

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ СВЯЗНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА БАЛОК ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

А. А. Мовчан

Московский государственный авиационный институт, 125871 Москва

Исследуются эффекты связности краевых задач, проявляющиеся для тех сплавов с памятью формы, у которых фазовый состав зависит от действующих напряжений, а упругие модули меняются с изменением доли мартенситной фазы. Приведены алгоритмы и результаты решения ряда задач изгиба балок. Установлено, что в связных задачах процессы изменения напряженно-деформированного состояния при охлаждении происходят более плавно, чем в несвязных, что определяется необходимостью движения по сечению фронта начала преобразования. Обнаружено явление перегрузки внешних и разгрузки внутренних слоев балки, что связано с прохождением фронта завершения преобразования.

Уникальные механические свойства сплавов с памятью формы [1–3] описаны с помощью микромеханической системы определяющих уравнений [4–6]. В [7, 8] предложен аналитический метод решения несвязных краевых задач для сплавов, фазовый состав которых не зависит от действующих напряжений, а упругие модули постоянны. Эти условия, однако, не выполняются для таких широко используемых сплавов с памятью формы, как никелид титана [9] и сплавы на основе меди [10, 11]. Для этих материалов доля мартенситной фазы не может быть вычислена до решения задачи, которая, таким образом, становится связной. Данная работа посвящена исследованию эффектов такого типа связности на примере задач изгиба балок.

1. Формулировка задачи. Одномерный вариант определяющих уравнений для сплавов с памятью формы [4–6] имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon^1 + \varepsilon^2, \quad \varepsilon^1 = \sigma/E, \quad E = E_1 q + E_2(1 - q); \quad (1.1)$$

$$d\varepsilon^2 = (B + a_0 \varepsilon^2) dq; \quad (1.2)$$

$$q = \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{M_1 + k|\sigma| - T}{M_1 - M_2} \right), \quad B = \frac{2}{3} c_0 \sigma \quad (1.3)$$

при

$$M_2 + k|\sigma| < T < M_1 + k|\sigma|, \quad k \operatorname{sign}(\sigma) d\sigma > dT; \quad (1.4)$$

$$q = \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{T - A_1 - k|\sigma|}{A_2 - A_1} \right), \quad B = \frac{2}{3} \lambda c_0 \sigma(q)|_{\dot{q}>0} + (1 - \lambda) \frac{a_0 \varepsilon^*}{\exp(a_0 q_1) - 1} \quad (1.5)$$

при

$$A_1 + k|\sigma| < T < A_2 + k|\sigma|, \quad k \operatorname{sign}(\sigma) d\sigma < dT. \quad (1.6)$$

Здесь q — доля мартенситной фазы в объеме материала; ε , ε^1 , ε^2 — полная, упругая и фазовая деформации (температурная деформация, как и объемный эффект реакции фазового превращения, в задачах изгиба не учитывается); T — температура; σ — продольное нормальное напряжение (поперечными касательными напряжениями в определяющих уравнениях пренебрегаем); M_1 , M_2 и A_1 , A_2 — температуры начала и конца реакции прямого и обратного термоупругого превращения в свободном от напряжений материале; c_0 ,

a_0, λ, k — параметры материала; E_1 и E_2 — модуль Юнга для мартенситного и аустенитного состояний; (1.4) — условия прямого ($\dot{q} > 0$) превращения, а (1.6) — обратного ($\dot{q} < 0$); величина $\sigma(q)|_{\dot{q}>0}$ для точки участка обратного превращения, соответствующей значению доли мартенситной фазы q , — напряжение в точке предшествующего участка прямого превращения, характеризуемой тем же значением q . Уравнение (1.2) для фазовой деформации на каждом этапе прямого или обратного превращения интегрируется при начальном условии $\varepsilon^2|_{q=q_1} = \varepsilon^*$, где q_1, ε^* — значения q и ε^2 , достигнутые в последней точке предшествующего этапа.

К определяющим уравнениям добавляется соотношение гипотезы плоских сечений

$$\varepsilon^1 + \varepsilon^2 = \beta(T, x)z \quad (1.7)$$

и уравнение равновесия

$$2 \int_0^h b(z)\sigma z dz = M. \quad (1.8)$$

Здесь $\beta(T, x)$ — кривизна балки; x и z — координаты вдоль нейтральной оси и по высоте сечения; $b(z)$ и h — ширина и высота сечения; M — изгибающий момент. Соотношений (1.1)–(1.8) достаточно для нахождения зависимости кривизны β от момента M . Для определения прогиба W в случае малых прогибов используются соотношение

$$\beta = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (1.9)$$

и соответствующие граничные условия.

Если в (1.3)–(1.6) положить $k = 0$, то задача становится несвязной. В этом случае при равномерном распределении температуры по сечению q не зависит от z ; из (1.1), (1.2), (1.7) следует, что как фазовые деформации, так и напряжения пропорциональны z . Поэтому в несвязных задачах напряжения в сечении однозначно определяются значением изгибающего момента и не зависят от температуры и фазового состава; при одинаковых моментах напряжения в упругой балке и в балке из сплава с памятью формы совпадают.

2. Релаксация напряжений в балке с фиксированной кривизной. Пусть балка, находящейся в аустенитном состоянии, сообщается кривизна β , после чего начинается охлаждение через интервал температур прямого мартенситного превращения при $\beta = \text{const}$ (т. е. балка как бы «намотана» на круглый барабан). Вследствие прямого превращения фазовые деформации будут развиваться в сторону действующего напряжения, которое в результате релаксирует. Легко видеть, что, согласно (1.4), прямое превращение начнется при

$$T = T^0 = kE_2\beta h + M_1. \quad (2.1)$$

При $M_1 < T < T^0$ сечение балки состоит из упругого ядра $0 < |z| < z_0 = (T - M_1)/(kE_2\beta)$ и зоны превращения $z_0 < |z| \leq h$. Для нахождения решения в зоне превращения напряжение σ выражается через упругую деформацию с помощью (1.1), которая, в свою очередь, выражается через кривизну и фазовую деформацию с помощью (1.7):

$$\sigma = E(q)(\beta z - \varepsilon^2). \quad (2.2)$$

Подстановка (2.2) в (1.2) дает дифференциальное уравнение для фазовой деформации:

$$\frac{d\varepsilon^2}{dq} + \left(\frac{2}{3}c_0E(q) - a_0\right)\varepsilon^2 = \frac{2}{3}c_0E(q)\beta z. \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\varepsilon^2 = \beta z[1 - f(q) + a_0f(q)F(q)]. \quad (2.4)$$

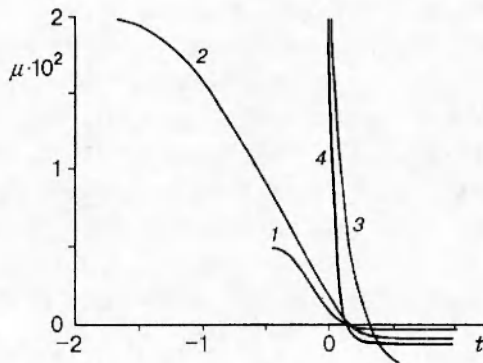


Рис. 1

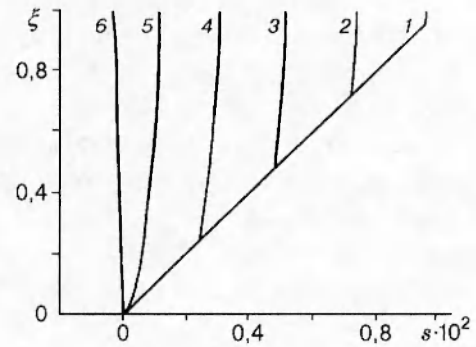


Рис. 2

Здесь

$$f(q) = \exp \left[\left(a_0 - \frac{2}{3} c_0 E_2 \right) q + \frac{\lambda c_0 E_2}{3} q^2 \right]; \quad \lambda = 1 - \frac{E_1}{E_2};$$

$$F(q) = \frac{\exp(\gamma^2 - a_0)}{\lambda \gamma} [\Phi(\gamma) - \Phi(\gamma - \lambda \gamma q)]; \quad \gamma = \left(\frac{c_0 E_2}{3 \lambda} \right)^{0,5}; \quad \Phi(x) = \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi.$$

Согласно (2.2), (2.4), выполняется соотношение

$$\sigma = E_2(1 - \lambda q) \beta z f(q) [1 - a_0 F(q)], \quad (2.5)$$

выражающее напряжение σ через заранее неизвестную в связных задачах величину q . Соотношения (1.3) и (2.5) представляют собой систему уравнений, позволяющую найти зависимость обеих величин от температуры T и координаты z . Подстановка (2.5) в (1.3) дает трансцендентное уравнение относительно q , которое решается для выбранных значений z , например, методом половинного деления.

Найденное решение справедливо при $z_0 < z < h$ до тех пор, пока для получаемого с его помощью напряжения в крайнем волокне балки $\sigma(h)$ выполняется неравенство $T - k|\sigma(h)| \geq M_2$, свидетельствующее о том, что превращение еще не завершено. В противоположном случае полученное решение справедливо лишь для $z_0 < |z| < z_1$, где координата z_1 фронта конца преобразования определяется по формуле

$$z_1 = \frac{T - M_2}{k E_1 \beta f(1) |1 - a_0 F(1)|}.$$

Для $z_1 < |z| \leq h$ имеем $\varepsilon^2 = \beta z [1 - f(1) + a_0 f(1) F(1)]$, $\sigma = E_1 \beta z f(1) [1 - a_0 F(1)]$. Согласно полученному выражению, напряжение в зоне завершения преобразования даже в связной задаче пропорционально z , однако значение коэффициента пропорциональности отлично от того же значения в упругой области.

Изгибающий момент, необходимый для поддержания заданной кривизны $\beta = \text{const}$, находится для балки прямоугольного сечения по формуле

$$M = 2b \left[\frac{E_2 \beta z_0^3}{3} + E_1 \beta f(1) (1 - a_0 F(1)) \frac{h^3 - z_1^3}{3} + \int_{z_0}^{z_1} \sigma(z) z dz \right]. \quad (2.6)$$

Интеграл в (2.6) определяется численно.

На рис. 1 приведены получаемые по этой формуле зависимости безразмерного изгибающего момента $\mu = 3M/(2bh^2 E_2)$ от относительной температуры $t = (M_1 - T)/(M_1 - M_2)$

для никелида титана с $E_1 = 28000$ МПа, $E_2 = 84000$ МПа, $a_0 = 0,718$, $k = 0,2$ °С/МПа, $c_0 = 2,43 \cdot 10^{-4}$ 1/МПа. Кривые 1, 2 соответствуют $\beta h = 0,0005$; $0,002$. Видно, что значение изгибающего момента, необходимое для поддержания заданной кривизны при охлаждении через интервал температур прямого мартенситного превращения, падает до нуля при некотором значении температуры $T = T^*$.

Можно доказать, что при произвольной непрерывной зависимости модуля Юнга от q величина T^* , если она существует, не зависит от заданной кривизны, а определяется лишь постоянными материала. Действительно, следуя (2.3), решение уравнения для фазовой деформации представим в виде

$$\varepsilon^2 = A(q)\beta z, \quad (2.7)$$

где

$$A(q) = \frac{2}{3} c_0 \int_0^q E(r) \exp \left\{ \int_r^q \left[a_0 - \frac{2}{3} c_0 E(\xi) \right] d\xi \right\} dr, \quad (2.8)$$

причем q в (2.7) и (2.8) зависит, вообще говоря, от z через напряжение σ согласно (1.3).

В силу того что подинтегральная функция внешнего интеграла (2.8) непрерывна и положительна, $A(q)$ является монотонно возрастающей непрерывной функцией q . Следовательно, если уравнение

$$A(q) = 1 \quad (2.9)$$

имеет корень q^* на отрезке $[0, 1]$, то этот корень единственный и зависит только от постоянных материала. При $q = q^*$, согласно (2.7), (2.9), фазовая деформация в каждой точке сечения равна заданной полной деформации; значит, упругая деформация равна нулю вместе с действующими напряжениями:

$$\varepsilon^1(q^*, z) = 0, \quad \sigma(q^*, z) = 0, \quad (2.10)$$

т. е. при $q = q^*$ напряжения полностью релаксируют. Соответствующее значение T^* можно выразить через q^* с помощью соотношения (1.3), в котором необходимо положить $\sigma = 0$ в силу (2.10):

$$t^* = (2/\pi) \arcsin(q^*), \quad T^* = M_1 - (M_1 - M_2)t^*. \quad (2.11)$$

Для рассматриваемого случая линейного изменения модуля упругости (1.1) уравнение (2.9) имеет вид $F(q) = 1/a_0$, и его решение для параметров материала, характерных для никелида титана, есть $q^* = 0,288$, $t^* = 0,186$.

Необходимо отметить, что, согласно (2.8), (2.9), (2.11), величины q^* , t^* , T^* не зависят от параметра материала k , определяющего влияние действующего напряжения на q . Следовательно, релаксация напряжений в сплаве, у которого фазовый состав не зависит от действующих напряжений, наступает при той же температуре, что и в сплаве типа никелида титана, у которого такая зависимость имеется.

При $T = T^*$ балка будет сохранять криволинейную форму с заданной постоянной кривизной без приложения внешних нагрузок. Дальнейшее охлаждение балки, кривизна которой фиксирована, приведет к возрастающим по модулю отрицательным значениям момента M (т. е., для того чтобы кривизна не возрастала, необходимо прикладывать момент противоположного знака). Такое поведение — следствие ориентированного превращения [1, 8].

Аналогичная задача в несвязной постановке легко решается способом, предложенным в [7, 8]. Применяя преобразование Лапласа к упругому решению $M = E\beta J$ ($J = 2bh^3/3$), заменяя модуль E на соответствующий оператор [8] и переходя к оригиналам, получим

$$M = \frac{2}{3} bh^3 E\beta \left[1 - \frac{2c_0 E}{3a_0 - 2c_0 E} \left(\exp \left[\left(a_0 - \frac{2}{3} c_0 E \right) q \right] - 1 \right) \right].$$

По этому решению для $\beta h = 0,002$ и $E = E_1$ на рис. 1 построена кривая 3 и для $E = E_2$ — кривая 4. Как видно, решения связной и несвязной задач отличаются весьма существенно. Переменность модуля упругости оказывает значительное влияние на T^* . Доля мартенситной фазы и относительная температура, при которых момент обращается в нуль, определяются по формулам

$$q^* = \frac{1}{a_0 - 2c_0 E/3} \ln \left(\frac{3a_0}{2c_0 E} \right) \quad (2.12)$$

и (2.11). Для $E = E_1$ $t^* = 0,3208$, для $E = E_2$ $t^* = 0,1466$. Согласно полученным решениям, в несвязной задаче процесс релаксации напряжений происходит значительно более резко, чем в связной, где замедление происходит вследствие движения фронта превращения.

На рис. 2 приведены графики полученных при решении связной задачи распределений безразмерных напряжений $s = \sigma/E_2$ по сечению балки. По оси ординат отложена безразмерная координата $\xi = z/h$. Кривая 1 соответствует $t = -0,8$ (превращение в крайних волокнах балки начинается при $t = -0,84$), кривые 2–6 — $t = -0,6; -0,4; -0,2; 0; 1$. Видно, что распределение напряжений по сечению далеко от линейного, получаемого при решении несвязной задачи. Вследствие фазового перехода в данном случае, как и в упругопластической задаче, распределение напряжений по сечению балки становится более равномерным по сравнению с распределением в упругой задаче. При $T > T^*$ напряжения на выпуклой стороне балки становятся сжимающими, а на вогнутой — растягивающими. Согласно полученным решениям, при отрицательных и небольших положительных значениях t распределение доли мартенситной фазы по сечению балки далеко от равномерного, характерного для решения несвязной задачи.

Необходимо отметить, что фронт завершения преобразования перемещается по сечению балки при ее охлаждении со значительно большей скоростью, чем фронт начала прямого превращения. При $\beta h = 0,001$ завершение преобразования в крайних волокнах происходит при $t = 0,9658$, и все сечение проходит этим фронтом при изменении t от 0,9658 до 1. Вообще же движение фронтов начала и завершения преобразования связано исключительно с тем, что решается связная задача. В несвязной постановке при равномерном распределении температуры по сечению прямое превращение во всех точках сечения начинается одновременно при $t = 0$ и заканчивается при $t = 1$.

3. Формулировка задачи изгиба в приращениях. Далее рассматриваются проблемы, в которых кривизна β не является фиксированной, а находится в результате решения задачи. В этом случае решение в квадратурах получить не удастся и задачу приходится решать по шагам. Для получения уравнений в приращениях необходимо продифференцировать соотношение (1.7) и заменить в правой части полученного уравнения $d\varepsilon^1$ с помощью (1.1), а $d\varepsilon^2$ — с помощью (1.2):

$$z d\beta = \frac{d\sigma}{E} - \left[\frac{\sigma}{E^2} \frac{dE}{dq} - (B + a_0 \varepsilon^2) \right] dq. \quad (3.1)$$

Согласно (1.3), (1.5),

$$dq = \varphi [k \operatorname{sign}(\sigma) d\sigma - dT] \sqrt{1 - q^2}, \quad (3.2)$$

где $\varphi = \pi/(2(M_1 - M_2))$ для прямого превращения, а $\varphi = \pi/(2(A_1 - A_2))$ для обратного. Подставляя (3.2) в (3.1) и разрешая это уравнение относительно $d\sigma$, получим

$$d\sigma = \frac{z d\beta + \psi dT}{1/E + k\psi \operatorname{sign}(\sigma)}, \quad \psi = \left(B + a_0 \varepsilon^2 - \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dq} \sigma \right) \varphi \sqrt{1 - q^2}. \quad (3.3)$$

Соотношения (3.3) справедливы в зоне превращения. В упругой области в правой части первого уравнения (3.3) необходимо положить $\psi = 0$.

Для дифференциала изгибающего момента dM на основе (1.8), (3.3) имеем (в балке прямоугольного сечения)

$$dM = 2b \int_0^h d\sigma z dz = 2b(f_1 d\beta + f_2 dT), \quad (3.4)$$

где

$$f_1 = \int_{z_0}^h \frac{z^2 dz}{1/E + k\psi \operatorname{sign}(\sigma)} + \frac{1}{3} E_2 z_0^3; \quad f_2 = \int_{z_0}^h \frac{\psi z dz}{1/E + k\psi \operatorname{sign}(\sigma)}.$$

4. Эффект разгрузки внутренних слоев балки в случае прямого превращения при чистом изгибе. Пусть изгибающий момент фиксирован: $dM = 0$, а температура изменяется через интервал температур прямого или обратного превращения. В этом случае из (3.4) получим выражение для приращения кривизны:

$$d\beta = -(f_1/f_2) dT. \quad (4.1)$$

Процедура определения кривизны β , соответствующей данному (фиксированному) значению изгибающего момента и охлаждению от полностью аустенитного состояния до заданной температуры, сводится к следующему. Определяются кривизна в упругой задаче β^0 и соответствующее распределение напряжений в сечении $\sigma^0 = E_2 \beta^0 z$. Температура начала превращения T^0 находится по формуле (2.1). Величины T^0 , β^0 и σ используются как начальные значения в пошаговом решении. Температура увеличивается с выбранным шагом dT , соответствующие значения $d\beta$ и $d\sigma$ определяются с помощью (3.3), (4.1). Вычисленные приращения добавляются к значениям β и σ , найденным на предыдущем шаге. После этого величина q для выбранных точек сечения находится с помощью (1.3), упругая деформация — с помощью (1.1), а фазовая деформация — в виде $\varepsilon^2 = \beta z - \varepsilon^1$.

С использованием изложенного алгоритма решена задача о прямом превращении балки из никелида титана при ее чистом изгибе. Обнаружено, что при $T > M_1$ распределение напряжений по сечению балки похоже на приведенное на рис. 2, которое соответствует задаче о релаксации напряжений в балке с заданной кривизной. При дальнейшем охлаждении до температур $T < M_1$ картина резко меняется. Центральная часть сечения разгружается так, что напряжения на участке от нейтральной линии до относительной высоты сечения, приближенно равной $\xi \cong 0,5$, близки к нулю. В то же время крайние волокна балки перенапряжены (при относительном значении заданного изгибающего момента $\mu = 3M/(2bh^2 E_2) = 0,001$ относительные напряжения в крайнем волокне упругого решения составляют также $s = 0,001$, а при полном превращении $s = 0,00188$, т. е. увеличиваются по сравнению с упругими почти в 2 раза). Это явление связано с прохождением через внешние слои балки фронта завершения преобразования, после чего фазовая деформация перестает меняться и фактически происходит упругое деформирование. В задаче о релаксации напряжений при прямом превращении в балке с фиксированной кривизной (см. рис. 2) перегрузка внешних слоев не наблюдалась, поскольку фронт завершения преобразования проходит через все сечение очень быстро в самом конце процесса охлаждения.

5. Явление мартенситной неупругости в изгибаемой балке. Пусть теперь балка, находящаяся в аустенитном состоянии, нагружается монотонно увеличивающимся изгибающим моментом в изотермических условиях при $T > M_1$. В этом случае в ней возможно явление мартенситной неупругости [1, 2], при котором прямое превращение происходит за счет изменения напряжений, а не температуры. Описание мартенситной неупругости с помощью определяющих уравнений (1.2), (1.4) для однородного напряженного состояния в растягиваемом стержне приведено в [6]. Изложенный выше алгоритм позволяет описать это явление в изгибаемой балке.

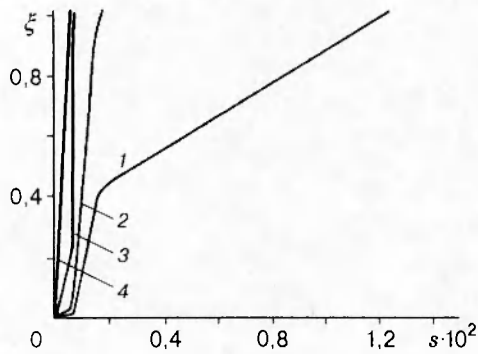


Рис. 3

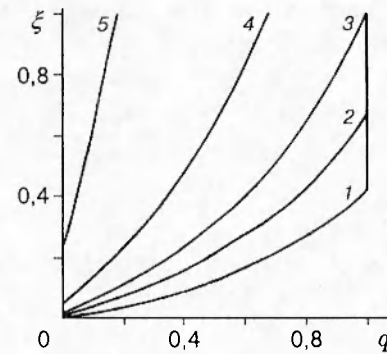


Рис. 4

Необходимо отметить, что явление мартенситной неупругости вплотную связано с влиянием действующих напряжений на фазовый состав и поэтому может быть описано только при решении задач в связной постановке, для чего в (3.4) необходимо положить $dT = 0$. В результате приращение кривизны определяется по формуле $d\beta = dM/(2bf_1)$.

Процедура решения задачи аналогична описанной выше с той разницей, что здесь на начальном этапе для заданной температуры T находится начальное значение момента $M_0 = (T - M_1)J/(kh)$, при котором в крайнем волокне рассматриваемого сечения начнется прямое превращение и в качестве начальных значений кривизны и напряжений берутся результаты упругого решения для $M = M_0$. Решение в приращениях проводится с выбранным шагом по моменту dM , начиная с M_0 .

На рис. 3 приведены графики распределения по сечению балки относительного напряжения $s = \sigma/E_2$ при изотермическом возрастании момента. Расчет проведен при $t = -0,5$. Кривые 1-4 соответствуют нагружению до значений относительного изгибающего момента $\mu = 0,01; 0,002; 0,001; 0,0006$. Линия 4 отвечает нагрузке, при которой в крайнем волокне балки впервые выполняется условие начала превращения (поэтому распределение напряжений по сечению является линейным, что характерно для упругой задачи). Точка перелома на линии 3 соответствует положению границы фронта начала превращения, кривая 2 — максимальному моменту, при котором в крайнем волокне балки превращение впервые завершается. При больших значениях максимального момента графики распределения напряжений по сечению имеют вид трехзвенной ломаной с двумя прямолинейными звеньями (в упругой зоне, содержащей нейтральную линию, и в зоне, примыкающей к крайним волокнам, в которой преобразование уже завершено) и криволинейным звеном в лежащей между ними зоне продолжающегося превращения. Наклон прямолинейных участков $d\sigma/dz$ в зоне завершения преобразования увеличивается с ростом изгибающего момента, центральная часть балки опять оказывается ненагруженной, а крайние волокна перенапряжены по сравнению с упругим решением.

На рис. 4 приведены графики распределения по сечению доли мартенситной фазы q . Кривые 1-5 соответствуют $\mu = 0,01; 0,004; 0,002; 0,0015; 0,001$. В рассматриваемой задаче фронт как начала, так и завершения преобразования движется к нейтральной линии при возрастании изгибающего момента. Здесь, однако, при $T > M_2$ фронт начала преобразования никогда не достигает нейтральной линии, стремясь к ней асимптотически при неограниченном возрастании изгибающего момента.

В случае, если необходимо найти прогиб балки W по заданному распределению изгибающего момента при малых деформациях и прогибах, приближенное выражение для кривизны β (1.9) представляется в конечных разностях. В результате при использовании центральных конечных разностей получается рекуррентное соотношение для определения

прогиба:

$$W(x_{i+2}) = \beta[M(x_{i+1}), T](\Delta x)^2 - W(x_i) + 2W(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 2. \quad (5.1)$$

Здесь нейтральная ось балки разбита на равные отрезки длиной Δx точками x_1, x_2, \dots, x_n ; значения $W(x_1)$ и $W(x_2)$ определяются из условий закрепления левого конца балки; величины $\beta[M(x_{i+1}), T]$ находятся с помощью описанной выше процедуры. Эта процедура использована для определения прогибов консольной балки, заземленной на одном конце и нагруженной поперечной силой на другом.

Задача решалась в двух вариантах. В первом производилось охлаждение при постоянной нагрузке P до некоторой температуры T , во втором нагрузка возрастала от нуля до P в изотермических условиях при $T \geq M_1$. Установлено, что за счет мартенситной неупругости при прочих равных условиях (одинаковые температуры, не превышающие M_1 , одинаковые максимальные значения нагрузки) можно добиться существенно больших значений кривизны и прогибов, чем за счет прямого превращения при $P = \text{const}$. В то же время, если охлаждение балки, находящейся под постоянной нагрузкой, продолжается до температуры $T = M_2$, можно достигнуть несколько более высоких значений прогиба, чем при той же максимальной нагрузке в изотермических условиях при $T = M_1$.

6. Решение задачи об изгибе балки с односторонней связью на правом конце.

Сложнее строится решение статически неопределимых задач. Ниже рассматривается связанная задача об охлаждении балки, левый конец которой заземлен, а правому в аустенитном состоянии сообщен (с помощью подставки) прогиб W_0 , который может увеличиваться, но не может уменьшаться. Изгибающий момент на правом конце равен нулю. В случае, если прогиб правого конца превысил W_0 (пластина отошла от подставки), перерезывающая сила на правом конце также становится равной нулю. Данная задача в несвязной постановке решена в [8].

При охлаждении вследствие прямого превращения развиваются фазовые деформации и поперечная сила, действующая на балку, уменьшается. Поэтому распределение изгибающего момента заранее не известно и должно быть найдено в результате решения задачи. Чтобы не переходить к уравнению изгиба четвертого порядка, что связано с численным дифференцированием определяемой в приращениях кривизны, можно воспользоваться тем, что задача в приращениях для прогиба является линейной. Это позволяет для заданного малого приращения температуры dT вычислить такое приращение силы на правом конце dP , что паре (dT, dP) соответствует равное нулю приращение прогиба правого конца:

$$dW(x_n) = 0. \quad (6.1)$$

Для этого уравнение (5.1) записывается в приращениях:

$$dW(x_{i+2}) = d\beta[M(x_{i+1}), T](\Delta x)^2 - dW(x_i) + 2dW(x_{i+1}). \quad (6.2)$$

Величина $d\beta$ определяется из (3.4) в форме

$$d\beta(x_{i+1}) = A(x_{i+1}) dP + B(x_{i+1}) dT, \quad (6.3)$$

где

$$A(x_{i+1}) = \frac{1}{2b} \frac{L - x_{i+1}}{f_1}, \quad B(x_{i+1}) = -\frac{f_2}{f_1} \quad (6.4)$$

(L — длина балки). В (6.4) при вычислении интегралов, входящих в функции f_i согласно (3.4), величина z_0 , а также все функции, входящие в подынтегральные выражения, берутся для сечения с координатой x_{i+1} . Из условий заземления левого конца $dW(x_1) = dW(x_2) = 0$. Подставляя (6.3) в (6.2), получим

$$dW(x_i) = (\Delta x)^2 (D_i dP + F_i dT).$$

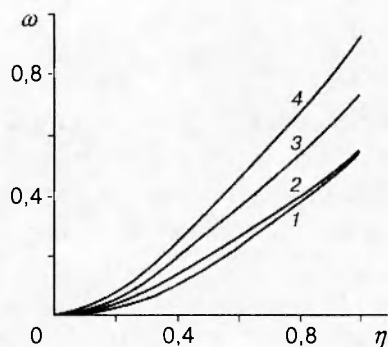


Рис. 5

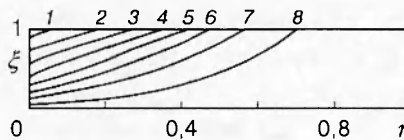


Рис. 6

Здесь

$$D_i = \sum_{j=2}^{i-1} (i-j)A(x_j); \quad F_i = \sum_{j=2}^{i-1} (i-j)B(x_j).$$

В результате условие постоянства прогиба правого конца (6.1) можно записать в виде

$$dP = -\frac{F_n}{D_n} dT. \quad (6.5)$$

Соотношение (6.5) позволяет найти искомое приращение поперечной силы, действующей со стороны подставки. Именно это значение используется для подстановки в правую часть формулы (6.3), на основе которой определяется приращение кривизны. Дальнейшее решение проводится с помощью описанной выше процедуры.

При решении этой задачи обнаружено, что сила P , действующая на балку со стороны подставки, уменьшается при охлаждении и достигает нулевого значения при некоторой температуре T^* . При дальнейшем охлаждении в задаче с двусторонним закреплением правого конца сила P становится отрицательной и растет по абсолютной величине. Если же правый конец может свободно смещаться вверх, то при дальнейшем охлаждении он отойдет от подставки и его смещение будет расти с увеличением температуры. Данное явление было обнаружено экспериментально в [12]. Для описания смещения балки в этих условиях в уравнении (6.3) при $T > T^*$ необходимо положить $A(x_{i+1}) = 0$ для всех i . В остальном решение проводится по описанной выше схеме.

На рис. 5 приведены графики положения нейтральной линии балки из никелида титана при $W_0/h = 0,133$, $L/h = 20$. По оси абсцисс отложены значения относительной продольной координаты $\eta = x/L$, по оси ординат — относительного прогиба $\omega = W/h$. Кривые 1 и 2 отвечают $t = -0,8$ и $0,1$ (правый конец еще не отошел от подставки). Момент отрыва соответствует $t = t^* = 0,17$. Кривые 3 и 4 рассчитаны для $t = 0,5$ и 1 . Рис. 6 иллюстрирует движение по той же балке границы зоны начала превращения. Для наглядности масштаб по высоте балки увеличен в 4 раза. Снизу от соответствующих кривых расположена упругая область, сверху — зона превращения. Кривые 1–8 отвечают $t = -0,8; -0,7; -0,6; -0,5; -0,4; -0,3; -0,2; -0,1$. При $t \geq 0$ зона превращения занимает всю балку.

При решении той же задачи в несвязной постановке относительная температура, соответствующая моменту отрыва, определяется по формулам (2.11), (2.12), т. е. совпадает со значением t^* в задаче о релаксации напряжений в балке с заданной кривизной.

В [12] на основе экспериментальных данных отмечается, что максимальный прогиб конца балки при полном прямом превращении W пропорционален первоначально заданному прогибу W_0 . Расчеты показывают, что отношение W/W_0 хотя и не постоянно, но

меняется с изменением W_0 незначительно (при изменении W_0 в 3 раза значение W/W_0 изменилось от 1,67 при $W_0/h = 0,06667$ до 1,66 при $W_0/h = 0,2$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01406).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихачев В. А., Кузьмин С. Л., Каменцева З. П. Эффект памяти формы. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1987.
2. Лихачев В. А., Малинин В. Г. Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993.
3. Ооцука К., Симидзу К., Судзуки Ю. и др. Сплавы с эффектом памяти формы. М.: Металлургия, 1990.
4. Мовчан А. А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 197–205.
5. Мовчан А. А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 173–181.
6. Мовчан А. А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
7. Мовчан А. А. Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для материалов с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. № 4. С. 136–144.
8. Мовчан А. А. Некоторые проявления способности к ориентированному превращению для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 181–189.
9. Корнилов И. И., Белоусов О. К., Качур Е. В. Никелид титана и другие сплавы с эффектом «памяти». М.: Наука, 1977.
10. Liang C., Rogers C. A. One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // J. Intelligent Mater. System and Struct. 1990. V. 1, N 2. P. 207–234.
11. Tanaka K. A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys // J. Pressure Vessel Technology. Trans. ASME. 1990. V. 112, N 2. P. 158–163.
12. Витайкин Е. З., Литвин Д. Ф., Макушев С. Ю., Удовенко В. А. Структурный механизм эффекта памяти формы в сплавах MnCu // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229, № 3. С. 597–600.

Поступила в редакцию 13/VI 1996 г.
