

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТРЕНИЕ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ  
В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев

(Ленинград, Москва)

В работе [1] показано, что для случая движения газа с дозвуковыми скоростями при неизотермических условиях существует предельное решение для отношения  $C_f/C_{f0}$ , соответствующее бесконечному значению числа Рейнольдса  $R$ ; это отношение коэффициента трения для сжимаемой жидкости  $C_f$  к коэффициенту трения для несжимаемой жидкости  $C_{f0}$  будем обозначать через  $\Psi = C_f/C_{f0}$ .

Аналогичным путем можно получить предельное решение для турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа. Распространение полуэмпирической теории турбулентности Прандтля на пограничный слой сжимаемого газа приводит к распределению скоростей по закону синуса логарифма [2]

$$\omega = z_1 + z_2 \sin\left(z_3 + z_4 \ln \frac{y}{y_1}\right) \quad \left(\omega = \frac{W}{W_0}\right) \quad (1)$$

Здесь  $W_0$  [м/сек] — скорость газа в невозмущенном потоке,  $W$  [м/сек] — скорость газа в пограничном слое.

$$z_1 = -\frac{\Delta\psi}{2(\psi^* - 1)}, \quad z_4 = \frac{1}{\chi} \sqrt{(\psi^* - 1) \frac{C_f}{2}}, \quad W_2 = \frac{W_1}{V^*} \sqrt{\frac{C_f}{2}} = \frac{W_1}{W}$$

$$z_2 = \frac{1}{2(\psi^* - 1)} \sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2},$$

$$z_3 = \arcsin \frac{2(\psi^* - 1)\psi_2 + (\Delta\psi)^2}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}}$$

$$\psi = \frac{T_{ст}}{T_0}, \quad \psi^* = \frac{T_{ст}^*}{T_0}, \quad \Delta\psi = \psi - \psi^*$$

$W_1$  [м/сек] — скорость газа на границе ламинарного подслоя,  $T_{ст}$  [°K] — температура стенки,  $T_{ст}^*$  [°K] — равновесная температура стенки,  $T_0$  [°K] — термодинамическая температура в невозмущенном потоке,  $y_1$  [м] — толщина ламинарного подслоя,  $\delta^{**}$  — толщина потери импульса,  $\delta$  — толщина пограничного слоя.

При  $\psi = \psi^* = 1$  формула (1) переходит в обычный логарифмический закон распределения скоростей.

При  $y = \delta = k\delta^{**}$ ,  $W = W_0$

$$\omega = 1$$

и

$$z_4 \ln \frac{k\delta^{**}}{y_1} = \arcsin \frac{1 - z_1}{z_2} - z_3 \quad (2)$$

Для изотермического течения несжимаемой жидкости имеем

$$\frac{1}{\chi} \ln \frac{k_0 \delta_0^{**}}{y_0} = \frac{1}{\chi} \ln \left( \frac{k_0}{\eta_0} R^{**} \sqrt{\frac{C_{f0}}{2}} \right) = \sqrt{\frac{2}{C_{f0}}} - \eta_{10} \quad (3)$$

Здесь индексом 0 обозначены величины, относящиеся к случаю  $\psi = \psi^* = 1$ . При этом

$$\chi = 0.4, \quad \eta_{10} = 11.6, \quad \Psi_{20} \sqrt{1/2 C_{f0}} = 8.2 \sqrt{C_{f0}}$$

С другой стороны, можно написать

$$\frac{k\delta^{**}}{y} = \frac{R^{**}}{\eta_{10}} \left( \Psi_1 \frac{k_0}{k} \sqrt{\frac{C_f}{C_{f0}}} \right)^{-1} \sqrt{\frac{C_{f0}}{2}} \quad \left( \Psi_1 = \frac{\eta_1}{\eta_{10}} \right) \quad (4)$$

Произведя сопоставление  $C_f$  и  $C_{f0}$  при  $R^{**} = \text{idem}$  [из (2), получаем

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{1}{(\psi^* - 1) Z^2} \left[ \arcsin \frac{2(\psi^* - 1) + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}} - \arcsin \frac{2(\psi^* - 1)\Psi_2 + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}} \right]^2 \quad (5)$$

Здесь

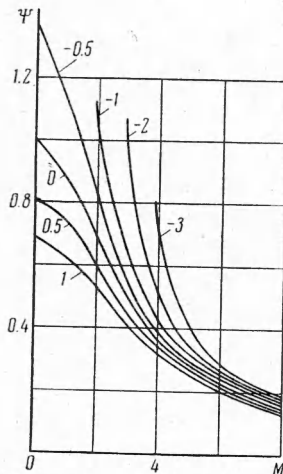
$$Z = 1 - \left( \eta_{10} + \frac{1}{\chi} \ln \Psi_1 \frac{k_0}{k} \sqrt{\frac{C_{f0}}{C_f}} \right) \sqrt{\frac{C_{f0}}{2}} \quad (6)$$

При  $R \rightarrow \infty$  имеем  $C_{f0} \rightarrow 0$ ,  $\Psi_2 \rightarrow 0$ ,  $Z \rightarrow 1$ , т. е. для зависимости (5) существует асимптотическое выражение

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{1}{\psi^* - 1} \left[ \arcsin \frac{2(\psi^* - 1) + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}} - \arcsin \frac{\Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}} \right]^2 \quad (7)$$

При адиабатическом обтекании пластины  $\Delta\psi = 0$ , и предельный закон трения принимает весьма простую форму

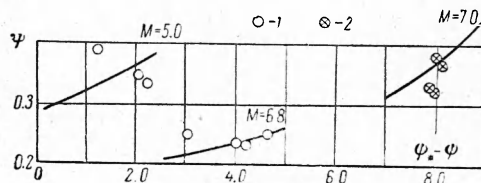
$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{1}{1 - \psi^*} \left( \arcsin \sqrt{\frac{\psi^* - 1}{\psi^*}} \right)^2 \quad (8)$$



Фиг. 1. Зависимость  $(C_f/C_{f0})_{R^{**}}$  от  $M$  и  $\Delta\psi$  при  $r = 0.9$

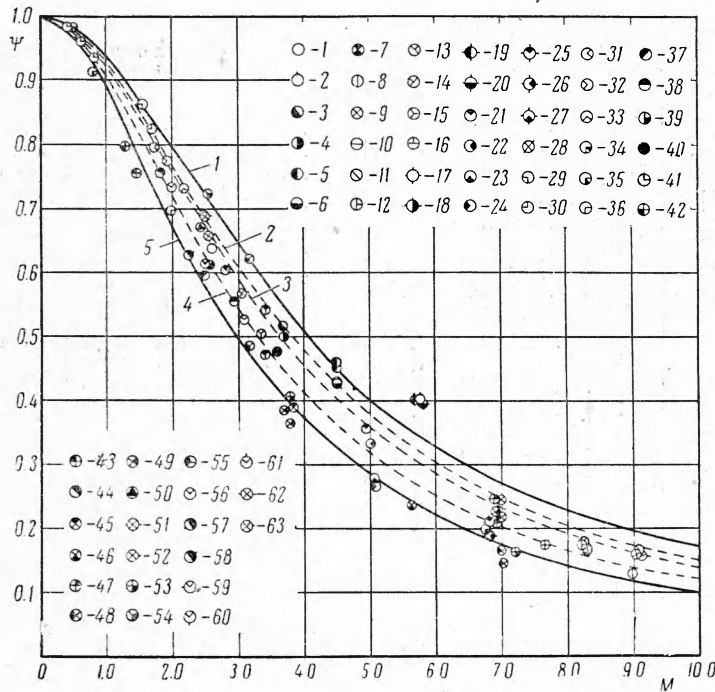
Как видно, предельный закон трения (7), соответствующий обтеканию пластины с весьма большими числами  $R$ , не зависит от эмпирических констант турбулентности  $\chi$  и  $\eta_1$ . При этом автомодельность относительно  $\eta_1$  означает независимость предельного закона трения от физических свойств вязкого подслоя, роль которого вырождается при  $R \rightarrow \infty$ .

Фиг. 2. Влияние теплообмена на трение пластины в сверхзвуковом потоке газа; 1 — опыты Лобба [6], 2 — опыты Соммера [13], сплошная линия — расчет по уравнению (7)



На фиг. 1 показана зависимость  $\Psi = C_f/C_{f0}$  от  $\Delta\psi$  и  $\psi^*$ , рассчитанная по формуле (7). Как видно, с увеличением  $\psi^*$  (или  $M$ ) относительное влияние теплообмена  $\Delta\psi$  на  $C_f$  уменьшается.

На фиг. 2 дано сопоставление расчетов по той же формуле с опытами Соммера и Шота [13] и Лобба, Винклера и Перша [6], проведенными при относительно больших числах  $R^{**}$  и интенсивном теплообмене. Сводка опубликованных опытных данных приведена в табл. 1 и 2. Можно отме-



Фиг. 3. Зависимость  $(C_f/C_{f0})_{R^{**}}$  от  $M$  и  $R^{**}$ . Опыты с теплообменом приведены к теплоизолированным условиям по уравнению [7] 1 —  $R^{**} = 1000$ , 2 —  $R^{**} = 4000$ , 3 —  $R^{**} = 14\ 000$ , 4 —  $R^{**} = 1\ 000\ 000$ , 5 —  $R^{**} = \infty$

тить не только качественное, но и удовлетворительное количественное согласование теории и эксперимента. Это означает, что предельный закон трения достаточно хорошо описывает реальные течения с конечными значениями чисел  $R$ , т. е. отношение  $\Psi$  является сравнительно слабой функцией от  $R^{**}$ . Это обстоятельство позволяет ограничиться введением в общую формулу (7) первого приближения входящих в нее неизвестных функций, т. е. положить

$$\Psi_2 = \Psi_{20} = \eta_{10} \sqrt{1/2 C_{f0}}, \quad Z = Z_0 = 1 - \eta_{10} \sqrt{1/2 C_{f0}}, \quad \eta_{10} = 11.6 \quad (9)$$

В этом случае имеем

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{1}{(\Psi^* - 1)(1 - 8.2 \sqrt{C_{f0}})^2} \left[ \arcsin \frac{2(\Psi^* - 1) + \Delta\Psi}{\sqrt{4(\Psi^* - 1)(\Psi^* + \Delta\Psi) + \Delta\Psi^2}} - \arcsin \frac{16.4(\Psi^* - 1)\sqrt{C_{f0}} + \Delta\Psi}{\sqrt{4(\Psi^* - 1)(\Psi^* + \Delta\Psi) + \Delta\Psi^2}} \right]^2 \quad (10)$$

и, соответственно, при  $\Delta\Psi = 0$

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{1}{\Psi^* - 1} \left[ \frac{1}{1 - 8.2 \sqrt{C_{f0}}} \left( \arcsin \sqrt{\frac{\Psi^* - 1}{\Psi^*}} - \arcsin 8.2 \sqrt{\frac{\Psi^* - 1}{\Psi^*} C_{f0}} \right) \right]^2 \quad (11)$$

Таблица 1

Сравнение опытных данных по турбулентному трению на плоской пластине  
 $(\Theta = T_{ст}^*/T_{ст}, \Psi = C_f/C_{f0})$

Авторы	Точки (фиг. 3)	M	R**	$\Theta$	$\Psi$	Условия опыта	Метод определе- ния $C_f$
Колес [4] $R^{**} = idem$ $R_x \approx 8 \cdot 10^6$	1	2.6	6600	1.0	0.638	Теплоизо- лированная пластина	Непосредст- венное измере- ние при помо- щи плавающего элемента
	2	2.6	10200	1.0	0.641		
	3	3.7	4100	1.0	0.516		
	4	3.7	7560	1.0	0.499		
	5 {	4.5	2900	1.0	0.460		
		4.5	3470	1.0	0.455		
	6	4.5	5240	1.0	0.424		
7	4.5	6590	1.0	0.429			
Хилл [5] $R^{**} = idem$	8	8.99	1245	0.448	0.197	Охлажда- емая стенка конического сопла	По градиенту скоростей на стенке
	9	9.04	1607	0.460	0.235		
	10	9.07	1908	0.474	0.234		
	11	9.10	2287	0.495	0.227		
	12	8.22	2081	0.493	0.257		
	13	8.35	2498	0.497	0.265		
	14	8.27	2885	0.500	0.259		
	15	8.29	3202	0.500	0.247		
	16	8.29	3451	0.502	0.239		
Коркеджи [7] $R^{**} = idem$	17	5.787	2477	1.0	0.403	Теплоизо- лированная пластина	Непосредст- венное измере- ние при помо- щи плавающего элемента
	18	5.77	2780	1.0	0.400		
	19	5.793	3429	1.0	0.400		
	20	5.805	4040	1.0	0.397		
Лобб, Винклер, Пери [6] $R^{**} = idem$	21	4.93	5350	0.924	0.369	Охлажда- емая стенка плоского сопла	По градиенту скоростей на стенке и через аналогию Рей- нольдса по из- мерениям теп- ловых потоков в исследуемом сечении
	22	5.01	6480	0.713	0.381		
	23	5.03	7950	0.575	0.341		
	24	5.06	7370	0.535	0.329		
	25	6.83	8550	0.613	0.251		
	26	6.83	12640	0.508	0.234		
	27 {	6.78	8400	0.513	0.244		
	28	6.78	7960	0.457	0.251		
28	7.67	8440	0.465	0.217			
Вильсон [10] $R_x = idem$ $R_x \approx 10^7$	29	1.55		1.0	0.885	Теплоизо- лированная пластина	По измере- ниям профилей скоростей и уравнению им- пульсов
	30	1.70		1.0	0.851		
	31	1.75		1.0	0.828		
	32	1.93		1.0	0.810		
33	2.18		1.0	0.770			
Чапман, Кес- тер [8] $R_x = idem$ $R_x = (6 \div 16) \cdot 10^6$	34	0.51		1.0	0.985	Обтекание теплоизоли- рованного цилиндра в продольном направле- нии	Непосредст- венное измере- ние средних значений
	35	0.81		1.0	0.929		
	36	1.99		1.0	0.746		
	37	2.49		1.0	0.671		
	38	2.95		1.0	0.623		
	39	3.36		1.0	0.578		
	40	3.60		1.0	0.551		
Липман, Да- ван [9] $R = idem$ $R_x \approx 1 \cdot 10^6$	41 {	0.42		1.0	0.989	Обтекание теплоизоли- рованной пластины	Непосредст- венное измере- ние локальных значений
		0.63		1.0	0.966		
		0.82		1.0	0.965		
		1.28		1.0	0.829		
43	1.45		1.0	0.790			

Таблица 1 (продолжение)

Авторы	Точки (Фиг. 3)	M	R**	е	Ψ	Условия опыта	Метод определения C <sub>f</sub>
Сомер, Шорт [13] R <sub>x</sub> = idem R <sub>x</sub> = (3÷9)·10 <sup>6</sup>	44	2.81		0.400	0.867	Выстрел пустотельным цилиндром в аэродинамической трубе навстречу потоку	По изменению скорости полета модели
	45	3.82		0.268	0.730		
	46	5.63		0.176	0.562		
	47	6.90		0.161	0.404—0.451		
	48	7.00		0.162	0.395—0.446		
	49 {	3.78 3.67		0.272 0.285	0.694 0.724		
Моноган [19] R** = idem	50	2.43		1.0	0.680		
Рубезин [11] R <sub>x</sub> = idem R <sub>x</sub> = 7·10 <sup>6</sup>	51	2.55		1.0	0.705		По измерениям профилей скоростей
Бринич [12] R <sub>x</sub> = idem R <sub>x</sub> = (3÷18)·10 <sup>6</sup>	52	3.05		1.0	0.625	Цилиндрическая поверхность	По профилям скоростей
Абботт [14] R <sub>x</sub> = idem R <sub>x</sub> = 5·10 <sup>6</sup>	53 {	3.80		0.278	0.720		
		7.20		0.173	0.340		

Таблица 2

Сравнение опытных данных по турбулентному теплообмену на плоской пластине (отношения чисел Стантона S/S<sub>0</sub> при числе R<sub>x</sub> = idem)

Авторы	Точки (Фиг. 3)	M	S/S <sub>0</sub>	Условия опыта	Метод определения S
Бредфилд, Декурзин [20] <sup>1</sup>	54	2.586	0.67 — 0.77	Обтекание кона	Измерение теплообмена нестационарным методом
	55	8.180	0.535—0.700		
	56	3.410	0.547—0.610		
Папес [15] <sup>1</sup>	57	1.823	0.795—0.900	Пластина с равномерным подогревом	По расходу электроэнергии и температуре стенки
	58	2.290	0.675—0.790		
Шульберг [16] <sup>1</sup>	59	2.00	0.763	Пластина с равномерным подогревом	По расходу электроэнергии и температуре стенки
	60	2.50	0.675		
	61	3.09	0.600		
Слак [17]	62	2.5	0.744	Данные не приводятся	
Фаллес [18]	63	2.5	0.745		

<sup>1</sup> Данные приведены к теплоизолированным условиям по методике Дрейста.

На фиг. 3 показана зависимость  $\Psi = C_f / C_{f0}$  от  $\psi^*$  и  $R^{**}$ , построенная по формуле (11). Там же нанесены различные опытные данные. Совпадение теоретического расчета с результатами опытов можно считать весьма удовлетворительным. При этом следует отметить, что опыты подтверждают относительно слабое влияние  $R^{**}$  на  $\Psi = C_f / C_{f0}$ , что позволяет в достаточно широких интервалах чисел  $R^{**}$  положить

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \Psi(\Delta\psi, \psi^*) \quad (12)$$

