в трещиновато-пористой среде. Для описания такой среды будем использовать модель двойной пористости, впервые предложенную в классических работах [1, 2]. В этих работах трещиновато-пористая среда рассматривается как система поровых блоков, разделенная системой трещин. Флюид насыщает как поровые блоки, так и трещины. Линейные размеры раскрытости трещин значительно превышают характерные размеры пор в блоках. Таким образом, проницаемость трещин значительно превышает проницаемость поровых блоков. С другой стороны, объем пустотного пространства, соответствующий трещинам, значительно меньше объема соответствующего поровым блокам. Поэтому коэффициент емкости среды (пористости), соответствующий трещинам, значительно ниже, чем коэффициент емкости среды, соответствующий поровым блокам. Основные запасы флюида хранятся в поровых блоках, трещины, в свою очередь, отвечают за перенос данных запасов. При этом предполагается, что в каждой точке сплошной среды рассматривается течение двух “жидкостей” — в трещинах и в порах. Каждая из “жидкостей” характеризуется своим вектором скорости и давлением, а механизм массообмена между этими “жидкостями” (трещинами и пористыми блоками) обеспечивает функция перетока, заданная как разность давлений.

Другой подход в определении механизма массообмена был предложен в работе [3]. Основная специфика этого подхода заключается в задании функции перетока в виде разности градиентов давлений, что обеспечивает учет направлений потоков жидкости в трещинах и в порах. По мнению авторов указанной статьи, такая модель лучше описывает фильтрацию в трещиновато-пористых анизотропных средах. Кроме того, необходимо подчеркнуть, что градиентный переток подходит для описания фильтрации в случае неустановившегося течения жидкости, а значит, позволяет учитывать особенности более сложных физических процессов, например при учете температурных эффектов, или влиянии других физических явлений на процесс фильтрации. В статье [4] на модельном примере однофазной слабо сжимаемой жидкости роль градиентной функции перетока изучена численно. При этом функция перетока рассматривалась в виде

$$q = r|K_f \nabla(p_f - p_b)|,$$

где  $p_f$  и  $p_b$  — давления в трещинах и поровых блоках соответственно,  $K_f$  — постоянный тензор проницаемости в трещинах,  $r$  — положительный параметр,  $|\cdot|$  — евклидова норма вектора. Некоторым недостатком данного подхода является тот факт, что вне зависимости от направления течения поток массы всегда направлен из поровых блоков в трещины.

В данной работе будет рассмотрена комбинация классической и градиентной функций перетока. При этом в градиентную часть входит так называемая эффективная нормаль, зависящая, вообще говоря, от пространственных координат. При таком подходе функция перетока может принимать как классическую, так и градиентную форму. Следует отметить, что в случае переменной эффективной нормали возможно возникновение неустойчивости, и наличие слагаемого, соответствующего классической функции перетока, служит своего рода стабилизатором. Соответствующее условие будет приведено в ходе получения априорной оценки на решение.

Статья организована следующим образом. В пункте 1 приводится исходная математическая модель фильтрации однофазной сжимаемой жидкости в трещиновато-пористой среде с использованием гибридной функции перетока. В п. 2 приводится модельная задача в случае слабо сжимаемой жидкости, для решения которой устанавливается простая

априорная оценка с указанием достаточного условия устойчивости. Далее в п. 3 обсуждается вычислительный алгоритм, а в п. 4 приводятся результаты расчетов, в том числе и для трехмерной задачи.

## 1. Математическая модель двойной пористости

Исходные уравнения фильтрации в трещиновато-пористой среде состоят из законов сохранения массы и импульса (закон Дарси) и уравнения состояния при постоянной температуре (рассматривается изотермический процесс):  $\alpha = f, b$ ,

$$\phi_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}_\alpha = q_\alpha, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_\alpha = -\frac{1}{\mu} K_\alpha \nabla p_\alpha, \quad (2)$$

$$\rho = \rho(p_\alpha), \quad (3)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $\mathbf{v}_\alpha$  — скорости жидкости в трещинах и поровых блоках,  $\phi_\alpha$  — пористости,  $K_\alpha$  — тензоры абсолютной проницаемости,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости,  $q_\alpha$  — функции перетока. В качестве уравнения состояния (3) будем использовать равенство константе коэффициента всестороннего сжатия при постоянной температуре [5, с. 24]:

$$\beta_\alpha = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dp_\alpha} \right)_T = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp_\alpha}. \quad (4)$$

Из уравнений (1)–(4) исключим плотность и скорости. Преобразуем закон сохранения массы (1) с учетом уравнения состояния (4):

$$\beta_\alpha \left( \phi_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \nabla p_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \right) + \nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha = \frac{1}{\rho} q_\alpha.$$

Далее, подставляя в это равенство закон Дарси (2), получим следующее уравнение:

$$\beta_\alpha \left( \mu \phi_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} - \nabla p_\alpha \cdot K_\alpha \nabla p_\alpha \right) - \nabla \cdot K_\alpha \nabla p_\alpha = \frac{\mu}{\rho} q_\alpha. \quad (5)$$

Здесь и далее динамическая вязкость  $\mu$  предполагается постоянной.

Зададим гибридную функцию перетока. Пусть  $S$  — площадь эффективной поверхности, через которую осуществляется обмен жидкостью между поровыми блоками и трещинами в каждой точке среды, а  $\mathbf{n}_{\text{эфф}}$  — вектор нормали к этой поверхности, направленный в сторону порового блока, который будем называть *эффективной нормалью*. Данное понятие чрезвычайно важно для дальнейшего, и в связи с этим приведем некоторые соображения о выборе эффективной нормали. Рассмотрим два альтернативных подхода.

Первый подход базируется на геометрических представлениях о системе трещин. При наличии процедуры гомогенизации будем считать, что в некотором элементе объема данную систему можно приблизить одной *эффективной трещиной*. В этом случае эффективная нормаль выбирается из условия ортогональности направлению эффективной трещины. Приблизительно такой процедуре соответствует выбор вектора эффективной нормали, ортогонального вектору, составленному из диагональных элементов тензора проницаемости для трещин. Такой выбор не является однозначным — в двумерном случае

вектор эффективной нормали определяется с точностью до направления вдоль линии, ортогональной направлению эффективной трещины, а в трехмерном случае лежит в ортогональной эффективной трещине плоскости. На рисунке 1 эффективная нормаль, соответствующая описанному подходу, обозначена буквой “а”.

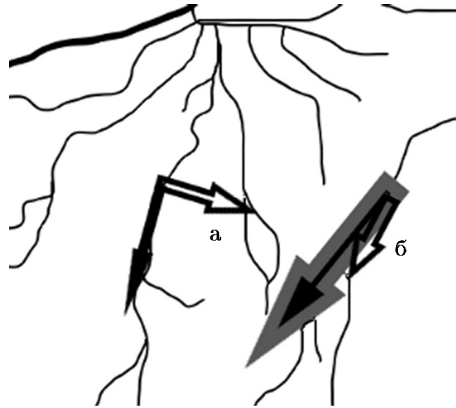


Рис. 1. Варианты задания эффективной нормали

Второй подход базируется на эмпирическом представлении о том, что переток реализуется в тонком слое порового блока около стенок трещины. Аналогичный подход применяется в методе MINC (Multiple Interacting Continua) [6], в котором на наборе вложенных сред происходит стабилизация обменного перетока. При этом информация об эффективной нормали извлекается из тензора проницаемости порового блока и является либо ее приближенным представлением (диагональные элементы тензора проницаемости), либо некоторой отсеченной ее частью. На рис. 1 эффективная нормаль, соответствующая этому подходу, обозначена буквой “б”. “Направленная” масса жидкости, перетекающая из трещин в поровый блок в направлении  $\mathbf{n}_{\text{eff}}$  за одну секунду (“направленный” расход жидкости) и обратно, определяется формулами  $Q_f = \rho S \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{v}_f$  и  $Q_b = -\rho S \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{v}_b$ . Тогда в соответствии с законом Дарси (2) имеют место равенства

$$Q_f = -\frac{\rho S}{\mu} \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot K_f \nabla p_f, \quad Q_b = \frac{\rho S}{\mu} \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot K_b \nabla p_b. \quad (6)$$

Будем предполагать подобие тензоров абсолютной проницаемости для трещин и поровых блоков:  $K_f = K$ ,  $K_b = dK$ , где  $d$  — коэффициент пропорциональности,  $d \ll 1$  (проницаемость трещин значительно выше проницаемости поровых блоков). Градиентная часть функции перетока — это относительный суммарный расход жидкости с учетом предположения об увеличении расхода при прохождении эффективной поверхности в направлении нормали (из трещин в поровый блок) —

$$\tilde{q}_f = \frac{1}{S} \left( Q_f + \frac{1}{d} Q_b \right), \quad \tilde{q}_b = -\tilde{q}_f$$

и в соответствии с (6)

$$\tilde{q}_f = \frac{\rho}{\mu} K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \nabla (p_b - p_f). \quad (7)$$

На основе представления (7) введем гибридную функцию перетока:

$$q_f = \frac{\rho}{\mu} (\gamma c_1 (p_b - p_f) + (1 - \gamma) c_2 K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \nabla (p_b - p_f)) \quad (8)$$

и  $q_b = -q_f$ . Подстановка этих равенств в (5) приводит к системе двух уравнений относительно давлений  $p_f$  и  $p_b$ .

## 2. Модельная задача и априорная оценка

Рассмотрим модельную задачу в случае слабо сжимаемой жидкости. Для решения этой задачи будет получена априорная оценка с указанием достаточного условия устойчивости. Из равенств (4) немедленно следуют выражения для градиентов давлений через плотность:

$$\beta_\alpha \nabla p_\alpha = \frac{1}{\rho} \nabla \rho, \quad \alpha = f, b,$$

и предположение о слабой сжимаемости означает малость величин  $|\nabla p_\alpha|$ , что позволяет в уравнениях (5) пренебречь квадратичным слагаемым  $\nabla p_\alpha \cdot K_\alpha \nabla p_\alpha$ . В связи с этим рассмотрим модельную задачу для системы двух уравнений с гибридной функцией перетока (8):

$$c \frac{\partial p_f}{\partial t} - \nabla \cdot K \nabla p_f + q = 0, \quad \frac{\partial p_b}{\partial t} - d \nabla \cdot K \nabla p_b - q = 0, \quad (9)$$

где  $c$  — положительное число ( $c \ll 1$ , что соответствует малой пористости трещин) и

$$q = \gamma r_1 (p_f - p_b) + (1 - \gamma) r_2 K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \nabla (p_f - p_b). \quad (10)$$

Здесь и далее  $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Кроме того, будем предполагать, что матрица  $K$  положительно определена. Уравнения рассматриваются в некоторой ограниченной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , на которой заданы однородные краевые условия: на  $\Gamma_D$  условие Дирихле

$$p_f = 0, \quad p_b = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (11)$$

а на  $\Gamma_N$  условие Неймана

$$\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0, \quad \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (12)$$

где  $\mathbf{n}_\Gamma$  — внешняя нормаль на  $\Gamma_N$ . Завершает постановку задачи задание в  $\bar{\Omega}$  (замыкании области  $\Omega$ ) начальных данных

$$p_f(0, \mathbf{x}) = p_{f,0}(\mathbf{x}), \quad p_b(0, \mathbf{x}) = p_{b,0}(\mathbf{x}). \quad (13)$$

Сделаем одно замечание относительно градиентной части функции перетока. Введем *эффективную скорость* перетока:

$$\mathbf{v}_{\text{eff}} = \mathbf{v}_f - \frac{1}{d} \mathbf{v}_d.$$

Из закона Дарси следует, что

$$\mathbf{v}_{\text{eff}} = -\frac{1}{\mu} K \nabla (p_f - p_b),$$

и в соответствии с (10) градиентная часть функции перетока может быть записана в виде

$$\tilde{q} = -r \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{v}_{\text{eff}}, \quad r > 0.$$

Таким образом, отсутствие градиентной составляющей функции перетока означает ортогональность векторов эффективной скорости и эффективной нормали.

Перейдем к исследованию устойчивости системы (9) по начальным данным. В дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие

$$K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{n}_\Gamma \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N. \quad (14)$$

Умножим первое из уравнений (9) на функцию  $p_f$  и проинтегрируем результат по  $\Omega$ . Тогда с использованием формулы Грина и краевых условий (11), (12) для функций  $p_f$  и  $\mathbf{v}_f$  получим

$$\frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} p_f^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} K \nabla p_f \cdot \nabla p_f d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q p_f d\mathbf{x} = 0.$$

Аналогичным образом второе уравнение системы (9) принимает вид следующего интегрального тождества:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} p_b^2 d\mathbf{x} + d \int_{\Omega} K \nabla p_b \cdot \nabla p_b d\mathbf{x} - \int_{\Omega} q p_b d\mathbf{x} = 0.$$

Складывая эти равенства и учитывая положительную определенность матрицы  $K$ , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (c p_f^2 + p_b^2) d\mathbf{x} + 2\gamma r_1 \int_{\Omega} (p_f - p_b)^2 d\mathbf{x} + \\ 2(1 - \gamma) r_2 \int_{\Omega} (p_f - p_b) K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \nabla (p_f - p_b) d\mathbf{x} \leq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь мы использовали явный вид гибридной функции перетока (10). Рассмотрим третье слагаемое в левой части неравенства (15). Имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} (p_f - p_b)^t \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \nabla (p_f - p_b) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \nabla (p_f - p_b)^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma} (p_f - p_b)^2 K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{n}_\Gamma ds - \int_{\Omega} (p_f - p_b)^2 \nabla \cdot K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

В силу условий (11) и (14) первое слагаемое в правой части этого равенства неотрицательно. Тогда неравенство (15) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (c p_f^2 + p_b^2) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \{2\gamma r_1 - (1 - \gamma) r_2 \nabla \cdot K^t \mathbf{n}_{\text{eff}}\} (p_f - p_b)^2 d\mathbf{x} \leq 0. \quad (16)$$

Пусть выполняется неравенство

$$(1 - \gamma) r_2 \nabla \cdot K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} \leq 2\gamma r_1. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (c p_f^2 + p_b^2) d\mathbf{x} \leq 0.$$

Интегрирование последнего неравенства по  $t$  с использованием начальных данных (13) приводит к итоговой оценке устойчивости по начальным данным

$$\int_{\Omega} (c p_f^2 + p_b^2) d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} (c p_{f,0}^2 + p_{b,0}^2) d\mathbf{x}. \quad (18)$$

Таким образом, неравенство (17) является достаточным условием выполнения оценки (18). Отметим, что в случае постоянной эффективной нормали левая часть в (17) обращается в ноль, и условие устойчивости выполняется при любом параметре  $\gamma$ . В случае, когда эффективная нормаль зависит от пространственных координат, возможно развитие неустойчивости. Это происходит, когда в области  $\Omega$  найдется подобласть, в которой  $\nabla \cdot K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} > 0$ , и не выполняется неравенство

$$\gamma \geq \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{r_2 \nabla \cdot K^t \mathbf{n}_{\text{eff}}}{2r_1 + r_2 \nabla \cdot K^t \mathbf{n}_{\text{eff}}}. \quad (19)$$

Ниже будет приведен численный пример, иллюстрирующий такую неустойчивость.

### 3. Вычислительный алгоритм

Рассмотрим вопрос о численной реализации задачи (9)–(13). В основу пространственной аппроксимации положен метод конечных элементов, использующий неструктурированную триангулированную сетку в области  $\Omega$  и стандартные конформные лагранжевы элементы первой степени (см., например, [7]). По времени используется полностью неявная разностная схема. На каждом временном слое решение  $p_{f,h}^n, p_{b,h}^n$  ищется в пространстве сеточных функций  $V_h \subset H^1(\Omega, \Gamma_D)$  — замыкание пространства гладких, равных нулю на  $\Gamma_D$  функций по норме пространства Соболева  $H^1(\Omega)$ . При этом сеточная система имеет вид: для  $n = 1, 2, \dots$

$$\frac{c}{\tau} \int_{\Omega} (p_{f,h}^n - p_{f,h}^{n-1}) \varphi_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega} K \nabla p_{f,h}^n \cdot \nabla \varphi_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q_h^n \varphi_h d\mathbf{x} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{\Omega} (p_{b,h}^n - p_{b,h}^{n-1}) \psi_h d\mathbf{x} + d \int_{\Omega} K \nabla p_{b,h}^n \cdot \nabla \psi_h d\mathbf{x} - \int_{\Omega} q_h^n \psi_h d\mathbf{x} = 0, \quad (21)$$

где  $\varphi_h, \psi_h$  — стандартные базисные функции пространства  $V_h$ ,

$$q_h^n = \gamma r_1 (p_{f,h}^n - p_{b,h}^n) + (1 - \gamma) r_2 K^t \mathbf{n}_{\text{eff}} \cdot \nabla (p_{f,h}^n - p_{b,h}^n). \quad (22)$$

В качестве начальных данных могут использоваться следы функций  $p_{f,0}$  и  $p_{b,0}$  на пространственной сетке:

$$p_{f,h}^0 = (p_{f,0})_h, \quad p_{b,h}^0 = (p_{b,0})_h. \quad (23)$$

Устойчивость по начальным данным системы (20), (21) устанавливается совершенно аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте для дифференциальной задачи. Полагаем  $\varphi_h = p_{f,h}^n, \psi_h = p_{b,h}^n$  и, используя равенства

$$p_{f,h}^n = \frac{1}{2} (p_{f,h}^n + p_{f,h}^{n-1}) + \frac{1}{2} (p_{f,h}^n - p_{f,h}^{n-1}), \quad p_{b,h}^n = \frac{1}{2} (p_{b,h}^n + p_{b,h}^{n-1}) + \frac{1}{2} (p_{b,h}^n - p_{b,h}^{n-1}),$$

получим

$$\int_{\Omega} (p_{f,h}^n - p_{f,h}^{n-1}) p_{f,h}^n d\mathbf{x} \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( (p_{f,h}^n)^2 - (p_{f,h}^{n-1})^2 \right) d\mathbf{x},$$

$$\int_{\Omega} (p_{b,h}^n - p_{b,h}^{n-1}) p_{b,h}^n d\mathbf{x} \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( (p_{b,h}^n)^2 - (p_{b,h}^{n-1})^2 \right) d\mathbf{x}.$$

Далее, полностью повторяя рассуждения из предыдущего пункта, приходим к неравенству

$$\int_{\Omega} \left( c (p_{f,h}^n)^2 + (p_{b,h}^n)^2 \right) d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} \left( c (p_{f,h}^{n-1})^2 + (p_{b,h}^{n-1})^2 \right) d\mathbf{x},$$

из которого немедленно следует итоговая оценка

$$\int_{\Omega} \left( c (p_{f,h}^n)^2 + (p_{b,h}^n)^2 \right) d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} \left( c (p_{f,0})_h^2 + (p_{b,0})_h^2 \right) d\mathbf{x}. \quad (24)$$

Таким образом, для сеточной задачи (20)–(23) установлена устойчивость по начальным данным в норме пространства  $L_2(\Omega)$ .

#### 4. Численные эксперименты

Реализация метода конечных элементов осуществлялась с помощью конечно-элементной библиотеки FEniCS [8, 9]. Рассматриваемая ниже двумерная тестовая задача взята из работы [4]. Расчеты проводились в области, изображенной на рис. 2, а на рис. 3 приведена “грубая” триангуляция (1294 треугольников) этой области. Наряду с этой триангуляцией использовались триангуляции с 5068, 19664 и 78870 треугольниками. Решение, полученное на сетке с 78870 треугольниками с шагом по времени  $\tau = 10^{-3}$ , будет рассматриваться ниже в качестве референтного решения и обозначаться  $(p_f^n)^{\text{ref}}$ ,  $(p_b^n)^{\text{ref}}$ .

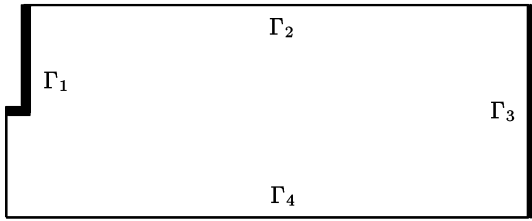


Рис. 2. Расчетная область

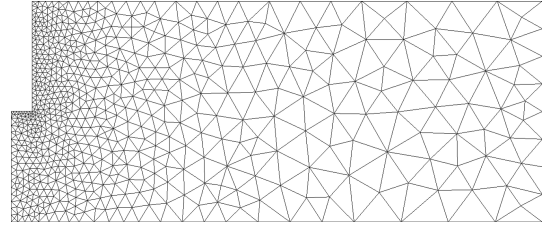


Рис. 3. Расчетная сетка (1294 треугольников)

Приведем численные значения всех данных задачи. Во-первых, в соответствии с обозначениями на рис. 2 имеем

$$\Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \quad \Gamma_N = \Gamma_2 \cup \Gamma_4.$$

В экспериментах используются следующие краевые условия:

$$p_\alpha = 1 - e^{-10t}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad p_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad t > 0,$$

и начальные данные

$$p_\alpha(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$



Отметим, что в отличие от (11) здесь рассматривается неоднородное краевое условие, согласованное при  $t = 0$  с однородными начальными данными. Далее в экспериментах рассматривается два варианта тензора проницаемости  $K$  и два варианта эффективной нормали  $\mathbf{n}_{\text{эф}}$ :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \sin(2\pi x/L_x) \\ \cos(2\pi x/L_x) \end{bmatrix}.$$

Здесь  $L_x = 2.5$ . Кроме того, во всех экспериментах полагается  $c = 0.01$ ,  $d = 0.01$ .

Рисунки 4 и 5 демонстрируют точность вычислений при дроблении временной и пространственной сеток в различные моменты времени. Функция перетока (10) вычислялась при  $r_1 = r_2 = 0.1$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $K = K_1$ ,  $\mathbf{n}_{\text{эф}} = \mathbf{n}_1$ . При этом полученное численное решение сравнивается с референтным решением

$$\varepsilon = \left( \|p_{f,h}^n - (p_f^n)^{\text{ref}}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|p_{b,h}^n - (p_b^n)^{\text{ref}}\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

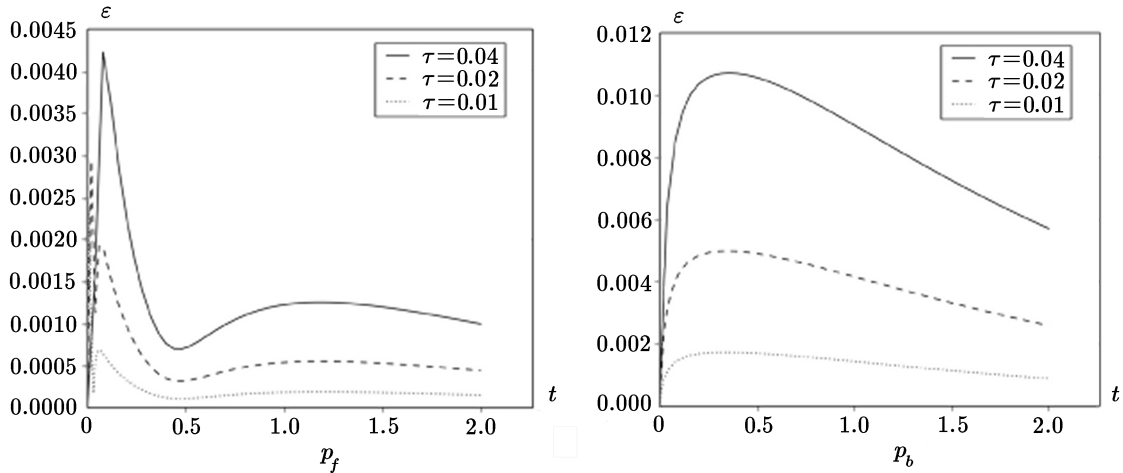


Рис. 4. Погрешность решения при разных  $\tau$  на сетке с 78870 треугольниками

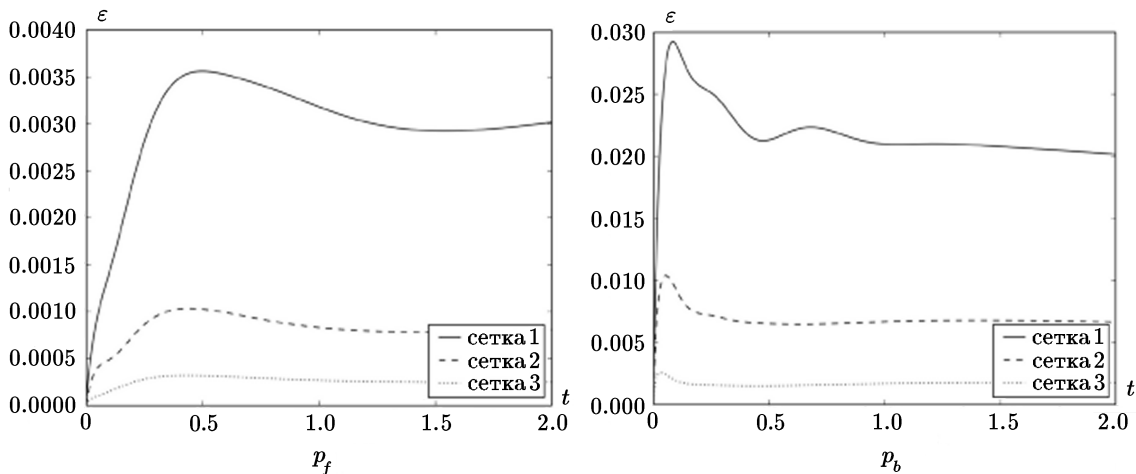


Рис. 5. Погрешность решения на разных сетках: сетка 1 — 1294 треугольников, сетка 2 — 5068 треугольников, сетка 3 — 19664 треугольников,  $\tau = 10^{-3}$

Отметим, что все рассматриваемые сеточные функции в методе конечных элементов являются функциями непрерывного пространственного аргумента, и, следовательно

но, допустимо сравнение решений, полученных на разных конечно-элементных сетках. На рис. 3 приведены погрешности решений, вычисленных на самой подробной сетке (78870 треугольников) с шагами по времени  $\tau = 0.04, 0.02, 0.01$ . На этой сетке получено референтное решение, и погрешность пространственной аппроксимации не влияет на характер сходимости по времени. При этом наблюдается сходимость порядка  $O(\tau)$ .

На рисунке 4 приведены погрешности при использовании разных пространственных сеток с 1294, с 5068 и с 19664 треугольниками и с шагом по времени  $\tau = 10^{-3}$ , при котором вычислялось референтное решение, и погрешность аппроксимации по времени не влияет на ошибку.

Рисунок 6 демонстрирует поведение давления в трещинах и в поровых блоках на момент времени  $t = 2$ , вычисленного на сетке с 1294 треугольниками и с шагом по времени  $\tau = 10^{-2}$ . При этом рассматривались оба варианта тензора проницаемости и эффективной нормали. Здесь видно, что скорость фильтрации в трещинах существенно выше, чем в поровых блоках. Кроме того, хорошо заметно наличие “диагонального переноса” для тензора проницаемости  $K_2$  (в отличие от скалярной проницаемости с единичной матрицей  $K_1$ ). При этом использование различных вариантов эффективной нормали мало влияет на картину течения.

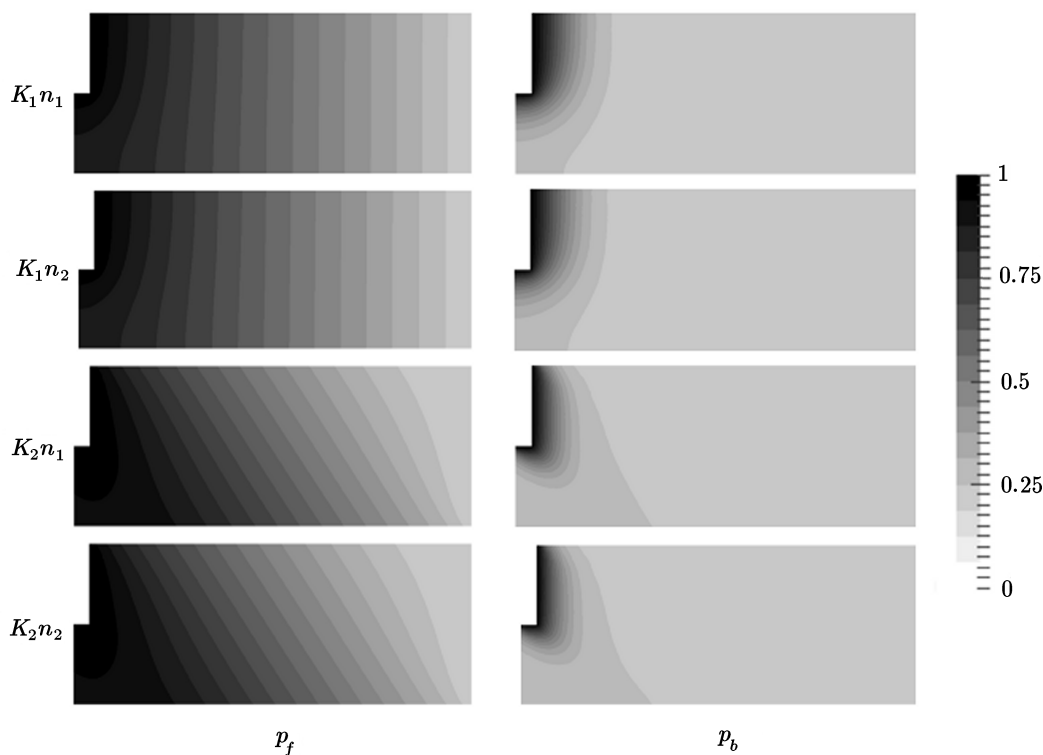
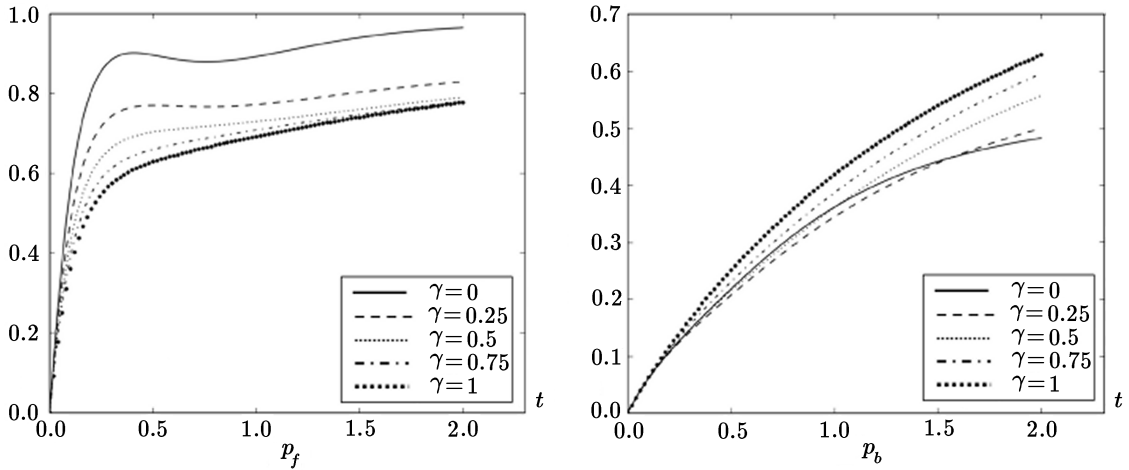


Рис. 6. Решение при различных тензорах проницаемости и эффективных нормалях,  $t = 2$

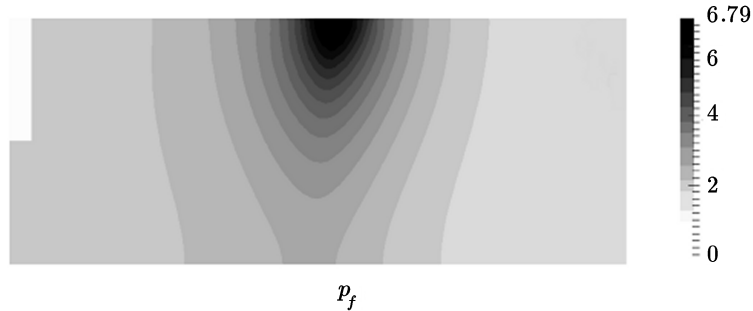
Далее на рис. 7 варьированием веса  $\gamma$  проиллюстрирована роль гибридной функции перетока с течением времени. Расчеты проведены на сетке с 1294 треугольниками и с шагом по времени  $\tau = 10^{-2}$ . В качестве тензора проницаемости и эффективной нормали брались  $K = K_2$  и  $\mathbf{n}_{\text{eff}} = \mathbf{n}_2$ . И кроме того, полагали  $r_1 = r_2 = 1$ . Напомним, что значению  $\gamma = 1$  соответствует классическая функция перетока, а параметру  $\gamma = 0$  — чисто градиентная функция перетока. При этом на рис. 7 изображены  $L_2(\Omega)$ -нормы

решений как функции времени. Отметим, что с течением времени в трещинах нечисто градиентные решения ( $\gamma > 0$ ) стабилизируются к решению с классической функцией перетока. В несколько меньшей степени та же ситуация возникает и в поровых блоках.



**Рис. 7.** Нормы решений при различных значениях весового коэффициента в функции перетока

Выше было получено достаточное условие устойчивости как исходной дифференциальной, так и сеточной задачи. Вообще говоря, это условие не является необходимым, и, тем не менее, можно подобрать данные, нарушающие достаточное условие устойчивости, при которых удается продемонстрировать неустойчивость. Результат соответствующего расчета показан на рис. 8.



**Рис. 8.** Неустойчивое решение ( $r_1 = 1, r_2 = 10, \gamma = 0.3, K = K_1, \mathbf{n}_{\text{eff}} = \mathbf{n}_2$ ),  $t = 0, 2$

Реализуется это решение при следующих данных:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 10, \quad \gamma = 0.3, \quad K = K_1, \quad \mathbf{n}_{\text{eff}} = \mathbf{n}_2.$$

Вычисление правой части неравенства (19), обеспечивающего устойчивость, дает

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{r_2 \nabla \cdot K^t \mathbf{n}_{\text{eff}}}{2r_1 + r_2 \nabla \cdot K^t \mathbf{n}_{\text{eff}}} = \frac{4\pi}{1 + 4\pi},$$

и при  $\gamma = 0.3$  неравенство (19) не выполняется. На рис. 9 при этих же параметрах приведены  $L_2(\Omega)$ -нормы решений при различных  $\gamma$ , демонстрирующие развитие неустойчивости. Отметим осциллирующий характер неустойчивых решений. При этом поле давлений в трещинах, приведенное на рис. 8, соответствует самому началу неустойчивости.

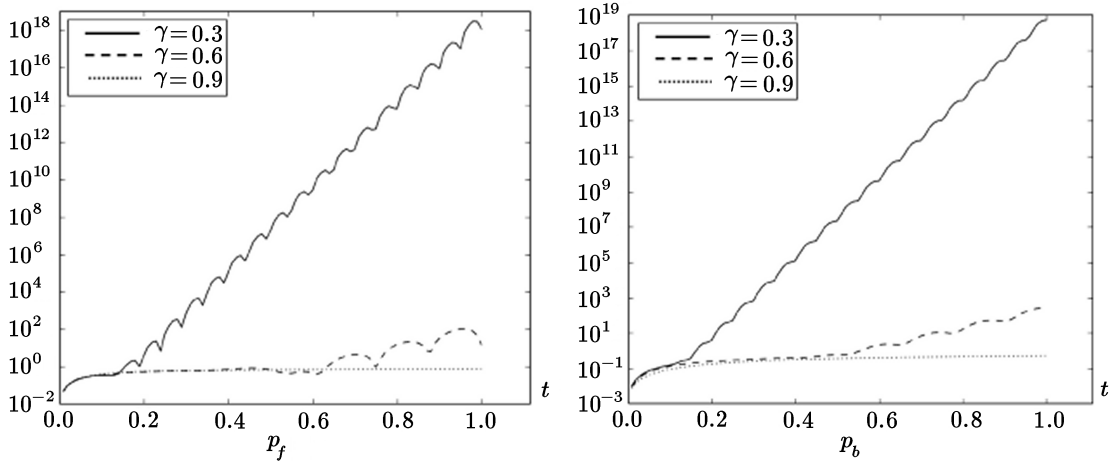


Рис. 9. Развитие неустойчивости

Перейдем к описанию численного эксперимента для трехмерной задачи. Область и сетка построены с помощью сеточного генератора Gmsh [10] и показаны на рис. 10.

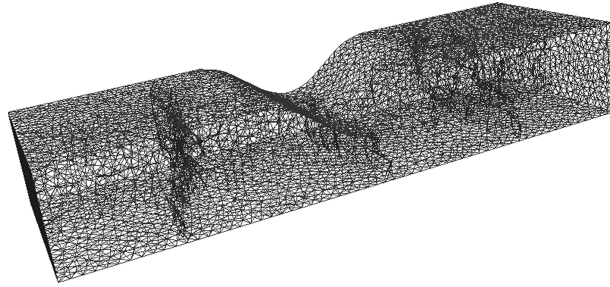


Рис. 10. Область и расчетная сетка (11220 тетраэдров)

Область представляет собой параллелепипед размерами  $3 \times 1 \times 0.5$ , приплюснутый по центру. Пусть

$$\Gamma_{D,1} = \{x = 0, y \in [0, 0.2], z \in [0, 0.5]\}, \quad \Gamma_{D,2} = \{x = 3, y \in [0.8, 1], z \in [0, 0.5]\},$$

$$\Gamma_D = \Gamma_{D,1} \cup \Gamma_{D,2}, \quad \Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D.$$

В этой серии экспериментов заданы следующие краевые условия и начальные данные:

$$p_\alpha = 1 - e^{-10t}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{D,1}, \quad p_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{D,2}, \quad \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad t > 0,$$

$$p_\alpha(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Как и для двумерной задачи, здесь использованы следующие значения параметров:

$$c = 0.01, \quad d = 0.01, \quad r_1 = r_2 = 0.1, \quad \gamma = 0.5, \quad \tau = 0.01.$$

Тензор абсолютной проницаемости имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Для построения эффективной нормали воспользуемся вторым подходом из п. 1. Как уже говорилось, информация об эффективной нормали извлекается из тензора проницаемости порового блока. В общем случае источником такой информации может служить синтетический тест SPE10 [11]. При этом  $\mathbf{n}_{\text{эф}}$  может быть получен путем нормализации вектора  $(K_x, K_y, K_z)^t$ , компонентами которого являются диагональные элементы тензора абсолютной проницаемости. В рассматриваемом здесь примере  $\mathbf{n}_{\text{эф}} = 0.674 \cdot (0.6, 1, 0.6)^t$ . Результаты вычислений приведены на рис. 11.

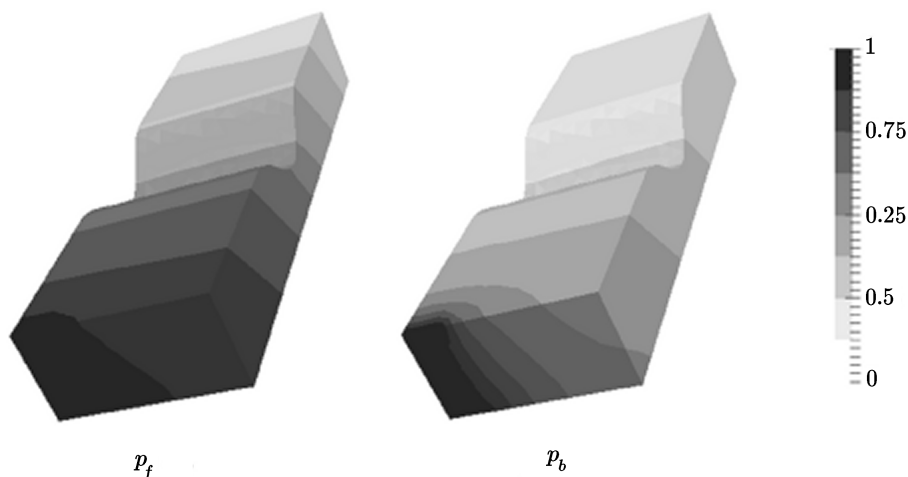


Рис. 11. Давление в трещинах и блоках в момент времени  $t = 10$

Отметим, что численная реализация 3D-модели осуществлялась на высокопроизводительном кластере. Для распараллеливания вычислений использовалось разбиение сеточной области на подобласти при помощи пакета METIS [12]. Результат этого разбиения проиллюстрирован на рис. 12. При этом получены следующие ускорения в зависимости от числа MPI-процессов по отношению к одному MPI-процессу: в 2.9, в 4.6 и в 3.3 раза при использовании 4, 16 и 64 MPI-процессов соответственно, т. е. 64 MPI-процесса являются избыточными по отношению к результату работы пакета METIS.

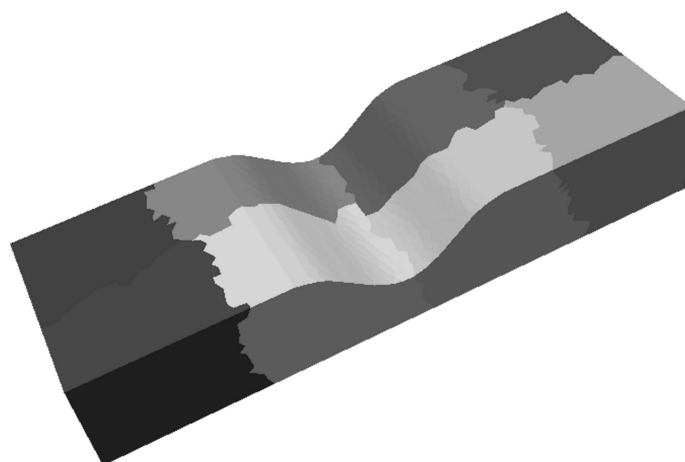


Рис. 12. Разбиение сеточной области на 8 подобластей

## 5. Заключение

В работе предложена гибридная функция перетока, использующая в градиентном слагаемом эффективную нормаль. В отличие от модели, численно исследованной в [4], заданная таким способом функция перетока делает задачу линейной. При этом существенно использование классического перетока, играющего в некоторых ситуациях роль стабилизатора. Для такой задачи и ее разностной аппроксимации получены априорные оценки, гарантирующие устойчивость по начальным данным. Приведено условие на весовой параметр в комбинации классической и градиентной частей функции перетока, гарантирующее устойчивость. Отметим, что в случае фильтрации несжимаемой жидкости (стационарная задача) это условие обеспечивает  $H^1(\Omega)$ -эллиптичность. С точки зрения развития данного подхода было бы интересно его применить к решению задач фильтрации многофазной жидкости.

## Литература

1. **Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.** Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика. — 1960. — Т. 24, вып. 5. — С. 852–864.
2. **Warren J.E., Root P.J.** The behavior of naturally fractured reservoirs // Society of Petroleum Engineers Journal. — 1963. — Vol. 3, № 3. — P. 245–255.
3. **Dmitriev N.M., Maksimov V.M.** Models of flow through fractured-porous anisotropic media // Fluid Dynamics. — 2007. — Vol. 42, iss. 6. — P. 937–942.
4. **Vabishchevich P.N., Grigoriev A.V.** Numerical modeling of fluid flow in anisotropic fractured porous media // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, iss. 1. — P. 45–56.
5. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теория упругости. Курс Теоретической Физики. Т. VII, 4-е изд., испр. — М.: Наука, 1987.
6. **Pruess K.** Brief guide to the MINC-method for modeling flow and transport in fractured media. — Berkeley: Earth Sciences Division, Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, 1992
7. **Brenner S.C., Scott L.R.** The Mathematical Theory of Finite Element Methods. 3rd ed. // Texts in Applied Mathematics. — Springer, 2007. — Vol. 15.
8. **Dupont T., Hoffman J., Johnson C. et al.** The FEniCS project. Tech. Rep. 2003–21, Chalmers Finite Element Center. — Göteborg, 2003. — (Preprint / Chalmers University of Technology).
9. **Langtangen H.P., Logg A.** Solving PDEs in Minutes. — Springer, 2016. — (The FEniCS Tutorial, Vol. 1).
10. **Geuzaine C., Remacle J.-F.** Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. — 2009. — Vol. 79, № 11. — P. 1309–1331.
11. SPE Comparative Solution Project. — <http://www.spe.org/web/csp/datasets/set02.htm>
12. **Karypis G., Kumar V.** A parallel algorithm for multilevel graph partitioning and sparse matrix ordering // J. of Parallel and Distributed Computing. — 1998. — Vol. 48, iss. 1. — P. 71–95.

Поступила в редакцию 29 сентября 2017 г.

## Литература в транслитерации

1. **Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N.** Ob osnovnykh predstavleniyah teorii fil'tracii v treshchinovatykh sredah // Prikl. matematika i mekhanika. — 1960. — Т. 24, вып. 5. — С. 852–864.
2. **Warren J.E., Root P.J.** The behavior of naturally fractured reservoirs // Society of Petroleum Engineers Journal. — 1963. — Vol. 3, № 3. — P. 245–255.
3. **Dmitriev N.M., Maksimov V.M.** Models of flow through fractured-porous anisotropic media // Fluid Dynamics. — 2007. — Vol. 42, iss. 6. — P. 937–942.
4. **Vabishchevich P.N., Grigoriev A.V.** Numerical modeling of fluid flow in anisotropic fractured porous media // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, iss. 1. — P. 45–56.
5. **Landau L.D., Lifshic E.M.** Teoriya uprugosti. Kurs Teoreticheskoy Fiziki. T. VII, 4-e izd., ispr. — M.: Nauka, 1987.
6. **Pruess K.** Brief guide to the MINC-method for modeling flow and transport in fractured media. — Berkeley: Earth Sciences Division, Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, 1992
7. **Brenner S.C., Scott L.R.** The Mathematical Theory of Finite Element Methods. 3rd ed. // Texts in Applied Mathematics. — Springer, 2007. — Vol. 15.
8. **Dupont T., Hoffman J., Johnson C. et al.** The FEniCS project. Tech. Rep. 2003–21, Chalmers Finite Element Center. — Göteborg, 2003. — (Preprint / Chalmers University of Technology).
9. **Langtangen H.P., Logg A.** Solving PDEs in Minutes. — Springer, 2016. — (The FEniCS Tutorial, Vol. 1).
10. **Geuzaine C., Remacle J.-F.** Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. — 2009. — Vol. 79, № 11. — P. 1309–1331.
11. SPE Comparative Solution Project. — <http://www.spe.org/web/csp/datasets/set02.htm>
12. **Karypis G., Kumar V.** A parallel algorithm for multilevel graph partitioning and sparse matrix ordering // J. of Parallel and Distributed Computing. — 1998. — Vol. 48, iss. 1. — P. 71–95.

