

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА
ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ
В СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ПЛАЗМЕ
В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

Г. Я. Дынникова
(Москва)

Расчет функции распределения электронов $f(U)$ оказывается необходимым при решении ряда задач, связанных с определением эффективности процессов в плазме. Функция распределения электронов описывается интегродифференциальным уравнением, решение которого представляет известные трудности. Существует ряд методов численного решения [1—4], а также аналитического исследования функции распределения электронов [5—8]. Однако поиск более простых методов решения, позволяющих находить основные энергетические характеристики электронов с минимальными затратами времени и удовлетворительной точностью, продолжает оставаться актуальной задачей.

В данной работе найдено приближенное аналитическое выражение для функции распределения электронов, обладающее большой простотой и наглядностью и позволяющее вычислять $f(U)$ при выполнении определенных условий с высокой точностью. В тех случаях, когда точность оказывается недостаточной, это выражение может быть использовано в качестве начального приближения в итерационном процессе. Решение найдено с учетом неупругих соударений первого рода. Кроме того, получено выражение для функции распределения электронов с учетом соударений второго рода, которое, хотя и не является явным, позволяет легко вычислить $f(U)$.

В квазистационарном случае пространственно однородного газа и почти изотропной функции распределения электронов по скоростям, а также малой степени ионизации газа кинетическое уравнение для изотропной части функции распределения электронов по скоростям (выраженной как функция энергии) с учетом неупругих соударений имеет вид [2]

$$(1) \quad \frac{1}{3} \frac{E^2 U e^2}{N Q_{\text{тр}}} \frac{df}{dU} + \frac{2m}{M} U^2 N Q_{\text{тр}} \left(f + kT \frac{df}{dU} \right) + N \epsilon_{\text{вп}} U Q_{\text{вп}} \left(f + kT \frac{df}{dU} \right) + \sum_i^{U+U_i} \int_U^{U+U_i} N U Q_i(U) f(U) dU,$$

где E — напряженность электрического поля; U , e , m — энергия, заряд и масса электрона; M — масса молекулы; k — постоянная Больцмана; N — плотность молекул; T — температура газа; U_i — энергия, теряемая электроном при неупругих соударениях с молекулами; $Q_{\text{тр}}$ — транспортное сечение рассеяния электрона на молекуле; Q_i — сечения неупругого взаимодействия; $\epsilon_{\text{вп}}$ — вращательная постоянная; $Q_{\text{вп}}$ определяется формулой, аналогичной [9, 10]:

$$Q_{\text{вп}} = \sum_i \sum_n \frac{N_i}{N} \frac{U_{i,i+n}^2}{\epsilon_{\text{вп}} kT} Q_{i,i+n}.$$

Здесь N_i — плотность молекул на i -м вращательном уровне; $U_{i,i+n}$, $Q_{i,i+n}$ — энергия и сечение перехода с i -го вращательного уровня на $(i+n)$ -й.

Первое слагаемое описывает увеличение энергии электронов в электрическом поле, второе — потери энергии при упругих столкновениях,

третье — потери на возбуждение вращательных уровней молекул в диффузионном приближении [1, 10] и в предположении равновесного распределения молекул по вращательным уровням, четвертое — передачу энергии в колебательные и электронные степени свободы, а также потери энергии на ионизацию с учетом соударений первого рода.

Введем обозначения $A = \frac{1}{3} \frac{E^2 U_e^2}{N Q_{\text{тр}}} + \frac{2m}{M} U^2 N Q_{\text{тр}} kT + \varepsilon_{\text{вр}} U N Q_{\text{вр}} kT$,
 $B = \frac{2m}{M} U^2 N Q_{\text{тр}} + N \varepsilon_{\text{вр}} U Q_{\text{вр}}$, $C_i = N U Q_i$, с использованием которых уравнение (1) примет вид

$$(2) \quad A \frac{df}{dU} + Bf + \sum_i \int_U^{U+U_i} C_i(U') f(U') dU' = 0.$$

Будем искать решение $f(U)$ в форме

$$f(U) = f_0 \exp \left[- \int_0^U Y(U') dU' \right],$$

при этом $df/dU = -Y(U)f(U)$. Отметим, что функция $Y(U)$, как видно из (2), везде положительна, так как A , B и C_i положительны. Это требуется нам в дальнейшем.

Покажем, что если $Y(U') \gg 1/U_i$ в области $U \leq U' \leq U + \varepsilon$, где ε удовлетворяет неравенству $1/Y(U) \ll \varepsilon < U_i$ и относительное изменение функций $Y(U)$ и $C_i(U)$ невелико, то справедливо приближение

$$(3) \quad \int_U^{U+U_i} C_i(U') f(U') dU' \approx C_i(U) f(U) / Y(U).$$

В самом деле, если $Y(U)$ велико, то $f(U)$ — быстроспадающая функция и основной вклад в интеграл будет давать область размера ε . Следовательно

$$\begin{aligned} \int_U^{U+U_i} C_i(U') f(U') dU' &\approx f(U) \int_0^\varepsilon C_i(U+U') \exp \left[- \int_0^{U'} Y(U'') dU'' \right] dU' \approx \\ &\approx f(U) C_i(U) \int_0^\varepsilon e^{-Y(U)U'} dU' = \frac{f(U) C(U)}{Y(U)} (1 - e^{-Y(U)\varepsilon}) \approx f(U) C(U) / Y(U). \end{aligned}$$

Приближение (3) позволяет преобразовать интегродифференциальное уравнение (2) в алгебраическое относительно $Y(U)$: $AY^2 - BY - C = 0$, $C = \sum C_i$, которое имеет два корня — положительный и отрицательный. Как говорилось выше, $Y(U) > 0$, поэтому

$$(4) \quad Y(U) = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} + \sqrt{\frac{B^2}{A^2} + \frac{4C}{A}} \right)$$

($Y(U)$ — логарифмическая производная функции $f(U)$, т. е. равна тангенсу угла наклона графика $f(U)$, построенного в логарифмическом масштабе).

Рассмотрим физический смысл величин, входящих в выражение $Y(U)$. Введем обозначения $U_{\text{упр}} = 2mU/M$, $U_{\text{вр}} = Q_{\text{вр}} \varepsilon_{\text{вр}} / Q_{\text{тр}}$, $U_e = E_e / (N Q_{\text{тр}})$, $U_T = kT$. Тогда

$$\frac{B}{A} = \frac{U_{\text{упр}} + U_{\text{вр}}}{\frac{1}{3} U_e^2 + U_{\text{упр}} U_T + U_{\text{вр}} U_T}, \quad \frac{C}{A} = \frac{1}{\frac{1}{3} U_e^2 + U_{\text{упр}} U_T + U_{\text{вр}} U_T} \sum_i \frac{Q_i}{Q_{\text{тр}}},$$

где U_e — характерная величина приращения энергии электрона в электрическом поле между двумя соударениями с молекулами; $U_{\text{упр}}$, $U_{\text{вр}}$ — характерные величины энергии, теряемой электроном при упругом столкно-

вении и при столкновении с возбуждением вращений; U_T — тепловая энергия молекул газа.

Решение (4) получено в предположении

$$(5) \quad Y(U) \gg 1/U_i.$$

Из (4) видно, что $Y(U) \geq B/A$, $Y(U) \geq \sqrt{C/A}$ и в то же время $Y(U) \leq B/A + \sqrt{C/A}$. Значит, для выполнения условия (5) необходимо, чтобы по крайней мере одна из величин

$$\alpha = \frac{BU_{\min}}{A} = \frac{(U_{\text{упр}} + U_{\text{вр}}) U_{\min}}{\frac{1}{3} U_e^2 + U_{\text{упр}} U_T + U_{\text{вр}} U_T}, \quad U_{\min} = \min_i \{U_i\},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{CU_{\min}^2}{A}} = \sqrt{\frac{\sum Q_i}{Q_{\text{тр}}} \frac{U_{\min}^2}{\frac{1}{3} U_e^2 + U_{\text{упр}} U_T + U_{\text{вр}} U_T}}$$

была много больше единицы.

На рис. 1 приведены графики функций α и β для холодной плазмы ($T = 300$ К) чистой окиси углерода при характерных для электроионизационных СО-лазеров значениях отношения E/N : 1 — $0,707 \cdot 10^{-16}$, 2 — $0,5 \cdot 10^{-16}$ В·см². На рис. 2 представлены использованные в расчетах зависимости $Q_i(U)$ из [11], модифицированные согласно [12]. Эффективные сечения возбуждения вращательных степеней свободы взяты такими же, как и в [12].

Из рис. 1 видно, что при заданных значениях параметров в области, где влияние неупругих соударений существенно, неравенство (5) выполняется. В допороговой области ($U \leq 0,3$ эВ) можно ожидать заметного отличия значения $Y(U)$, вычисленного по формуле (4), от точного решения, так как приближение (3) в этой области несправедливо.

На рис. 3 изображены зависимости $Y(U)$, полученные по формуле (4) (сплошные линии) и путем численного решения уравнения (1) (штриховые) при $E/N = 0,707 \cdot 10^{-16}$, $0,5 \cdot 10^{-16}$, $0,354 \cdot 10^{-16}$ В·см² (кривые 1—3). Видно, что имеет место хорошее согласие всюду, кроме допороговой области. Однако протяженность этой области относительно невелика, а так как в выражение для функции распределения входит интеграл от $Y(U)$, то можно ожидать, что влияние ее на $f(U)$ будет незначительным.

На рис. 4 показаны графики функций $f(U)$ (обозначения те же, что и на рис. 3). Видно, что, несмотря на довольно грубое приближение (3), имеет место хорошее согласие результатов. Точность решения в допороговой области можно повысить, если вместо приближения (3) взять аппроксимацию интеграла, используя малость величины $U_i Y(U)$:

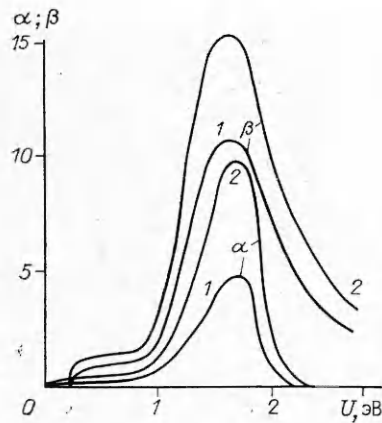
$$\int_U^{U+U_i} C_i f dU \approx f(U) e^{-(U_i-U)Y(U)} \int_U^{U+U_i} C_i dU \approx f(U) [1 - (U_i - U) Y] \int_U^{U+U_i} C_i dU.$$

Тогда

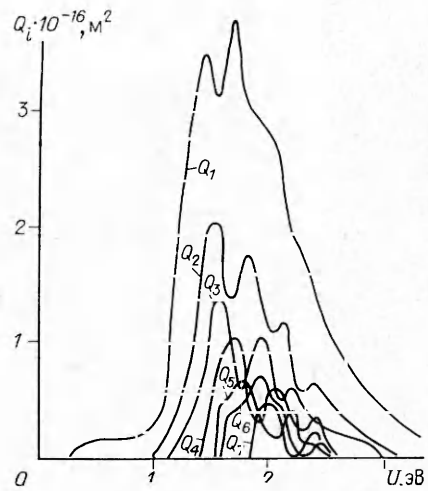
$$Y(U) = \frac{B + \sum \int_U^{U+U_i} C_i dU}{A + \sum (U_i - U) \int_U^{U+U_i} C_i dU}.$$

При этом суммирование надо проводить только по тем i , для которых $Y U_i \leq 1$, что требует дополнительного анализа. Практически обычно оказывается достаточным взять один член суммы, соответствующий минимальному значению U_i .

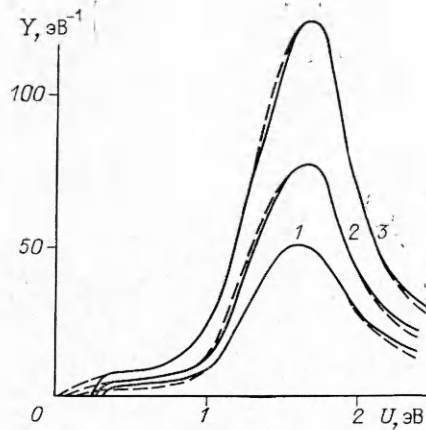
Как уже говорилось выше, когда требуется более высокая точность, приближенное решение, полученное в данной работе, может быть исполь-



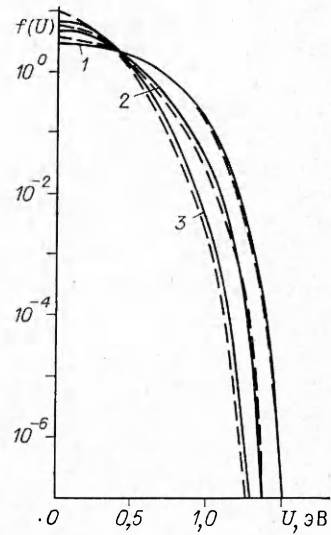
Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

зовано в качестве начального приближения $f_1(U)$ в итерационном процессе [3], а следующим приближением будет $Y(U) = \frac{1}{A} \left(B + \frac{1}{f_1(U)} \times \right.$

$$\left. \times \sum \int_U^{U+U_i} C_{if_1}(U) dU \right).$$

Описанный выше метод может быть обобщен на случай, когда необходимо учитывать влияние соударений второго рода. Уравнение для $f(U)$ при этом имеет вид

$$(6) \quad A \frac{df}{dU} + Bf + \sum_i \int_U^{U+U_i} C_{if} dU - \sum_j \int_{U-U_j}^U Q_{-j} U N_j f dU = 0.$$

Переходя к переменной Y и аппроксимируя интегралы в третьем слагаемом по формуле (3), получим

$$(7) \quad Y(U) = \frac{1}{2} \left(\frac{B'}{A} + \sqrt{\left(\frac{B'}{A} \right)^2 + \frac{4C}{A}} \right),$$

где $B' = B - \frac{1}{f(U)} \sum_j \int_{U-U_j}^U Q_{-j} N_j U' f(U') dU'$. Выражение (7) в отличие от (4)

не является явным, так как для вычисления $Y(U)$ в точке $U = U_0$ необходимо знать $Y(U)$ при $U < U_0$. Однако численное нахождение $Y(U)$ и $f(U)$ в этом случае гораздо проще решения интегродифференциального уравнения (6).

Таким образом, показано, что приближенный метод расчета функции распределения электронов по энергии прост и эффективен. Он дает возможность простого анализа влияния различных процессов и тех или иных параметров на функцию распределения и соответственно на макроскопические характеристики слабоионизованной плазмы и позволяет при достаточно малых значениях E/N и температуры плазмы, что реализуется во многих практических задачах, находить функцию распределения электронов с хорошей точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sherman B. The difference-differential equation of electron energy distribution in a gas // J. Math. Anal. Appl.— 1960.— V. 1, N 3.
2. Frost L. S., Phelps A. V. Rotation and momentum transfer cross section for electrons in H_2 and N_2 from transport coefficients // Phys. Rev.— 1962.— V. 127, N 5.
3. Lucas J. Energy distributions for electron swarms in hydrogen at high values of E/p // Intern. J. Electron.— 1969.— V. 27, N 3.
4. Смит К., Томсон Р. Численное моделирование газовых лазеров.— М.: Мир, 1981.
5. Коврижных Л. М. Влияние неупругих соударений на распределение электронов по скоростям // ЖЭТФ.— 1959.— Т. 37, № 2 (8).
6. Каган Ю. М., Лигущенко Р. И. О функции распределения электронов по энергиям в положительном столбе разряда // ЖТФ.— 1964.— Т. 34, № 5.
7. Луковников А. И., Фетисов Е. П., Терехов Е. С. О функции распределения свободных электронов в низкотемпературной плазме // ЖТФ.— 1970.— Т. 40, вып. 9.
8. Цендин Л. Д. О влиянии неупругих ударов на функцию распределения электронов в электрическом поле // ЖТФ.— 1974.— Т. 41, вып. 11.
9. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма/Под ред. Б. Я. Мойжеса и Г. Е. Пикуса.— М.: Наука, 1973.
10. Бакшт Ф. Г., Иванов В. Г. Функция распределения электронов в приэлектродном слое плазмы молекулярного газа // ЖТФ.— 1984.— Т. 5, № 10.
11. Shulz G. I. Vibrational excitation of N_2 , CO_2 and H_2 by electron impact // Phys. Rev.— 1964.— V. 135A, N 4.
12. Басов М. Г., Долиннина В. И., Ковш И. Б. и др. Самосогласованный анализ кинетики элементарных процессов в ЭИ CO -лазере.— М., 1984.— (Препринт/ФИАН; № 183).

Поступила 13/VII 1987 г.

УДК 535 : 621.373.8 : 539

ДИНАМИКА ПЛАЗМЫ ОПТИЧЕСКОГО ПРОБОЯ ПРИ ГЛУБОКОМ ПРОПЛАВЛЕНИИ МЕТАЛЛОВ

Р. В. Арутюнян, Л. А. Большов, М. Ф. Каневский,
К. А. Криворучко, В. П. Решетин, Р. И. Солоухин

(Минск)

Перспективы использования импульсно-периодических CO_2 -лазеров для размерной обработки (лазерная резка, сварка и св рление) стимулировали экспериментальные и теоретические исследования взаимодействия импульсно-периодического (ИП) излучения с металлами. В [1—4] развита теплогидродинамическая (ТГ) модель глубокого проплавления импульсно-периодическим излучением. Согласно [1—4], движение расплава в камере циклическое. Удержание расплава на стенках происходит за счет вертикального разгона расплава во время импульса давлением паров и последующего торможения его движения гравитационно-капиллярными силами. Средняя температура в оптимальном режиме воздействия близка к темпе-