где $F_l' = -6\pi\mu a dq_l/dt$ — формула Стокса для определения силового воздействия на движущуюся сферу в покоящейся жидкости. Согласно формулам (13) и (14), получим

$$dq_l/dt = u_l(\mathbf{q}) + (1/2)q_s(\partial u_s/\partial y_l)(\mathbf{q}) + (a^2/6\mu) \times \times (\partial p^0/\partial y_l)(\mathbf{q}), \tag{15}$$

где $t$ — время.

Полученные уравнения (15) описывают движение центра частицы в неоднородном потоке вязкой несжимаемой жидкости.

*Поступила 6 X 1975*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Воинов О. В.** О силе, действующей на сферу в неоднородном потоке идеальной несжимаемой жидкости.— ПМТФ, 1973, № 4.
2. **Wakiva Shoichi.** Slow motions of a viscous fluid around two spheres.— «J. Phys. Soc. Lapan», 1967, vol. 22, №4.
3. **Greenstein T., Happel J.** Theoretical study of the slow motion of a sphere and a fluid in a cylindrical tube.— «J. Fluid mech.», 1968, vol. 34, N 4.
4. **Brenner H.** Hydrodynamic resistance of particles at small Reynolds numbers.— In: Advances in Chemical Engineerino Vol. 6. N. Y., Academic Press, 1966.
5. **Ламб Г.** Гидродинамика. Л., ГИТТЛ, 1947.

---

УДК 532.517.4

# К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

*В. Е Неуважаев, В. Г. Яковлев*

(*Челябинск*)

Теория турбулентного перемешивания границы раздела двух сред, движущихся ускоренно, построена в работе [1], для несжимаемых жидкостей дано приближенное решение; в уравнении баланса кинетической энергии турбулентного движения пренебрежено изменением кинетической энергии во времени.

В работе [2] проведено усреднение характерной турбулентной скорости по области перемешивания. Это позволило проинтегрировать исходные уравнения с учетом изменения кинетической энергии во времени. Оказалось, что найденный профиль плотности примерно совпал с профилем работы [1] в широком диапазоне изменения начального перепада плотностей.

В данной работе изучаются уравнения для перемешивания несжимаемых жидкостей в полной постановке. Установлено, что решения [1, 2] имеют ограниченную область применения, справедливую при малых отношениях плотностей. Проведен качественный анализ полученного решения и показано, что градиент плотности на фронте перемешивания имеет разрыв. Исследована зависимость решения от двух эмпирических постоянных. На основании теоретических соображений [2, 3] и сравнения с решением [1] сделан приближенный выбор значений этих постоянных. Найдена численная зависимость несимметрии перемешивания от начального перепада плотностей. Количественные характеристики решения иллюстрируются на графиках.

**1. Постановка задачи.** Для описания турбулентного перемешивания двух веществ постоянной плотности $\rho_1$ и $\rho_2$, находящихся в поле тяжести $g_0$, строится полуэмпирическая теория. Вводится характерная турбулентная скорость $v$ и характерная турбулентная длина $l$. Из соображений размерности для турбулентной скорости $v$ составляется энергетическое уравнение баланса [1]

$$\partial\rho v^2/2\partial t + \nu\rho v^3/l = \rho l v\omega^2. \tag{1.1}$$

Первый член в левой части означает изменение кинетической энергии во времени, второй член с неизвестным множителем $\nu$ описывает диссипацию энергии турбулентного движения. Правая часть уравнения, определяющая весь процесс, записана из размерных соображений [1]; $\omega$ — частота нарастания коротковолновых возмущений, полученная при исследовании на устойчивость произвольного одномерного течения,

$$\omega^2 = g_0\partial \ln \rho/\partial x > 0.$$

Последнее выражение полагается равным нулю, если $g_0\partial \ln \rho/\partial x < 0$. Это устойчивый случай, когда турбулентное перемешивание не возникает. Для замыкания уравнений полагается

$$l = \alpha L, \tag{1.2}$$

где $L$ — ширина области перемешивания; $\alpha$ — постоянная, как и $\nu$, определяемая из опыта.

Если предположить несжимаемость, то уравнение для плотности смеси может быть записано в виде

$$\partial\rho/\partial t = (\partial/\partial x)D\partial\rho/\partial x, \quad D = lv. \tag{1.3}$$

При необходимости может быть введена концентрация, например, легкого вещества $c = \rho_2/\rho$.

В работе [1] в уравнении (1.1) был отброшен член с временной производной, а в [2] турбулентная скорость $v$ полагалась не зависящей от пространственной переменной и уравнение (1.1) усреднялось по области перемешивания. Все это упростило решение задачи, хотя в ряде случаев привело к заметным отличиям.

**2. Автомодельный характер движения.** Задача о перемешивании двух несжимаемых жидкостей с постоянными плотностями $\rho_1$ и $\rho_2$ является автомодельной. Удобно перейти к новой переменной по времени $\tau$

$$d\tau = l dt. \tag{2.1}$$

Уравнения (1.1), (1.4) примут вид

$$\partial v^2/2\partial\tau + (v^2/2)\partial \ln \rho/\partial\tau + \nu v^3/l^2 = v g_0 \partial \ln \rho/\partial x; \tag{2.2}$$
$$\partial\rho/\partial\tau = (\partial/\partial x)v\partial\rho/\partial x.$$

Введем безразмерные переменные

$$\lambda = x g_0^{-1/3}\tau^{-2/3}; \quad \tau = (1/27)\,\alpha^3(\lambda_1 - \lambda_2)^3 g_0 t^3; \tag{2.3}$$
$$v = \tau^{1/3} g_0^{2/3}\,\zeta(\lambda); \quad \rho = \rho_1\delta(\lambda).$$

Здесь $\lambda_1$ и $\lambda_2$ соответствуют правому и левому фронту перемешивания. Второе соотношение в (2.3), выражающее новую переменную $\tau$ через время $t$, получено после интегрирования (2.1) с использованием (1.2) и выражения для ширины $L$

$$L = g_0^{1/3}\tau^{2/3}(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Ускорение $g_0$ постоянно. Можно считать

$$g = g_0 t^{\beta},$$

при этом изменились бы степени в (2.3), но полагать ускорение произвольной функцией времени, как в работах [1.2], здесь нельзя, иначе рассматриваемая задача не будет автомодельной.

Подстановка (2.3) в (2.2) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.4)\qquad (2/3)\lambda\zeta' + (1 + \lambda\zeta/3)\delta'/\delta - (1/3)\zeta - \zeta^2/A = 0;$$
$$-(2/3)\lambda\delta' = (\zeta\delta')',\ A = (\alpha^2/\nu)(\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

с краевыми условиями

$$(2.5)\qquad \lambda = \lambda_1\colon\ \zeta_1 = 0;\ \delta_1 = 1;$$

$$(2.6)\qquad \lambda = \lambda_2\colon\ \zeta_2 = 0;\ \delta_2 = 1/n = \rho_2/\rho_1.$$

Последние получены из естественных условий на фронте перемешивания: начальные плотности $\rho_1$ и $\rho_2$ и нулевая турбулентная скорость $v_1 = v_2 = 0$.

Особенностью полученной системы (2.4) является зависимость ее коэффициента $A$ от значений неизвестных постоянных $\alpha$ и $\nu$, которые должны определяться из эксперимента.

Порядок системы (2.4) может быть понижен, если ввести новую переменную $y$

$$(2.7)\qquad y^2 = \delta'/\delta.$$

Очевидно, система (2.4) перейдет в систему двух уравнений первого порядка

$$(2.8)\qquad (1/3)\zeta + (1/A)\zeta^2 - (2/3)\lambda\zeta' = (1 + \lambda\zeta/3)y^2;$$
$$-[(2/3)\lambda + \zeta'] = \zeta(y^2 + 2y'/y).$$

В приложении 1 будет показано, что искомое решение должно проходить через точки I и II:

$$(2.9)\qquad \mathrm{I}\ (\lambda = \lambda_1;\ y_1 = (2/3)\lambda_1;\ \zeta_1 = 0);$$

$$(2.10)\qquad \mathrm{II}\ (\lambda = \lambda_2;\ y_2 = -(2/3)\lambda_2;\ \zeta_2 = 0).$$

Обе точки I и II для системы (2.8) являются особыми. Характер особенности седловой. Разложение искомого решения имеет вид
в точке I:

$$y = \frac{2}{3}\lambda_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda_1^3}{27}\right)(\lambda - \lambda_1) + \ldots$$

$$\zeta = -\frac{2}{3}\lambda_1(\lambda - \lambda_1) + \left(-\frac{1}{12} + \frac{\lambda_1^3}{9}\right)(\lambda - \lambda_1)^3 + \ldots$$

в точке II:

$$y = -\frac{2}{3}\lambda_2 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda_2^3}{27}\right)(\lambda - \lambda_2) + \ldots$$

$$\zeta = -\frac{2}{3}\lambda_2(\lambda - \lambda_2) + \left(-\frac{1}{12} + \frac{\lambda_2^3}{9}\right)(\lambda - \lambda_2)^2 + \ldots$$

Значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ неизвестны. Дополнительное интегральное соотношение, получающееся при интегрировании (2.7) с учетом граничных условий (2.5), (2.6)

$$\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} y^2 d\lambda = \ln n \tag{2.11}$$

замыкает задачу и позволяет найти единственное решение. Это решение строится путем численного интегрирования от точек I и II так, чтобы в особой точке $\lambda = 0$ обеспечить непрерывное смыкание одной из искомых функций, например $\zeta$. При фиксированном значении $\lambda_1$ этого можно добиться подбором $\lambda_2$. В силу особого характера точки $\lambda = 0$ значение другой функции $y$ получится в этой точке непрерывным. Значения $\zeta$ и $y$ будут связаны соотношением, вытекающим из (2.8) при $\lambda = 0$

$$y_0^2 = (1/3)\,\zeta_0 + (1/A)\,\zeta_0^2.$$

Начальная точка интегрирования $\lambda_1$ находится итерациями, пока не будет выполнено интегральное соотношение (2.11).

**3. Выбор эмпирических постоянных.** Как уже отмечалось, автомодельное решение зависит от параметра $A$, в определение которого входит отношение эмпирических постоянных $\alpha^2/\nu$. Значение $\alpha^2/\nu$ может быть выбрано сравнением безразмерного профиля плотности, полученного экспериментально и теоретически. Для этого нужно перейти к новым переменным $\bar{\lambda}$, $\bar{\delta}$

$$\bar{\delta} = (n\delta - 1)/(n - 1) = (\rho - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_2);$$
$$\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_1 = r/r_1(t),$$

где $r_1(t)$ соответствует фронту перемешивания в сторону тяжелого вещества. Теоретический профиль изменяется в широких пределах в зависимости от значения $\alpha^2/\nu$. На фиг. 1 представлено сравнение профилей плотности $\bar{\delta}(\bar{\lambda})$ при $n = 10$.

Значение постоянной $\alpha^2/\nu$ можно также оценить теоретически, используя результаты работ [2, 3]. В [2] получено, что после выключения ускорения ширина области перемешивания развивается по степенному закону

$$L \sim t^n, \quad n = 1/(1 + \nu/8\alpha^2\eta_0^2). \tag{3.1}$$

Величина $\eta_0$ определяет эффективную ширину; если последнюю определить как зону, где $0{,}1 \leqslant \bar{\delta} \leqslant 0{,}9$, то $\eta_0 = 0{,}906$.

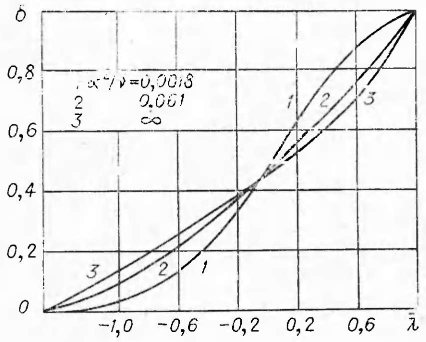
Из теоретического рассмотрения известно [3], что турбулентность затухает по закону 2/7, т. е. характерная турбулентная длина $l$ зависит от времени следующим образом:

$$l \sim t^{2/7}. \tag{3.2}$$

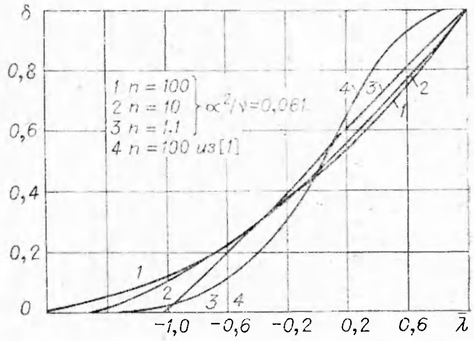
Приравнивая степени в соотношениях (3.1), (3.2), получим выражение для $\alpha^2/\nu$

$$\alpha^2/\nu = 1/20\eta_0^2 = 0{,}061.$$

Как следует из фиг. 1, безразмерный профиль $\bar{\delta}$, начиная с некоторого значения параметра $\alpha^2/\nu$, слабо зависит от точности его определения. В широком диапазоне $0{,}061 < \alpha^2/\nu < \infty$ различие между кривыми *2*




Ф и г. 1




Ф и г. 2

и 3 фиг. 1 не является существенным. Некоторые особенности случая $\alpha^2/\nu = \infty$ вынесены в приложение 2.

Другая эмпирическая постоянная $\alpha$ выбирается из сравнения теоретической ширины $L$ с экспериментальной. Для этого предлагается в опыте измерять ширину $L_1$, отсчитываемую от первоначального положения границы раздела в сторону тяжелого вещества. Предпочтительнее сравнивать $L_1$, а не $L_2$, так как в сторону тяжелого вещества теоретический профиль плотности имеет четкий фронт, тогда как в сторону легкого этот фронт может быть размыт, особенно при больших значения $n$ (фиг. 2).

Для определения постоянной $\alpha$ в формуле для $L_1$

$$L_1 = (\alpha^2/9)(\lambda_1 - \lambda_2)^2\lambda_1 g_0 t^2$$

нужно знать значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$. На фиг. 3 даны графики величин — $\lambda_1/\lambda_2$ и $\lambda_1^3$ в зависимости от $\ln n$ при $\alpha^2/\nu = 0{,}061$.

Оценим значение $\alpha$, сравнивая полную ширину $L$

$$L = (\alpha^2/9)(\lambda_1 - \lambda_2)^3 g_0 t^2 \tag{3.3}$$

с шириной, полученной в работе [1],

$$L = 0{,}084 g_0 t^2 \ln n. \tag{3.4}$$

Последняя формула справедлива при значениях $n$, близких к 1. Значение $(\lambda_1 - \lambda_2)^3$ в окрестности $n = 1$ можно с хорошей точностью описать формулой

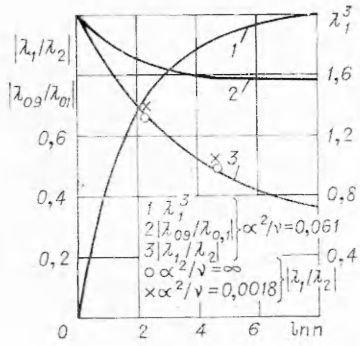
$$(\lambda_1 - \lambda_2)^3 = 9 \ln n. \tag{3.5}$$

Тогда, сравнивая (3.3) и (3.4), с учетом (3.5) получим

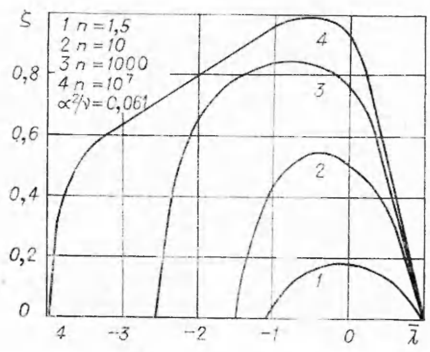
$$\alpha^2 = 0{,}084 \ (\alpha = 0{,}29).$$

Напомним, что коэффициент в формуле (3.4) заимствован из работы [1], в которой при определении его значения использованы опытные данные, относящиеся к перемешиванию струйных течений. Поэтому при прямых опытах по гравитационному перемешиванию значение постоянной $\alpha$ может получиться несколько другим. Это замечание также относится и к выводу постоянной $\alpha^2/\nu$, ее значение оценено теоретически и нуждается в экспериментальной проверке.

**4. Обсуждение результатов.** Отметим несколько особенностей полученного решения. Перемешивание протекает несимметрично, причем зна-




Фиг. 3




Фиг. 4

чение — $\lambda_1/\lambda_2$ определяется в основном начальным отношением плотностей $n$ и слабо зависит от параметра $\alpha^2/\nu$. На фиг. 3 точками и крестиками нанесены значения — $\lambda_1/\lambda_2$ соответственно при $\alpha^2/\nu = \infty$ и $\alpha^2/\nu = 0{,}018$. Эту зависимость для $\alpha^2/\nu = 0{,}061$ с хорошей точностью можно описать формулой

$$-\lambda_1/\lambda_2 = 1 + 0{,}222 \ln n.$$

Если $n \to 1$, то $-\lambda_1/\lambda_2 \to 1$, т. е. при малых отношениях плотностей перемешивание протекает почти симметрично; если $n \to \infty$, то $-\lambda_1/\lambda_2 \to \infty$, но так, что $\lambda_1$ конечно (см. фиг. 3). Поэтому при больших отношениях плотностей перемешиванием в сторону легкого захватывается бо́льшая область и в пределе ширина ее неограниченно растет. Однако если ширину мерить по области, где $0{,}1 \leqslant \bar{\delta} \leqslant 0{,}9$, то степень несимметрии, определяемая отношением — $\lambda_{0,9}/\lambda_{0,1}$, конечна при $n \to \infty$ и, как следует из фиг. 3, равна 0,78.

Из фиг. 2 вытекает, что профиль безразмерной плотности $\bar{\delta}$, отнесенный к безразмерному расстоянию $\bar{\lambda}$, при фиксированном значении постоянной $\alpha^2/\nu$ зависит от отношения плотностей $n$. Эта зависимость в основном имеет место при значениях $n < 10$ (кривые *2* и *3*) и в области малой плотности $\bar{\delta} < 0{,}1$. Если $n > 10$, то профили $\delta(\bar{\lambda})$ слабо различаются между собой (кривые *1* и *2*).

На фиг. 4 приведены профили $\zeta(\bar{\lambda})$ для разных $n$. Интересно, что точка максимального значения $\zeta$ с ростом $n$ смещается из точки $\bar{\lambda} = 0$ в точку $\bar{\lambda} = -2{,}57$ (при $n = 1000$) и снова возвращается в точку $\bar{\lambda} = 0$. Конфигурация кривой $\zeta$ при этом существенно меняется.

Таким образом, процесс перемешивания протекает несимметрично, причем несимметрия тем больше, чем больше начальный перепад плотностей $n$. Результаты работы [2], где область перемешивания симметрична и профиль $\bar{\delta}(\bar{\lambda})$ не зависит от $n$, могут быть использованы только в окрестности $n = 1$ при условии, что эмпирическая постоянная выбирается из совпадения профилей. Так как в [2] показано, что решение работы [1] слабо отличается от решения [2], то сделанный вывод относится и к решению, построенному в [1]. Если же считать (как это сделано в п. 3 при вычислении постоянной $\alpha$), что области, охваченные перемешиванием, в [1] и в данной работе совпадают, то профили $\bar{\delta}(\bar{\lambda})$ получатся существенно разными при любом начальном перепаде плотностей (на фиг. 2 кривая *4* взята из [1] для $n = 100$). В отличие от [1] учет временной производной в уравнении баланса кинетической энергии приводит к решению с негладким примыканием профиля плотности на фронтах перемешивания.

*Приложение 1.* Покажем, что искомое решение должно выходить из точки I (2.9) и входить в точку II (2.10). Для этого нужно установить, что $y_1=(2/3)\lambda_1$. Рассмотрим все допустимые значения $y_1: y_1=0$; $y_1=\infty$; $y_1>0$ — конечно.

1) $y_1=0$. Система уравнений (2.8) в окрестности точки ($\lambda_1$, 0, 0) примет вид

$$\zeta' = (3/2\lambda_1)[(1/3)\zeta - y^2];\ y' = -\lambda_1 y/3\zeta.$$

Можно показать, что среди решений, выходящих из особой точки ($\lambda_1$, 0, 0), нет искомого, удовлетворяющего очевидному условию $\zeta>0$.

2) $y_1=\infty$. В этом случае систему (2.8) можно заменить урезанной

$$\zeta' = -(3/2\lambda_1)y^2,\ y' = (3/4\lambda_1)y^3/\zeta.$$

Поделим одно уравнение на другое и проинтегрируем

$$dy/d\zeta = -y/2\zeta,\ y = c/\sqrt{\zeta},$$

$c$ — постоянная интегрирования. Получим, что турбулентный поток на фронте области перемешивания отличен от нуля, так как

$$lv\partial\rho/\partial x \sim \zeta\delta \approx \zeta y^2 = c,$$

что противоречит физическому смыслу.

3) $y_1>0$ — постоянная. Урезанная система примет вид

$$-(2/3\lambda_1+\zeta') = \zeta\left(y_1^2+2y'/y_1\right),\quad -2\lambda_1\zeta'/3 = y_1^2.$$

Оказывается, что только при $y_1=2\lambda_1/3$ существует кривая, выходящая из точки с требуемыми свойствами.

Аналогично исследуется точка II и показывается, что

$$y_2 = -2\lambda_2/3.$$

*Приложение 2.* Пусть $\nu=0$. Тогда первое уравнение системы (2.4) после умножения на $3\delta\zeta$ и несложных преобразований примет вид

$$\delta\zeta^2 - \lambda(\delta\zeta^2)' - 3\zeta\delta' = 0.$$

Подставив $\zeta\delta'$ во второе уравнение системы (2.4), получим

$$2\delta' = (\delta\zeta^2)''.$$

После интегрирования

$$2(\delta-1) = (\delta\zeta^2)' \text{ при } \lambda>0,\ 2(\delta-1/n) = (\delta\zeta^2)' \text{ при } \lambda<0.$$

Здесь для определения постоянной интегрирования использованы граничные условия (2.5), (2.6). Обозначим

$$z = \zeta^2\delta$$

и окончательно получим

$$6(\sqrt{\delta})' = \sqrt{z} - 2\lambda(\sqrt{z})',$$

$$z' = \begin{cases} 2(\delta-1), & \lambda>0 \\ 2(\delta-1/n), & \lambda<0 \end{cases}$$

с граничными условиями (2.5), (2.6). Отсюда вытекает, что функция $z$ при $\lambda = 0$ терпит излом. Производная от плотности $\delta'$ в точке $\lambda = 0$ непрерывна. Решение можно построить численно. На фиг. 1 изображен профиль плотности для $n = 10$.

*Поступила 21 VII 1975*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Беленький С. З., Фрадкин Е. С.** Теория турбулентного перемешивания.— «Труды ФИАН им. Лебедева», 1965, т. 29, с. 207—238.
2. **Неуважаев В. Е.** К теории турбулентного перемешивания.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 222, № 5, с. 1053—1056.
3. **Колмогоров А. Н.** К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости.— «Докл. АН СССР», 1941, т. 31, № 6, с. 538—541.

---

УДК 532.542

# О КОЛЕБАНИЯХ ГАЗА В ТРУБЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ АКТИВНОЙ НАГРУЗКОЙ

*А. П. Владиславлев, В. М. Писаревский, Ю. Б. Пономаренко*

(*Москва*)

Вследствие особенностей рабочего процесса в цилиндре поршневого компрессора в присоединенной трубопроводной системе возникают колебания давления и скорости транспортируемой среды — пульсирующий поток газа. Колебательные газодинамические процессы в трубах приводят к существенному снижению эффективности и надежности эксплуатации всей компрессорной установки. Одним из наиболее результативных методов снижения влияния пульсирующего потока газа является согласование начального участка. Сущность метода заключается в установке после ближайшего к цилиндру участка трубопровода сосредоточенного сопротивления (нагрузки), величина которого равна волновому сопротивлению трубы [1]. Поскольку колебания газа являются низкочастотными, сопротивление нагрузки, как и в стационарном потоке, оказывается активным и нелинейным [2]. В связи с этим возможность согласования нелинейным сопротивлением нуждается в дополнительном исследовании.

Одномерное неустановившееся движение газа в круглой трубе постоянного сечения со скоростью движения, много меньшей скорости звука, описывается системой уравнений [3]

$$(1)\qquad \dot{\rho} + w' = 0,\ \dot{w} + (w^2/\rho + \rho^\gamma/\gamma)' + (\lambda/\rho)w|w| = 0\ (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Система (1) записана в безразмерном виде (длина трубы, скорость звука и плотность равновесного газа равны 1); $w$ — поток; $\rho$ — относительная плотность; $\gamma$ — показатель политропы; $\lambda$ — безразмерный коэффициент гидравлического сопротивления. Точка означает дифференцирование по времени $t$; штрих — по координате $x$.

Граничные условия имеют вид

$$(2)\qquad w = f(\omega t)\ (x = 0);\ (\rho^\gamma - 1)/\gamma = (\eta/\rho)w|w|\ (x = 1),$$