УДК 519.63

Численное решение трехмерных внешних краевых задач для уравнения Лапласа методом декомпозиции расчетной области без пересечения*

В.М. Свешников[1,2], А.О. Савченко[1], А.В. Петухов[1]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: victor@lapasrv.sscc.ru (Свешников В.М.), savch@ommfao1.sscc.ru (Савченко А.О.), petukhov@lapasrv.sscc.ru (Петухов А.В.)

Свешников В.М., Савченко А.О., Петухов А.В. Численное решение трехмерных внешних краевых задач для уравнения Лапласа методом декомпозиции расчетной области без пересечения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 4. — С. 435–449.

Предложен метод решения трехмерных внешних краевых задач для уравнения Лапласа, основанный на декомпозиции расчетной области на две подобласти, сопрягаемые без пересечения. Исходная краевая задача сводится к двум подзадачам: внутренней и внешней на сфере. Для сшивки решений на границе сопряжения подобластей (сфере) записывается специальное операторное уравнение, которое аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений. Данная система решается итерационными методами в подпространствах Крылова. Метод иллюстрируется решением модельных задач, подтверждающим работоспособность предлагаемого подхода.

DOI: 10.15372/SJNM20180407

Ключевые слова: *внешние краевые задачи, декомпозиция расчетной области, вычисление интегралов с особенностями, итерационные методы в подпространствах Крылова.*

Sveshnikov V.M., Savchenko A.O., Petukhov A.V. A new non-overlapping domain decomposition method for the 3-D Laplace exterior problem // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 4. — P. 435–449.

We propose a method for solving the three-dimensional boundary value problems for the Laplace equation in an unbounded domain. It is based on the non-overlapping decomposition of the exterior domain to the two subdomains such that the initial problem is reduced to the two subproblems, namely, the exterior and the interior boundary value problems on a sphere. To solve the exterior boundary value problem, we propose a singularity isolation method. To cross-link the solutions at the interface of subdomains (a sphere), we introduce a special operator equation that is approximated by the system of linear algebraic equations. Such a system is solved by iterative methods in the Krylov subspaces. The method is illustrated by solving the model problems confirming its operability.

Keywords: *exterior boundary value problems, non-overlapping decomposition, computation of integrals with a singularities, iterative methods in Krylov subspaces.*

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00485) и РФФИ (проект № 16-01-00168).

Введение

Метод декомпозиции расчетной области на подобласти, сопрягаемые без пересечения, активно используется для решения задач математической физики [1, 2]. Повышенное внимание к данному методу вызвано тем, что он является основным инструментом при распараллеливании решения краевых задач на многопроцессорных суперЭВМ. Применительно к внешним краевым задачам, рассматриваемым в настоящей работе, метод декомпозиции расчетной области, кроме того, является эффективным средством получения решения. Ранее данный подход с пересечением подобластей рассматривался в работе [3]. Его недостатком является введение, по сути дела, нефизической области налегания подобластей, от которой существенно зависит скорость сходимости итерационного процесса. Методы декомпозиции без пересечения для решения внешней трехмерной краевой задачи рассматривались, например, в работе [4], в которой поочередно ставились граничные условия Дирихле и Неймана на границе сопряжения (интерфейсе), а решение было найдено специальным сугубо последовательным итерационным процессом по подобластям. В ней были также получены критерии сходимости, применение которых на практике представляется затруднительным. Кроме того, в этой работе отсутствует оценка скорости сходимости итераций.

В настоящей работе рассматривается вариант метода декомпозиции расчетной области на две подобласти, имеющие общую границу в виде вспомогательной сферы. Одна из них ограниченна сверху сферой, а снизу — исходной поверхностью, другая ограничена только снизу сферой. Таким образом, исходная краевая задача сводится к решению внутренней подзадачи в ограниченной подобласти и внешней подзадачи для сферы. Общепринятым подходом к сшивке решений в подобластях [1] является введение специального итерационного процесса по подобластям, что делается, например, в [4]. Отличием нашего подхода является формулировка задачи декомпозиции без представления итерационного процесса в явном виде. Идея предложенного метода состоит в том, что конечномерный оператор, аппроксимирующий оператор условия сшивки функции на границе подобластей, представляется в матричном виде, а для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) применяется один из методов в подпространствах Крылова. Поэтому поиск функции из условий сшивки может быть оптимизирован за счет выбора наиболее подходящего метода решения СЛАУ.

Поясним идею метода более подробно. Для решения задачи на интерфейсе, которым в данном случае является сфера, записывается операторное уравнение, следующее из условий сопряжения для искомой функции. Операторы, входящие в данное уравнение, рассматривались в работе [5] для методов декомпозиции, но для замкнутых областей и методов конечных и граничных элементов. Наш подход основан на непосредственной аппроксимации данного уравнения и дает простые выражения для реализации итерационного процесса по подобластям. Его суть заключается в следующем. На интерфейсе вводится сетка, в узлах которой записывается СЛАУ, аппроксимирующая данное операторное уравнение. Элементы матрицы данной системы не известны, но в их вычислении нет необходимости, так как предлагается решать ее каким-либо итерационным методом в подпространствах Крылова [6]. Замечательным свойством методов в подпространствах Крылова является то, что они не требуют обязательного вычисления элементов матрицы СЛАУ, а требуют вычисления лишь действия матрицы на какой-либо вектор. В нашем случае для этого просто необходимо вычислить разности значений функции в узлах сетки по разные стороны от интерфейса. Аналогичный подход, основанный на непосредственной конечно-разностной аппроксимации уравнения Пуанкаре–Стеклова, содержащего производные от искомой функции, развивался в работах [7, 8], но при этом возникала необходимость численного дифференцирования (некорректной операции), чего удается избежать в настоящей работе.

При использовании методов в подпространствах Крылова находятся решения подзадач в подобластях с условием Неймана на сфере. Внутренняя краевая подзадача решается методом конечных объемов [9], для которого условие Неймана является естественным и не требует аппроксимации. Решение внешней второй краевой задачи для сферы хорошо известно и представляет собой интеграл по поверхности сферы от заданной производной по нормали, помноженной на некоторую функцию. Вычисление по этой формуле значений искомой функции вне сферы не представляет затруднений. Проблема возникает при вычислении функции на поверхности сферы, что необходимо в предлагаемом методе, ввиду наличия в этом случае сингулярности в подынтегральном выражении. Идея предложенного численного метода состоит в представлении искомой функции в виде двойного интеграла таким образом, чтобы было возможно вычислить аналитически интеграл от сингулярного множителя во внутреннем интеграле. Внутренний интеграл аппроксимируется квадратурой для произведения двух функций при условии, что интеграл от одной из них может быть вычислен аналитически. При таком способе вычисления во внешнем интеграле возникает только логарифмическая сингулярность, которая учитывается при численном интегрировании путем замены переменных в той части расчетной области, где она присутствует.

Метод иллюстрируется результатами численных экспериментов с различным выбором тестовых функций, вспомогательных сфер и количества узлов во внутренней области и на сфере. На аналитическом решении тестовой задачи для сферы, с граничным условием, являющимся константой, показано, что метод бисопряженных градиентов (BiCGSTAB) для решения СЛАУ на интерфейсе сходится за одну итерацию и дает точное решение. Численное решение другой более сложной задачи показало, что также достаточно одной итерации этого метода для получения решения с неустранимой погрешностью, обусловленной аппроксимацией исходной задачи на вводимых сетках. Отметим, что решение в подобластях находится параллельно, что дает возможность реализации численного метода на многопроцессорных суперЭВМ.

1. Постановка задачи

Пусть требуется решить внешнюю краевую задачу

$$\Delta u(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in G, \tag{1}$$

$$u(\boldsymbol{r}) = g(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in \Gamma, \tag{2}$$

$$\lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty} u(\boldsymbol{r}) = 0$$

в трехмерной открытой области $G = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, где $\bar{D} = D \bigcup \Gamma$ — замкнутая область с кусочно-гладкой границей Γ, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор текущей точки, $g(\boldsymbol{r})$ — заданная непрерывная функция, $u \in C(\bar{G}) \bigcap C^2(G)$, где $\bar{G} = G \bigcup \Gamma$.

Проведем декомпозицию расчетной области. Для этого построим шар S такой, что $\bar{D} \subset S$, с границей γ, являющейся сферой. В результате область G разобьется на две подобласти: ограниченную подобласть $G_+ = S \setminus \bar{D}$ и открытую подобласть $G_- = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}$, где $\bar{S} = S \bigcup \gamma$. Наряду с G_+, G_- будем рассматривать подобласти $\bar{G}_+ = G_+ \bigcup \Gamma \bigcup \gamma$ и $\bar{G}_- = G_- \bigcup \gamma$. Выполняется равенство $G = G_+ \bigcup G_- \bigcup \gamma$.

На границе γ должны выполняться условия сопряжения для искомой функции и ее нормальных производных:

$$u^+ |_\gamma = u^- |_\gamma, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_\gamma = \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_\gamma, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к γ, а знаки $+$ и $-$ указывают на подобласти G_+, G_-. Формула (4) может быть записана также в виде

$$\frac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{n}_+}\Big|_\gamma + \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{n}_-}\Big|_\gamma = 0,$$

где $\boldsymbol{n}_+$ и $\boldsymbol{n}_-$ — внутренняя и внешняя нормаль к сфере γ.

Краевую задачу (1), (2) сведем к решению двух подзадач в подобластях $\bar{G}_+$ и $\bar{G}_-$: внутренней

$$\Delta u^+(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in G_+, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_\gamma = w, \quad u^+ |_\Gamma = g \tag{6}$$

и внешней

$$\Delta u^-(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in G_-, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_\gamma = w, \quad \lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty} u^-(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{8}$$

где $w = w(\boldsymbol{r}_0)$ — след нормальной производной на γ, $\boldsymbol{r}_0 \in \gamma$. Поставим задачу отыскания w. Для этого заметим: если в (6), (8) задать некоторую функцию $w(\boldsymbol{r}_0)$, то условие (4) будет выполняться, а условие (3) нет. Это обстоятельство наводит на мысль использовать (3) как операторное уравнение для нахождения w. Будем искать решения задач (5), (6) и (7), (8), зависящие от неизвестной функции w, при которой выполняется условие (3). В этом случае можно рассматривать решения как функции от w и ввести оператор Φ, действующий на w, такой что

$$\Phi w = u^+(w) |_\gamma - u^-(w) |_\gamma . \tag{9}$$

Тогда искомая функция w, как следует из условия (3), должна удовлетворять уравнению

$$\Phi w = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) является основным в рассматриваемом методе декомпозиции. Можно сказать, что оно отличается от уравнения Пуанкаре–Стеклова, обычно используемого в методах декомпозиции, тем, что содержит операторы, обратные операторам Пуанкаре–Стеклова [10]. Такой выбор не случаен. Он обусловлен следующими соображениями. Во-первых, при решении уравнения (10) нет необходимости прибегать к некорректной операции численного дифференцирования, достаточно вычислить значения искомой функции слева и справа от γ. Во-вторых, для краевых подзадач (5), (6) и (7), (8) с условием Неймана на сфере разработаны эффективные методы решения, на чем мы остановимся позже.

Применим принцип суперпозиции для решения внутренней краевой задачи (5), (6). Согласно ему, решение этой задачи может быть представлено в виде суммы решений следующих задач:

$$u^+(w) = u^0(w) + u^*,$$

где функции u^* и $u^0(w)$ являются решениями уравнений:

$$\Delta u^*(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in G_+, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_\gamma = 0, \quad u^* |_\Gamma = g, \tag{12}$$

$$\Delta u^0(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in G_+, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_\gamma = w, \quad u^0 |_\Gamma = 0. \tag{14}$$

Определим обратные операторы Пуанкаре–Стеклова следующим образом:

$$\mathrm{H}_0 w = u^0 |_\gamma, \quad \mathrm{H}_- w = u^- |_\gamma .$$

Тогда операторное уравнение (10) может быть записано в виде

$$\Phi_0 w = \chi\,, \tag{15}$$

где

$$\Phi_0 w = \mathrm{H}_- w - \mathrm{H}_0 w, \quad \chi = u^* |_\gamma .$$

Рассмотрим свойства оператора Φ_0.

1. Ядро оператора состоит только из нулевого элемента. Для доказательства этого утверждения используем единственность решения задачи (5)–(8). Если в уравнении (15) правая часть равна нулю, то решением задачи (13), (14), (7), (8) является тождественный нуль, а поскольку решение этой задачи единственно, то оператор Φ_0 не имеет нулевого собственного числа.
2. Оператор $\Phi_0 : H^{-1/2}(\gamma) \to H^{1/2}(\gamma)$ — взаимно-однозначный. Если это не так, то существуют такие $w_1 \in H^{-1/2}(\gamma)$ и $w_2 \in H^{-1/2}(\gamma)$, что $\Phi_0 w_1 = \Phi_0 w_2$. Так как операторы H_0, H_-, а значит, и Φ_0, линейны, то отсюда следует, что $\Phi_0(w_1 - w_2) = 0$, откуда $w_1 = w_2$.
3. Так как операторы H_0 и H_- ограничены [13], то оператор Φ_0 также ограничен. Отсюда следует, что множество собственных чисел оператора Φ_0 ограничено.

2. Численный метод решения

Уравнение (15) будем решать численно. Для этого на γ введем сетку $\omega = \{T_i \in \gamma, i = 1, \ldots, n\}$, содержащую n узлов T_i. В узлах данной сетки рассмотрим разности

$$\phi_{h,i} = u^-_{h,i}(\boldsymbol{w}_h) - u^0_{h,i}(\boldsymbol{w}_h), \tag{16}$$

где $\boldsymbol{u}_h$, $\boldsymbol{w}_h$ — приближенные значения функций u, w в узлах сетки. Введем оператор

$$\Phi_{0,h}\boldsymbol{w}_h = \{\phi_{h,i},\ i = 1, \ldots, n\}. \tag{17}$$

Вместо уравнения (15) будем рассматривать систему уравнений

$$\Phi_{0,h}\boldsymbol{w}_h = \boldsymbol{b}, \tag{18}$$

где $\boldsymbol{b} = \{b_i\}$ — приближенные значения функции χ в узлах сетки. Так как $\Phi_{0,h}$ действует в конечномерном пространстве и переводит нуль в себя, то он может быть представлен в матричном виде

$$\Phi_{0,h}\boldsymbol{w}_h = A\boldsymbol{w}_h, \tag{19}$$

где $A = \{a_{i,j}\}$ — вещественная матрица размера $n \times n$, а $\boldsymbol{w}_h = \{w_{h,i}\}$ — вектор размерности n. Тогда систему уравнений (18) можно записать как систему линейных алгебраических уравнений

$$A\boldsymbol{w}_h = \boldsymbol{b}. \tag{20}$$

Все величины, входящие в (20), неизвестны. Для вычисления вектора $\boldsymbol{b}$ численно решим краевую задачу (11), (12). Ее решение χ_h в узлах сетки ω на сфере γ и будет вектором $\boldsymbol{b}$. Вычислять элементы $a_{i,j}$ матрицы A нет необходимости, так как для решения уравнения (20) будем применять методы в подпространствах Крылова, которые в общем виде можно записать как

$$\boldsymbol{w}_h^{k+1} = \Lambda\big(\boldsymbol{w}_h^k, A\boldsymbol{p}^k\big), \tag{21}$$

где $k = 0, 1, \ldots$ — номер итерации; Λ — функция, определяющая конкретный метод, например метод сопряженных градиентов, метод сопряженных невязок, метод обобщенных минимальных невязок (GMRES); $\boldsymbol{p}$ — вспомогательный вектор, определяемый выбором конкретного метода решения. Методы (21) не требуют знания элементов матрицы A, а требуют знания лишь результата действия $A\boldsymbol{p}$-матрицы на вектор, который можно вычислить следующим образом. Присвоим w значение p в уравнениях, аппроксимирующих условия (6) и (8), и решим краевые подзадачи в подобластях. Вычислим разности вида (16), т. е. найдем $\Phi_{0,h}\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{p}$.

При проведении процесса (21) на каждой k-й итерации решаются подзадачи в подобластях с очередным значением $\boldsymbol{w}_h^k$ на интерфейсе, поэтому он называется итерационным процессом по подобластям.

Внутренняя краевая задача решается методом конечных объемов [9]. При этом уравнение Лапласа (5) заменяется фактически законом Гаусса

$$\int\limits_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, d\sigma = 0, \tag{22}$$

где σ — любая замкнутая поверхность в G_+. Уравнение (22) аппроксимируется со вторым порядком на множестве конечных объемов, на которые разбивается подобласть G_+, в результате чего уравнение (22) с граничными условиями (6) заменяется системой конечно-разностных уравнений. Из вида (22) следует, что условие Неймана при аппроксимации в приграничных конечных объемах, которые содержат куски границы γ ($\sigma \cap \gamma \neq 0$), учитывается точно.

Приведем основные технологические этапы предлагаемого метода.

1. Задается начальное $\boldsymbol{w}_h^0$ для правой части в условии Неймана на сфере (интерфейсе).
2. Решаются краевые подзадачи (внутренняя и внешняя) в подобластях, в результате чего определяются значения искомой функции по разные стороны интерфейса.
3. Вычисляются разности вида (16) этих значений в узлах сетки на интерфейсе.
4. Используя эти разности в итерационном методе вида (21), находится очередное $\boldsymbol{w}_h^{k+1}$ правой части условия Неймана.
5. Если сходимость итерационного процесса достигнута, то находится окончательное решение подзадач в подобластях, если же это не так, то повторяются пункты 2–4.

3. Решение внешней краевой задачи на сфере

Внешняя задача Неймана заключается в нахождении функции u, $u \in C^1(\bar{G}_-) \cap C^2(G_-)$, равномерно стремящейся к нулю на бесконечности, удовлетворяющей решению уравнения

$$\Delta u(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in G_-,$$

и краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\gamma} = w(M), \quad w \in C(\gamma).$$

Если область $\bar{S}$ является шаром радиуса R, то решение задачи Неймана в сферической системе координат может быть представлено в явном виде как интеграл от нормальной производной [11]:

$$u(M_0) = \frac{R^2}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \int\limits_0^{2\pi} w(M) \left[\frac{2}{\rho} - \frac{1}{R} \ln \frac{R + \rho - r\cos\psi}{r(1-\cos\psi)}\right] d\varphi\, d\theta, \tag{23}$$

где $M_0 = (r, \theta_0, \varphi_0) \in \bar{G}_-$, $M = (R, \theta, \varphi) \in \gamma$; ρ — расстояние между точками M_0 и M, $\rho = |M - M_0| = \sqrt{R^2 - 2Rr\cos\psi + r^2}$; ψ — угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_0}$, $\cos\psi = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$.

Для точек $M_0 \in G_-$ вычисление интеграла (23) не представляет затруднений, и для достижения необходимой точности расчетов достаточно выбрать надлежащие квадратуры и необходимое число узлов в сеточной области решения. Однако, если $M_0 \in \gamma$, то в подынтегральном выражении в (23) появляется сингулярность, что приводит к необходимости применения квадратур специального вида.

Зададим на отрезках $[0, 2\pi]$ и $[0, \pi]$ равномерные сетки с узлами φ_i, θ_j:

$$\varphi_i = ih_\varphi, \quad h_\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi - 1}, \qquad \theta_j = jh_\theta, \quad h_\theta = \frac{\pi}{N_\theta - 1},$$

$$i = 1, \ldots, N_\varphi, \quad j = 1, \ldots, N_\theta,$$

а также смещенную сетку с узлами $\varphi_{i+1/2} = \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2}$, $\theta_{j+1/2} = \frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2}$. Пусть значения нормальной производной заданы на смещенной сетке.

3.1. Интегрирование по координате φ

Запишем внутренний интеграл в (23) в виде

$$I_\varphi = \frac{1}{R} \int\limits_0^{2\pi} P(M, M_0) \frac{1}{\rho}\, d\varphi, \tag{24}$$

где $P(M, M_0) = w(M)\left[2R - \rho\ln\frac{R + \rho - r\cos\psi}{r(1-\cos\psi)}\right]$. Функция $P(M, M_0)$ особенностей не имеет, а функция ρ обращается в 0 при $M = M_0$. Найдем интеграл от сингулярной части интегранда в (24) по отрезку $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$.

Известно [12], что

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{a - b\cos\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\, F(\delta_\varphi, \mu) \quad \text{при} \quad a > b > 0, \;\; 0 \le \varphi \le \pi, \tag{25}$$

где $\mu = \sqrt{\dfrac{2b}{a+b}}$, $\delta_\varphi = \arcsin\sqrt{\dfrac{(a+b)(1-\cos\varphi)}{2(a-b\cos\varphi)}}$, а функция F — эллиптический интеграл 1-го рода.

Искомый интеграл равен:

$$\int\limits_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{1}{\rho}\, d\varphi = \int\limits_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a - b\cos(\varphi - \varphi_0)}} = V(\varphi_i, \varphi_{i+1}, \theta, M_0),$$

где $a = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta\cos\theta_0$, $b = 2Rr\sin\theta\sin\theta_0$. Для его нахождения произведем замену переменной $\varphi' = \varphi - \varphi_0$. В этом случае ввиду того, что $\dfrac{h_\varphi}{2} \le \varphi_0 \le 2\pi - \dfrac{h_\varphi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, новая переменная φ' будет изменяться на отрезке $-2\pi + \dfrac{h_\varphi}{2} \le \varphi' \le 2\pi - \dfrac{h_\varphi}{2}$. Таким образом, формулу (25) необходимо обобщить для более широкого интервала изменения переменной φ'. Нетрудно показать, что в случае вычисления определенного интеграла такое обобщение имеет вид

$$\int\limits_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{1}{\rho}\, d\varphi$$
$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}} \begin{cases} F(\delta_{\varphi_{i+1}}, \mu) + F(\delta_{\varphi_i}, \mu) \quad \text{при} \quad \varphi_i < 0, \;\; \varphi_{i+1} > 0, \\ \left|2F(\pi/2, \mu) - F(\delta_{\varphi_{i+1}}, \mu) - F(\delta_{\varphi_i}, \mu)\right| \quad \text{при} \quad \varphi_i < \pm\pi, \;\; \varphi_{i+1} \ge \pm\pi, \\ \left|F(\delta_{\varphi_{i+1}}, \mu) - F(\delta_{\varphi_i}, \mu)\right| \quad \text{для других интервалов} \quad [\varphi_i, \varphi_{i+1}]\,. \end{cases}$$

Тогда квадратурная формула, аппроксимирующая интеграл (24), имеет вид

$$I_\varphi \approx \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{N_\varphi - 1} P\big(\varphi_{i+1/2}, \theta, M_0\big) V\big(\varphi_i, \varphi_{i+1}, \theta, M_0\big). \tag{26}$$

3.2. Интегрирование по координате θ

Эллиптический интеграл $F(\delta, \mu)$, входящий в квадратурную формулу (26), имеет логарифмическую особенность при $\mu = 1$, $\delta = \pi/2$. Это условие выполняется при $a = b$. Если точка M_0 расположена на поверхности, то отсюда следует, что $\theta = \theta_0$. Следовательно, квадратурная формула прямоугольников является неприемлемой при численном интегрировании внешнего интеграла в (23) в окрестности точки θ_0. Формула трапеций также не может быть использована, поскольку значения нормальной производной заданы на смещенной сетке. В этом случае предлагается выделять интервал в окрестности точки θ_0, на котором производить интегрирование с заменой переменной.

Рассмотрим интервал $[\theta_j, \theta_{j+1}]$ с центром в точке $\theta_0 = \theta_{j+1/2}$. На каждом таком интервале будем аппроксимировать нормальную производную кусочно-постоянной функцией

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_\gamma (\theta, \varphi) = w(\theta_{j+1/2}, \varphi) \quad \text{при} \quad \theta \in [\theta_j, \theta_{j+1}]. \tag{27}$$

Обозначим $f(\theta) = I_\varphi \sin\theta$ и введем замену переменных: $t^2 = \theta_0 - \theta$ при $\theta \in [\theta_j, \theta_0]$, $t^2 = \theta - \theta_0$ при $\theta \in [\theta_0, \theta_{j+1}]$. Тогда

$$\int\limits_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} f(\theta)\, d\theta = \int\limits_{\theta_j}^{\theta_0} f(\theta)\, d\theta + \int\limits_{\theta_0}^{\theta_{j+1}} f(\theta)\, d\theta = 2 \int\limits_{0}^{\sqrt{h_\theta/2}} \big[f(\theta_0 + t^2) + f(\theta_0 - t^2)\big]\, t\, dt. \tag{28}$$

Функции, входящие в подынтегральное выражение в (28), ввиду (27), имеют аналитический вид, и поэтому их значения доступны в произвольных точках интервала $[\,0, \sqrt{h_\theta/2}\,]$. Кроме того, поскольку функция $f(\theta)$ имеет в точке θ_0 лишь логарифмическую особенность, то подынтегральное выражение в (28) особенностей не имеет.

4. Оценка числа арифметических операций

В экспериментальной части настоящей работы в качестве конкретного метода вида (21) используется стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGSTAB), реализуемый по формулам:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{w}_h^0, && \boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{r}^0, \\
&\alpha_k = \frac{\big(\boldsymbol{r}^k, \boldsymbol{r}^0\big)}{\big(A\boldsymbol{p}^k, \boldsymbol{r}^0\big)}, && \boldsymbol{s}^k = \boldsymbol{r}^k - \alpha_k A\boldsymbol{p}^k, \\
&\omega_k = \frac{\big(A\boldsymbol{s}^k, \boldsymbol{s}^k\big)}{\big(A\boldsymbol{s}^k, A\boldsymbol{s}^k\big)}, && \boldsymbol{u}_h^{k+1} = \boldsymbol{u}_h^k + \alpha_k \boldsymbol{p}^k + \omega_k \boldsymbol{s}^k, \qquad \boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{s}^k - \omega_k A\boldsymbol{s}^k, \\
&\beta_k = \frac{\alpha_k\big(\boldsymbol{r}^{k+1}, \boldsymbol{r}^0\big)}{\omega_k\big(\boldsymbol{r}^k, \boldsymbol{r}^0\big)}, && \boldsymbol{p}^{k+1} = \boldsymbol{r}^{k+1} + \beta_k\big(\boldsymbol{p}^k - \omega_k A\boldsymbol{p}^k\big), \\
& && k = 0, 1, \ldots .
\end{aligned} \tag{29}$$

Число арифметических операций Q, необходимое для решения рассматриваемой задачи (1), (2), в целом можно выразить как

$$Q = \big(Q_1 + Q_2 + Q_3\big)K, \tag{30}$$

где Q_1 — количество операций по реализации внешнего итерационного процесса (29) на одной внешней итерации, Q_2 и Q_3 — количество операций по решению внутренней и внешней подзадач на одной внешней итерации соответственно, K — число внешних итераций.

Для оценки Q_1 заметим следующее. Наибольший объем вычислений в (29) приходится на вычисление произведения матрицы на вектор. Для этого требуется в общем случае $2n^2$ операций умножения и сложения, где n — количество узлов сетки ω на сфере γ. Наш подход позволяет значительно (на порядок) уменьшить это число. Действительно, рассмотрим произведение $A\boldsymbol{p}^k$. Зададим на интерфейсе в качестве граничного условия $\boldsymbol{p}^k$ и решим внутреннюю (13), (14) и внешнюю (7), (8) краевые подзадачи с данным граничным условием в подобластях G_+ и G_-. Так как $A\boldsymbol{p}^k = \Phi_{0,h}\boldsymbol{p}^k$, то для вычисления искомого произведения надо вычислить $\Phi_{0,h}\boldsymbol{p}^k$, которое, согласно (16), (17), равно разности значений функции на интерфейсе в подобластях G_+ и G_-, что выполняется за n сложений. Вектор $\boldsymbol{b}$ вычисляется один раз до проведения итераций. В итоге для вычисления $A\boldsymbol{p}^k$ вместо $2n^2$ операций умножения и сложения в нашем подходе мы будем иметь $2n$ сложений. Аналогично поступаем и в случае вычисления $A\boldsymbol{s}^k$. Таким образом, из приведенных выше рассуждений следует, что $Q_1 = O(n)$. Из пункта 3 вытекает, что число операций по решению внешней краевой подзадачи оценивается как $Q_3 = O(n^2)$.

Относительно решения внутренней краевой подзадачи заметим следующее. Во-первых, метод конечных объемов и решение возникающей при этом системы сеточных уравнений хорошо изучены (см., например, [9]). Для выполнения наиболее трудоемкой процедуры решения системы сеточных уравнений разработаны оптимальные итерационные алгоритмы, которые требуют $Q_2 = O(N)$ операций, где N — число узлов сетки, на которой аппроксимируется внутренняя подзадача. Таким образом, согласно (30), общее число итераций будет $Q = (O(n^2) + O(N))K$. Во-вторых, положительной стороной проведения итераций в подобластях является то, что на каждой внешней k-й итерации для внутреннего итерационного процесса берется приближение с $(k-1)$-й итерации. Это обстоятельство значительно уменьшает количество внутренних итераций, необходимых для достижения заданной точности.

Значительным средством уменьшения времени счета является то, что решение внутренней и внешней подзадач могут проводиться параллельно на каждой итерации сшивки решений, что дает возможность эффективной реализации предлагаемого подхода на многопроцессорных суперЭВМ. Разумеется, как внутренняя, так и внешняя подзадачи могут подвергаться дополнительной декомпозиции для распараллеливания по многим процессорам с целью сокращения времени счета и балансировки загрузки процессоров.

5. Решение модельных задач

5.1. Задача 1

Рассмотрим внешнюю краевую задачу на сфере Γ радиуса R_0:

$$\begin{aligned} &\Delta u(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \in G, \\ &u(\boldsymbol{r}) = g, \quad \boldsymbol{r} \in \Gamma, \quad \lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty} u(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \text{где } g = \text{const}, \end{aligned} \tag{31}$$

имеющую аналитическое решение

$$u(r) = \frac{gR_0}{r}.$$

Декомпозиция расчетной области на внутреннюю и внешнюю подобласти проводилась сферой радиуса $R > R_0$. Аналитическое решение внутренней краевой задачи (5), (6) при $w = \text{const}$ будет

$$u^+ = g + wR^2\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r}\right), \tag{32}$$

а внешней краевой задачи (7), (8) —

$$u^- = -\frac{wR^2}{r}.$$

Из условия $u^+(R) = u^-(R)$ найдем, что на точном решении задачи (31) должно выполняться условие

$$w = -\frac{gR_0}{R^2}. \tag{33}$$

Из (32) следует, что $\chi = g = \text{const}$. Применим в качестве конкретного итерационного процесса вида (21) для решения уравнения (20) метод BiCGSTAB (29) и выберем $\boldsymbol{w}_h^0 = 0$. Тогда вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{r}^0$ и $\boldsymbol{p}^0$ имеют компоненты, равные g, а вектор $A\boldsymbol{p}^0$ — компоненты, равные $-\frac{gR^2}{R_0}$; $\alpha_0 = -\frac{R_0}{R^2}$ и $\boldsymbol{s}^0 = 0$.

Заметим, что в методе BiCGSTAB параметр ω_k является достаточно произвольным и выбирается из условия минимума евклидовой нормы вектора $\boldsymbol{s}^k$. Если $\boldsymbol{s}^k = 0$, то при любом выборе ω_k в (29) имеем $\boldsymbol{u}_h^{k+1} = \boldsymbol{u}_h^k + \alpha_k \boldsymbol{p}^k$. Тогда в рассматриваемой задаче $\boldsymbol{w}_h^1 = \boldsymbol{w}_h^0 + \alpha_0 \boldsymbol{p}^0$ и компоненты вектора $\boldsymbol{w}_h^1$ равны $-\frac{gR_0}{R^2}$, что совпадает с (33), т.е. $\boldsymbol{w}_h^1$ является точным решением исходной задачи (31). Таким образом, метод BiCGSTAB для решения поставленной задачи, как и следовало ожидать, сходится за одну итерацию. Этот факт подтверждается результатами численных экспериментов, которые проводились для решения задачи (31) в трехмерной постановке.

5.2. Задача 2

Рассмотрим более сложную трехмерную внешнюю краевую задачу на кубе, на котором поставим граничные условия, соответствующие аналитическому решению

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{\sin(\theta_1)\cos(\varphi_1)}{r_1^2} + \frac{\sin^2(\theta)\cos(2\varphi)}{r^3},$$

где новые переменные r_1, θ_1, φ_1 соответствуют исходным переменным со сдвинутым на величину x_0 центром по оси x в декартовой системе координат, т.е. $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y$, $z_1 = z$. Нетрудно получить, что новые переменные в сферических координатах будут выражены через исходные переменные в этих же координатах по формулам:

$$r_1 = \sqrt{r^2 - 2rx_0 \sin\theta\cos\varphi + x_0^2}, \qquad \theta_1 = \arccos\left(\frac{r\cos\theta}{r_1}\right), \qquad \mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r\sin\theta\cos\varphi - x_0}.$$

В расчетах в качестве исходной области $\bar{D}$ брался куб с ребром $a = 2$, константа $x_0 = 0.1$. Декомпозиция внешней расчетной области на подобласти G_+ и G_- проводилась сферами разных радиусов: $R = 3$ и $R = 6$. Внутренняя краевая задача решалась на неструктурированных тетраэдральных сетках Ω_h^+, которые строились известным сеточным генератором NetGen [14]. Были использованы сетки Ω_h^+ трех видов: грубая, средняя и подробная, которые имели для сфер каждого радиуса число узлов 13980, 114723, 926237 соответственно, с шагами, отличающимися в два раза для соседних сеток. Уравнение (15) решалось в узлах сетки ω, состоящей из узлов сетки Ω_h^+, лежащих на сфере γ. Для численного решения внешней краевой задачи по алгоритмам, описанным в п. 4, строилась равномерная по φ, θ сетка ω_I, в узлы которой проводилась интерполяция текущих приближенных значений нормальной производной из узлов сетки ω со вторым порядком точности.

Внешний итерационный процесс, проводимый по методу BiCGSTAB (29), давал за одну итерацию погрешности ε решения исходной задачи, приведенные в таблице 1, которые рассчитывались по формуле $\varepsilon = \max_{\Omega_h^+} |\boldsymbol{u}_h - (u)_h|$, где $\boldsymbol{u}_h$ — приближенное решение, а $(u)_h$ — точное решение в узлах сетки. Дальнейшее проведение итераций (29) не увеличивало точности решения задачи в целом, что объясняется наличием погрешности аппроксимации уравнения (15) системой линейных алгебраических уравнений (20). Для подтверждения этого предположения были проведены численные эксперименты с точным значением производной на интерфейсе. Полученный результат практически совпал с данными табл. 1.

Таблица 1. Погрешность ε численного решения в задаче 2 для разных радиусов вспомогательных сфер и разных сеток Ω_h^+

Радиусы	Грубая сетка	Средняя сетка	Подробная сетка
$R = 3$	0.02096	0.00842	0.00488
$R = 6$	0.04853	0.02372	0.01659

Из данной таблицы следует, что, во-первых, погрешность линейно убывает с уменьшением шага сетки, во-вторых, увеличение радиуса вспомогательной сферы приводит к увеличению погрешности, так как при этом возрастают шаги сетки (для сохранения погрешности требуется большее число узлов сетки Ω_h^+).

В табл. 2 приведены значения погрешностей ε для сеток ω_I с разным числом узлов на интерфейсе $N_\theta \times N_\varphi$ и для разных сеток Ω_h^+, полученные для вспомогательной сферы радиуса $R = 3$.

Таблица 2. Погрешность ε для разных сеток ω_I и Ω_h^+

Виды сетки Ω_h^+	$N_\theta \times N_\varphi$			
	16×16	32×32	64×64	128×128
Грубая сетка	0.02091	0.02089	0.02096	0.02099
Средняя сетка	0.00844	0.00840	0.00842	0.00813
Подробная сетка	0.01088	0.00557	0.00488	0.00481

Из табл. 2 следует, что погрешность решения задачи в целом определяется погрешностью решения внутренней задачи, несмотря на то, что формально численный метод решения внешней краевой задачи (7), (8) имеет только первый порядок аппроксимации.

Заметим, что сходимость метода в конечномерной постановке задачи существенным образом зависит от спектральных свойств матрицы этого метода. По этой причине в табл. 3 приведены приближенные значения минимального $\lambda_{\min}$ и максимального $\lambda_{\max}$ собственных чисел матрицы A из уравнения (20) задачи 2 для разных сеток, полученные использованием степенного метода с применением нормировки на каждой итерации этого метода [15]. В численных экспериментах $N_\theta = N_\varphi$.

Таблица 3. Минимальное $\lambda_{\min}$ и максимальное $\lambda_{\max}$ собственные числа матрицы A в зависимости от вида сетки Ω_h^+

Виды сетки Ω_h^+	$\lambda_{\min}$	$\lambda_{\max}$
Грубая сетка: $N_\theta = 16$	0.0273	6.7871
Средняя сетка: $N_\theta = 32$	0.0180	6.8072
Подробная сетка: $N_\theta = 64$	0.0089	6.8123

Результаты таблицы демонстрируют незначительное увеличение границ спектра с его обоих концов при переходе от менее подробной к более подробной сетке. Как показали численные эксперименты, увеличение или уменьшение количества узлов сетки ω_I не приводит к значимому изменению границ спектра матрицы.

Проведем сравнение наших результатов с тестовой задачей из [4]. Там для сетки примерно с 26000 узлами точность решения составляет 0.00084. На нашей сетке примерно с 926000 узлами точность составляет 0.0048. Геометрия в наших численных расчетах и в работе [4] близки. Разница в том, что в [4] эта геометрия существенно используется при построении сетки, а у нас нет. В [4] предполагалось, что, во-первых, внутренняя граница разбивается на части одинаковой площади, во-вторых, существует взаимно-однозначное отображение между точками внутренней границы и точками внешней сферы. Учет этих допущений позволил построить достаточно простую сетку для решения внутренней задачи, в которой узлы на обеих поверхностях являются одновременно узлами конечных элементов. При численном решении нашей задачи мы предполагали, что внутренняя поверхность является достаточно произвольной и не допускали использования ее конкретных свойств для построения сетки. По этой причине при реализации численного метода мы использовали пакет NETGEN для построения сетки внутри области. Кроме того, узлы сетки не принадлежали узлам сетки, построенной пакетом NETGEN, в результате чего пришлось воспользоваться интерполяцией в узлы этой сетки. Разница в качестве сетки определяет и разницу в точности решения конечномерной задачи.

В целом, результаты численных экспериментов, представленные в таблицах, иллюстрируют возможность и эффективность применения предложенного метода решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа.

6. Заключение

Для решения трехмерной внешней краевой задачи для уравнения Лапласа предложен новый метод, основанный на декомпозиции области, суть которого состоит в следующем. Расчетная область разбивается сферой на внутреннюю и внешнюю подобласти, сопрягаемые без пересечения. На сфере вводится специальное операторное уравнение, следующее из условий сопряжения для искомой функции. Данное уравнение на сетке, построенной на сфере, аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений, которая решается итерационными методами в подпространствах Крылова. Решение внутренней краевой задачи проводится методами конечных объемов, а внешней – численно-аналитическим интегральным методом с выделением особенности в подынтегральном выражении. От известных вариантов метода декомпозиции для решения рассматриваемой задачи предлагаемый подход отличается тем, что на границе сопряжения производится непосредственная аппроксимация операторного уравнения. Использование итераций только при решении СЛАУ дает возможность применить для решения задачи в конечномерной постановке хорошо изученные быстросходящиеся методы решения СЛАУ в подпространствах Крылова. В настоящей работе этот метод предложен впервые, и по этой причине некоторые вопросы, связанные с его численной реализацией, требуют дальнейших исследований. В частности, это вопрос о числе обусловленности матрицы метода и его зависимости от шага сетки.

Отметим, что рассматриваемый подход может служить основой для создания масштабируемых параллельных алгоритмов для проведения расчетов на современных многопроцессорных суперЭВМ. Он имеет общий характер, а основная идея метода, заключающаяся в замене итерационного метода решения дифференциальной задачи на непосредственную аппроксимацию операторного уравнения на интерфейсе, с последующим решением полученной системы линейных алгебраических уравнений в подпространствах Крылова, может быть использована для решения других краевых задач математической физики.

Литература

1. **Quarteroni A., Valli A.** Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. — Oxford: Clarendon Press, 1999.
2. **Dolean V., Jolivet P., and Nataf F.** An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory and Parallel Implementation. — Philadelphia, USA: SIAM, 2015.
3. **Савченко А.О., Ильин В.П., Бутюгин Д.С.** Метод решения внешней трехмерной краевой задачи для уравнения Лапласа // Сиб. журн. индустр. математики. — 2016. — Т. 19, № 2(66). — С. 88–99; Перевод: Savchenko A.O., Il'in V.P., Butyugin D.S. A method of solving an exterior three-dimensional boundary value problem for the Laplace equation // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2016. — Vol. 10, № 2. — P. 41–53.
4. **De-hao Yu., Ji-ming Wu.** A nonoverlapping domain decomposition method for exterior 3-D problem // J. of Comput. Mathematics. — 2001. — Vol. 19, № 1. — P. 77–86.
5. **Langer U., Steinbach O.** Coupled finite and boundary element domain decomposition methods // Boundary Element Analysis. Mathematical Aspects and Applications / M. Schanz, O. Steinbach. — Heidelberg: Springer, 2006. — P. 61–95.
6. **Ильин В.П.** Методы и технологии конечных элементов. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2007.
7. **Свешников В.М.** Построение прямых и итерационных методов декомпозиции // Сиб. журн. индустр. математики. — 2009. — Т. 12, № 3(39). — С. 99–109; Перевод: Sveshnikov V.M. Construction of direct and iterative decomposition methods // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2010. — Vol. 4, № 3. — P. 431–440.
8. **Корнеев В.Д., Свешников В.М.** Параллельные алгоритмы и технологии декомпозиции расчетной области для решения трехмерных краевых задач на квазиструктурированных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 2. — С. 183–194; Перевод: Korneev V.D., Sveshnikov V.M. Parallel algorithms and domain decomposition techniques for solving three-dimensional boundary value problems on quasi-structured grids // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 2. — P. 141–149.
9. **Ильин В.П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2001.
10. **Лебедев В.И., Агошков В.И.** Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. — М.: ОВМ АН СССР, 1983.
11. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
12. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
13. **Лебедев В.И.** Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: Физматлит, 2005.
14. http://sourceforge.net/projects/netgen-mesher/.
15. **Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматлит, 1963.

Поступила в редакцию 15 июня 2016 г.,
в окончательном варианте 11 мая 2018 г.

Литература в транслитерации

1. **Quarteroni A., Valli A.** Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. — Oxford: Clarendon Press, 1999.

2. **Dolean V., Jolivet P., and Nataf F.** An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory and Parallel Implementation. — Philadelphia, USA: SIAM, 2015.
3. **Savchenko A.O., Il'in V.P., Butyugin D.S.** Metod resheniya vneshney trekhmernoy kraevoy zadachi dlya uravneniya Laplasa // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2016. — T. 19, № 2(66). — S. 88–99; Perevod: Savchenko A.O., Il'in V.P., Butyugin D.S. A method of solving an exterior three-dimensional boundary value problem for the Laplace equation // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2016. — Vol. 10, № 2. — P. 41–53.
4. **De-hao Yu., Ji-ming Wu.** A nonoverlapping domain decomposition method for exterior 3-D problem // J. of Comput. Mathematics. — 2001. — Vol. 19, № 1. — P. 77–86.
5. **Langer U., Steinbach O.** Coupled finite and boundary element domain decomposition methods // Boundary Element Analysis. Mathematical Aspects and Applications / M. Schanz, O. Steinbach. — Heidelberg: Springer, 2006. — P. 61–95.
6. **Il'in V.P.** Metody i tekhnologii konechnyh elementov. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2007.
7. **Sveshnikov V.M.** Postroenie pryamyh i iteracionnyh metodov dekompozicii // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2009. — T. 12, № 3(39). — S. 99–109; Perevod: Sveshnikov V.M. Construction of direct and iterative decomposition methods // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2010. — Vol. 4, № 3. — P. 431–440.
8. **Korneev V.D., Sveshnikov V.M.** Parallel'nye algoritmy i tekhnologii dekompozicii raschetnoy oblasti dlya resheniya trekhmernyh kraevyh zadach na kvazistrukturirovannyh setkah // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2016. — T. 19, № 2. — S. 183–194; Perevod: Korneev V.D., Sveshnikov V.M. Parallel algorithms and domain decomposition techniques for solving three-dimensional boundary value problems on quasi-structured grids // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 2 — P. 141–149.
9. **Il'in V.P.** Metody konechnyh raznostey i konechnyh ob"emov dlya ellipticheskih uravneniy. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2001.
10. **Lebedev V.I., Agoshkov V.I.** Operatory Puankare–Steklova i ih prilozheniya v analize. — M.: OVM AN SSSR, 1983.
11. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** Uravneniya v chastnyh proizvodnyh matematicheskoy fiziki. — M.: Vysshaya shkola, 1970.
12. **Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.** Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy. — M.: Fizmatgiz, 1963.
13. **Lebedev V.I.** Funkcional'nyy analiz i vychislitel'naya matematika. — M.: Fizmatlit, 2005.
14. http://sourceforge.net/projects/netgen-mesher/.
15. **Faddeev D.K., Faddeeva V.N.** Vychislitel'nye metody lineynoy algebry. — M.: Fizmatlit, 1963.