УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО ТЕЛА

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

В нелинейной постановке в актуальных переменных исследована антиплоская упругая деформация однородного изотропного предварительно растянутого цилиндрического тела в условиях несжимаемости, отсутствия объемных сил и при постоянстве вдоль образующей боковой нагрузки. Получена краевая задача для осевого смещения в декартовых и комплексных переменных, в терминах упругого потенциала указаны достаточные условия ее эллиптичности. Установлена аналогия с плоским безвихревым течением газа. Дано решение задачи для материалов Муни и Ривлина — Сондерса, моделирующих большие упругие деформации резиноподобных материалов. Рассмотрены осесимметричные решения.

Многие важные результаты теории упругости получены при изучении частных видов деформации. В этих случаях решение задач упрощается: сокращается число уравнений, искомых функций и их аргументов. Для подобных деформаций в ряде случаев применим комплексный анализ, существенно упрощающий исследование. К частному виду деформаций, наряду с плоской и осесимметричной, относится и антиплоская деформация. Антиплоская деформация в различных аспектах исследовалась в ряде работ [1–4], ниже она рассматривается в нелинейной постановке в переменных актуального состояния применительно к цилиндрическому телу.

При антиплоской деформации цилиндрического тела перемещения его частиц параллельны образующей и не зависят от аксиальной координаты. В актуальной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 с осью x_3, параллельной образующей цилиндра, и осями $x_1 = x$, $x_2 = y$ в плоскости его среднего поперечного сечения эта деформация при наличии предварительного однородного сохраняющего объем растяжения определяется перемещениями

$$u_1 = (1-e)x_1, \quad u_2 = (1-e)x_2, \quad u_3 = (1-e^{-2})x_3 + w(x_1, x_2), \tag{1}$$

где e — задаваемая постоянная (при $e = 1$ предварительное растяжение отсутствует); $w(x, y)$ — подлежащая определению дважды непрерывно дифференцируемая в области поперечного сечения S (с границей L) функция. Получим статические соотношения нелинейной упругости в данном случае, полагая материал однородным и изотропным с заданной внутренней энергией, объемные силы отсутствующими, а внешние поверхностные силы не зависящими от аксиальной координаты.

В актуальных переменных мерами деформаций и напряжений являются симметричные тензоры Альманси E_{kl} и Коши P_{kl}, а определяющим уравнением служит закон Мурнагана, связывающий эти тензоры [5]. Компоненты E_{kl} и базисные инварианты E_k деформации, определяемые в виде

$$2E_{kl} = \frac{\partial u_l}{\partial u_k} + \frac{\partial u_k}{\partial u_l} - \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}, \quad E_1 = E_{mm}, \quad 2E_2 = E_{nn}E_{mm} - E_{nm}E_{mn}, \quad E_3 = |E_{kl}|$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование), при антиплоской деформации (1) выражаются через осевое смещение $w(x, y)$:

$$E_{11} = \frac{1-e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2, \quad E_{22} = \frac{1-e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2, \quad E_{33} = \frac{1-e^{-4}}{2},$$
$$E_{12} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}, \quad E_{23} = \frac{e^{-2}}{2}\,\frac{\partial w}{\partial y}, \quad E_{31} = \frac{e^{-2}}{2}\,\frac{\partial w}{\partial x}; \tag{2}$$

$$2E_1 = -(e-e^{-1})^2(2+e^{-2}) - |\nabla w|^2, \quad 4E_2 = (e-e^{-1})^2(e^2-2-2e^{-2}) - (2-e^2)|\nabla w|^2,$$
$$8E_3 = (e-e^{-1})^2(e^2-e^{-2}) - (1-e^2)|\nabla w|^2 \tag{3}$$

и, следовательно, являются функциями поперечных координат цилиндра.

Для инвариантов (3) выполняются соотношения

$$E_1 \leqslant 0, \qquad 4E_2 = (e-e^{-1})^2(1-e^2) + 2(2-e^2)E_1,$$
$$8E_3 = (e-e^{-1})^2(1-e^2) + 2(1-e^2)E_1, \qquad E_1 - 2E_2 + 4E_3 = 0, \tag{4}$$

в силу которых уравнение неразрывности принимает вид условия несжимаемости

$$\rho = \rho_0\sqrt{1 - 2E_1 + 4E_2 - 8E_3} = \rho_0$$

(ρ_0, ρ — исходная и актуальная плотности материала). Таким образом, при антиплоской деформации материал несжимаем.

Для несжимаемого материала закон Мурнагана имеет вид [5, 6]

$$P_{kl} = -q_0\delta_{kl} + (\delta_{km} - 2E_{km})\,\frac{\partial U}{\partial E_{lm}}, \tag{5}$$

где U — плотность внутренней энергии (упругий потенциал); q_0 — лагранжев множитель. Для однородного изотропного материала упругий потенциал является функцией базисных инвариантов деформации. В силу связей (4) между инвариантами этот потенциал зависит только от первого из них: $U = U(E_1)$.

Если воспользоваться выражением тензорного градиента первого инварианта [6] $\partial E_1/\partial E_{lm} = \delta_{ml}$, то получим $\partial U/\partial E_{lm} = U'\delta_{ml}$. Тогда из (5) следует, что при антиплоской деформации закон Мурнагана представим квазилинейной зависимостью напряжений от деформаций

$$P_{kl} = -q\delta_{kl} - 2U'(E_1)E_{kl} \qquad (q = q_0 - U'), \tag{6}$$

где q — гидростатическое давление. Следствием формул (2) и (6) является выражение напряжений через гидростатическое давление и осевое смещение:

$$P_{11} = -q - (1-e^2)U' + U'\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2, \qquad P_{22} = -q - (1-e^2)U' + U'\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2,$$
$$P_{33} = -q - (1-e^{-4})U', \quad P_{12} = U'\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}, \quad P_{23} = -e^{-2}U'\,\frac{\partial w}{\partial y}, \quad P_{31} = -e^{-2}U'\,\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{7}$$

На верхнем S^+ и нижнем S^- основаниях цилиндра внешние нормали имеют постоянные компоненты: $(n_l^{\pm}) = (0, 0, \pm 1)$, а на его боковой поверхности S^* эти компоненты зависят от поперечных координат: $(n_l) = (n_1(x, y), n_2(x, y), 0)$. Поэтому векторы напряжений $(p_k^{\pm})$, (p_k) на соответствующих площадках, представляемые формулами $p_k^{\pm} = P_{kl}n_l^{\pm} = \pm P_{k3}$, $p_k = P_{kl}n_l = P_{k1}n_1 + P_{k2}n_2$, в зависимости от смещения и давления имеют вид

$$p_1^{\pm} = \mp e^{-2}U'\,\frac{\partial w}{\partial x}, \quad p_2^{\pm} = \mp e^{-2}U'\,\frac{\partial w}{\partial y}, \quad p_3^{\pm} = \mp[q + (1-e^{-4})U']; \tag{8}$$

$$p_1 = -[q + (1 - e^2 U')]n_1 + U' \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad p_2 = -[q + (1 - e^2 U')]n_2 + U' \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial y},$$
$$p_3 = -e^{-2} U' \frac{\partial w}{\partial n}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что если поверхностная нагрузка не зависит от x_3, то на поверхности от x_3 не зависит и q. В этом случае можно принять, что давление не зависит от этой координаты во всем объеме цилиндра: $q = q(x, y)$. Тогда согласно (7) от x_3 не зависят и все напряжения: $P_{kl} = P_{kl}(x, y)$. В силу этого свойства и представлений (7) напряжений уравнения равновесия в отсутствие объемных сил ($\partial P_{kl}/\partial x_l = 0$) являются уравнениями для определения давления и смещения в сечении S цилиндра:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}\Big[-q - (1 - e^2)U' + U'\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 \Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big(U' \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\Big) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial y}\Big[-q - (1 - e^2)U' + U'\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2 \Big] + \frac{\partial}{\partial x}\Big(U' \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\Big) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial x}\Big(U' \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(U' \frac{\partial w}{\partial y}\Big) = 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

В системе (10) первые два уравнения можно преобразовать с помощью третьего к виду

$$-\frac{\partial[q + (1 - e^2)U']}{\partial x} + U' \frac{\partial}{\partial x} \frac{|\nabla w|^2}{2} = 0, \quad -\frac{\partial[q + (1 - e^2)U']}{\partial y} + U' \frac{\partial}{\partial y} \frac{|\nabla w|^2}{2} = 0.$$

С учетом соотношений

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_n} = -\frac{\partial}{\partial x_n} \frac{|\nabla w|^2}{2}, \quad U' \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{|\nabla w|^2}{2} = -U' \frac{\partial E_1}{\partial x_n} = -\frac{\partial U}{\partial x_n} \qquad (n = 1,\, 2)$$

эти уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\,[q + (1 - e^2)U' + U] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\,[q + (1 - e^2)U' + U] = 0$$

и после интегрирования дают представление гидростатического давления через упругий потенциал

$$q = h - (1 - e^2)U' - U, \tag{11}$$

где h — постоянная интегрирования. Осевые силы $Q_3^{\pm}$ на торцах цилиндра в соответствии с (8) и (11) зависят от постоянной h:

$$Q_3^{\pm} = \int\limits_S p_3^{\pm}\, dS = \mp\Big[hS - \int\limits_S [U + (e^{-4} - e^2)U']\, dS\Big],$$

поэтому h можно определить из условия отсутствия осевых сил

$$h = \frac{1}{S} \int\limits_S [U + (e^{-4} - e^2)U']\, dS \tag{12}$$

(при $e = 1$ h является средним значением потенциала U в области S, а q — отклонением потенциала от его среднего значения).

Третье уравнение в (10), записанное с учетом зависимостей $U'(E_1)$, $E_1(\nabla w)$ в развернутом виде, вместе с геометрическим условием на границе области составляет нелинейную краевую задачу для осевого смещения

$$\Big[U' - U''\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2U'' \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + \Big[U' - U''\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad w\big|_L = w^*. \tag{13}$$

Осевое смещение, определенное из решения этой задачи, позволяет найти все искомые величины: перемещения (1), гидростатическое давление (11), напряжения (7) и допустимую поверхностную нагрузку (8), (9).

Для определения типа уравнения (13), следуя [7], рассмотрим характеристический определитель D. В данном случае он является квадратичным полиномом переменных r, s и может быть представлен в виде

$$D = \Big[U' - U''\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big] r^2 - 2U'' \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} rs + \Big[U' - U''\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big] s^2 = \\ = U'(r^2+s^2) - U''\Big(r\frac{\partial w}{\partial x} + s\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2.$$

Отсюда можно заключить, что

$$D > 0 \quad \text{при} \quad U' > 0, \quad U'' \leqslant 0; \qquad D < 0 \quad \text{при} \quad U' < 0, \quad U'' \geqslant 0. \tag{14}$$

При выполнении условий (14) характеристическое уравнение $D = 0$ не имеет вещественных корней, следовательно, уравнение (13) является уравнением эллиптического типа на любом решении. Таким образом, неравенства (14) являются достаточными условиями эллиптичности уравнений антиплоской деформации несжимаемого упругого материала, представленными в терминах упругого потенциала. В [8] установлено, что (14) являются условиями эллиптичности и при плоской деформации несжимаемого материала.

Можно установить аналогию между нелинейной антиплоской деформацией упругого материала и установившимся плоским безвихревым течением газа. Действительно, введя прочностную характеристику материала (коэффициент упругости), связанную с упругим потенциалом и условием эллиптичности: $k^2 = -U'/U''$, уравнение (13) запишем в виде

$$\Big[1 + \frac{1}{k^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{k^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \Big[1 + \frac{1}{k^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{15}$$

и сравним его с уравнением для потенциала скорости φ при плоском безвихревом установившемся течении идеального газа с местной скоростью звука a^2 [9]:

$$\Big[1 - \frac{1}{a^2}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + \Big[1 - \frac{1}{a^2}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{16}$$

Уравнение (15) аналогично уравнению (16) (величинам w и k^2 в (15) соответствуют величины φ и $-a^2$ в (16)). Эта аналогия позволяет применять методы газодинамики к задачам нелинейной упругости.

Большие упругие деформации несжимаемых резиноподобных материалов с определенной степенью достоверности можно описывать, например, потенциалом Муни U_1 или обобщающим его потенциалом Ривлина — Сондерса U_2 [2]:

$$U_1 = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \qquad U_2 = C_1(I_1 - 3) + f(I_2 - 3), \tag{17}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 \geqslant 0$ — упругие постоянные; I_1, I_2 — специальные инварианты деформации; f — положительная функция. В условиях несжимаемости инварианты I_1, I_2 выражаются через инварианты E_1, E_2 тензора Альманси и в силу (4) представляются через инвариант E_1:

$$I_1 - 3 = 4(E_2 - E_1) = (1 - e^2)(e - e^{-1})^2 - 2e^2E_1, \qquad I_2 - 3 = -2E_1.$$

Эти соотношения позволяют получить для потенциалов (17) представления

$$U_1 = C_1(1-e^2)(e-e^{-1})^2 - 2(e^2C_1 + C_2)E_1, \quad U_2 = C_1(1-e^2)(e-e^{-1})^2 - 2e^2C_1E_1 + f(-2E_1). \tag{18}$$

Из выражений (18) с учетом неравенства $E_1 \leqslant 0$ следует, что для положительности потенциалов следует принять $e^2 \leqslant 1$.

Для потенциала Муни в (18) условие эллиптичности (14) выполнено: $U' = -2(e^2C_1 + C_2) < 0$, $U'' = 0$, а задача (13) является задачей Дирихле для осевого смещения (совпадающей с аналогичной задачей в линейной упругости):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad w\big|_L = w^*. \tag{19}$$

В этом случае антиплоской деформации в линейной и нелинейной теориях соответствуют одинаковые поля перемещений и различные поля напряжений.

Потенциал Ривлина — Сондерса, когда f является линейной функцией, совпадает с рассмотренным выше потенциалом Муни. Рассмотрим случай, когда f — квадратичная функция: $f(-2E_1) = l(-2E_1)^2 + m(-2E_1) + n$. Тогда упругий потенциал также квадратичен:

$$U = aE_1^2 - 2bE_1 + c, \quad a = 4l, \quad b = m + e^2C_1, \quad c = n + C_1(1-e^2)(e-e^{-1})^2. \tag{20}$$

Для потенциала (20) условие эллиптичности (14) также выполнено: $U'{=}{-a}(|\nabla w|^2{+}v^2){<}0$, $U'' = 2a > 0$ ($v^2 = (e-e^{-1})^2(2+e^{-2}) + 2b/a$), а задача для смещения (13) принимает вид

$$\begin{gathered}\left[v^2 + 3\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \left[v^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + 3\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,\\ w\big|_L = w^*.\end{gathered} \tag{21}$$

Краевые задачи для осевого смещения можно сформулировать также в комплексных переменных $z = x + iy$, $\bar z = x - iy$, в которых смещение становится функцией вида $w = w(z, \bar z)$. Задача (19) для материала Муни в комплексных переменных имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \bar z} = 0, \qquad w\big|_L = w^*. \tag{22}$$

Общее решение гармонического уравнения выражается через аналитическую функцию $\varphi(z)$, которая определяется по заданной реальной части на границе:

$$2w = \varphi(z) + \bar\varphi(\bar z), \qquad \operatorname{Re}\varphi(z)\big|_L = w^*. \tag{23}$$

Задача (21) для материала Ривлина — Сондерса (с квадратичным упругим потенциалом) в комплексных переменных принимает вид

$$\Big(\frac{v^2}{2} + 4\,\frac{\partial w}{\partial z}\,\frac{\partial w}{\partial \bar z}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \bar z} + \Big(\frac{\partial w}{\partial \bar z}\Big)^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial \bar z^2} = 0, \qquad w\big|_L = w^*. \tag{24}$$

При малом по сравнению с единицей параметре v^{-2} можно найти приближенное решение, представляя перемещение в виде ряда $w = \sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k v^{-2k}$ и удерживая в нем конечное число членов. Подставляя ряд в уравнение и краевое условие (24) и приравнивая в разных частях коэффициенты при одинаковых степенях параметра, получим последовательность линейных задач для составляющих смещений w_k:

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial z\,\partial \bar z} + N_{k-1}(z, \bar z) = 0, \qquad w_k\big|_L = w^*\delta_{0k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{25}$$

где N_{k-1} — известные функции, определенные предыдущими приближениями:

$$N_{k-1} = 2\sum_{m=0}^{k-1}\Big(4G_m\,\frac{\partial^2 w_{k-1-m}}{\partial z\,\partial \bar z} + \bar H_m\,\frac{\partial^2 w_{k-1-m}}{\partial z^2} + H_m\,\frac{\partial^2 w_{k-1-m}}{\partial \bar z^2}\Big),$$

$$G_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{\partial w_n}{\partial z} \frac{\partial w_{m-n}}{\partial \bar z}, \qquad H_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{\partial w_n}{\partial z} \frac{\partial w_{m-n}}{\partial z}.$$

В частности, для нулевого приближения $w = w_0$ задача (25) совпадает с задачей (22) и имеет решение (23):

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial z\,\partial \bar z} = 0, \quad w_0\big|_L = w^*, \quad 2w_0 = \varphi_0(z) + \bar\varphi_0(\bar z), \quad \operatorname{Re}\varphi_0(z)\big|_L = w^*.$$

Для смещения w_1, определяющего первое приближение $w = w_0 + v^{-2} w_1$, эта задача принимает вид

$$4\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial z\,\partial \bar z} + (\bar\varphi_0'(\bar z))^2 \varphi_0''(z) + (\varphi_0'(z))^2 \bar\varphi_0''(\bar z) = 0, \qquad w_1\big|_L = 0$$

и имеет решение

$$4w_1 + \varphi_0'(z) \int (\bar\varphi_0'(\bar z))^2\, d\bar z + \bar\varphi_0'(\bar z) \int (\varphi_0'(z))^2\, dz = \varphi_1(z) + \bar\varphi_1(\bar z),$$

$$\operatorname{Re}\varphi_1(z)\big|_L = \operatorname{Re}\Big(\bar\varphi_0'(z) \int (\varphi_0'(z))^2\, dz\Big)\Big|_L.$$

Рассмотрим антиплоскую деформацию трубки из несжимаемого материала (Муни или Ривлина — Сондерса), впрессованной в соосные жесткие цилиндрические обоймы радиусов r_1, r_2 ($r_1 > r_2$), при заданном смещении внешней обоймы, неподвижной внутренней обойме и отсутствии предварительной деформации:

$$w\big|_{r=r_1} = w_1, \qquad w\big|_{r=r_2} = 0, \qquad e = 1. \tag{26}$$

Для материала Муни (18), у которого упругий потенциал и его производная при $e = 1$ имеют значения

$$U = -2CE_1 = C\big|\nabla w\big|^2, \qquad U' = -2C, \qquad C = C_1 + C_2, \tag{27}$$

осевое смещение определяется из задачи (19). Полагая смещение симметричным: $w = w(r)$ (r — полярный радиус), запишем гармоническое уравнение в виде $(4r)^{-1}(rw')' = 0$. Общее решение $w = A\,\ln r + B$ содержит произвольные постоянные A, B. Определив их из условий (26), получим решение задачи в виде

$$w = A\,\ln(r/r_2), \qquad A = w_1/\ln(r_1/r_2), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{28}$$

Используя (12), (27) и (28), находим

$$|\nabla w| = \frac{A}{r}, \qquad U = C\,\frac{A^2}{r^2}, \qquad h = \frac{1}{S} \int\limits_S U\, dS = CA\,\frac{2w_1}{r_1^2 - r_2^2},$$

следовательно, гидростатическое давление (11) равно

$$q = h - U = CA\Big(\frac{2w_1}{r_1^2 - r_2^2} - \frac{A}{r^2}\Big). \tag{29}$$

Таким образом, смещение и давление в трубке зависят только от полярного радиуса.

Величинам в (28) и (29) соответствуют декартовы напряжения (7) в объеме трубки $P_{11} = -q - 2CA^2x^2/r^4$, $P_{22} = -q - CA^2y^2/r^4$, $P_{33} = -q$, $P_{12} = -2CA^2xy/r^4$, $P_{23} = 2CAy/r^2$, $P_{31} = 2CAx/r^2$. Декартовы напряжения (9) на цилиндрических поверхностях трубки согласно (28), (29) с учетом представлений компонент нормали и нормальной производной смещения $n_1 = x/r$, $n_2 = y/r$, $\partial w/\partial n = A/r$ определяются в виде

$$p_1\big|_{r_i} = \mp CA\Big(\frac{2w_1}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{A}{r_i^2}\Big)\frac{x_i}{r_i}, \quad p_2\big|_{r_i} = \mp CA\Big(\frac{2w_1}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{A}{r_i^2}\Big)\frac{y_i}{r_i}, \quad p_3\big|_{r_i} = \pm CA\,\frac{2}{r_i}. \tag{30}$$

Здесь и далее $i = 1, 2$ ($i = 1$ и верхний знак соответствуют наружному цилиндру, а $i = 2$ и нижний знак — внутреннему). Соответственно компоненты $F_k\big|_{r_i}$ главных векторов боковых поверхностных сил, отнесенные к единице длины в продольном направлении трубки, имеют нулевые поперечные и отличные от нуля продольные компоненты

$$F_1\big|_{r_i} = \iint p_1\big|_{r_i} r_i\,d\varphi\,dx_3 = 0, \quad F_2\big|_{r_i} = \iint p_2\big|_{r_i} r_i\,d\varphi\,dx_3 = 0, \quad F_3\big|_{r_i} = \pm 4\pi CA \quad (i = 1,\,2)$$

(φ — полярный угол).

Поверхностные напряжения на торцах трубки в соответствии с (8) имеют значения

$$p_1^\pm = \pm 2CA\,\frac{x}{r^2}, \qquad p_2^\pm = 2CA\,\frac{y}{r^2}, \qquad p_3^\pm = \pm CA\Big(\frac{A}{r^2} - \frac{2w_1}{r_1^2 - r_2^2}\Big), \tag{31}$$

где верхний и нижний знаки соответствуют верхнему и нижнему торцам. Компоненты $Q_k^\pm$ главных векторов этих сил равны нулю: $Q_k^\pm = \displaystyle\iint p_k^\pm r\,d\varphi\,dr = 0$.

В рассматриваемой осесимметричной задаче в цилиндрической системе координат r, φ, z физические компоненты тензора и вектора напряжений (определенные через декартовы компоненты соответствующих величин по формулам преобразования) подобно смещению и давлению зависят только от полярного радиуса; при этом напряжения на боковой поверхности трубки являются постоянными величинами:

$$P_{rr} = -CA\Big(\frac{A}{r^2} + \frac{2w_1}{r_1^2 - r_2^2}\Big), \quad P_{\varphi\varphi} = P_{zz} = CA\Big(\frac{A}{r^2} - \frac{2w_1}{r_1^2 - r_2^2}\Big), \quad P_{r\varphi} = P_{\varphi z} = 0,$$

$$P_{zr} = CA\,\frac{2}{r}, \quad p_r^\pm = \pm CA\,\frac{2}{r}, \quad p_\varphi^\pm = 0, \quad p_z^\pm = \pm CA\Big(\frac{A}{r^2} - \frac{2w_1}{r_1^2 - r_2^2}\Big),$$

$$p_r\big|_{r_i} = -CA\Big(\frac{A}{r_i^2} + \frac{2w_1}{r_1^2 - r_2^2}\Big), \qquad p_\varphi\big|_{r_i} = 0, \qquad p_z\big|_{r_i} = CA\,\frac{2}{r_i}.$$

При деформировании трубки из материала Ривлина — Сондерса перемещение должно определяться из уравнения (21), которое при $w = w(r)$ принимает вид $(8r)^{-1}(rw'^3 + v^2 rw')' = 0$. В результате интегрирования для производной w' получаем неполное кубическое уравнение $w'^3 + v^2 w' - m/r = 0$ (m — произвольная постоянная), которое ввиду неравенства $(v^2/3)^3 + (-m/(2r))^2 > 0$ имеет только одно вещественное решение [10]

$$w' = J_+(r, m) + J_-(r, m), \qquad J_\pm(r, m) = \sqrt[3]{\frac{m}{2r} \pm \sqrt{\frac{v^6}{27} + \frac{m^2}{4r^2}}}. \tag{32}$$

Интегрирование уравнения (32) при условиях (26) определяет перемещение и дает соотношение для нахождения постоянной m

$$w = \int_{r_2}^{r} (J_+(r, m) + J_-(r, m))\,dr, \qquad w_1 = \int_{r_2}^{r_1} (J_+(r, m) + J_-(r, m))\,dr. \tag{33}$$

Интегралы в (33) допускают представление через элементарные функции: подстановкой $t = 3J_+^2(r)$ $(r = m(\sqrt{3t}\,)^3/(t^3 - v^6))$ подынтегральное выражение сводится к рациональной функции, и интегралы в соответствии с [11] берутся в конечном виде

$$w = m\Big[\frac{3t(v^2-t)}{v^6-t^3} - \frac{1}{2v^2}\ln\frac{(v^2-t)^2}{v^4+v^2t+t^2}\Big]_{t_2}^{t}, \qquad w_1 = m\Big[\frac{3t(v^2-t)}{v^6-t^3} - \frac{1}{2v^2}\ln\frac{(v^2-t)^2}{v^4+v^2t+t^2}\Big]_{t_2}^{t_1},$$

где $t_1 = 3J_+^2(r_1)$; $t_2 = 3J_+^2(r_2)$.

При $e = 1$ в выражении (20) для U примем $c = 0$, что соответствует обращению в нуль упругого потенциала при отсутствии деформации. В рассматриваемом случае упругий потенциал и связанные с ним величины выражаются через производную $w'(r)$, определенную формулой (32), и, следовательно, являются функциями полярного радиуса:

$$U = \frac{a}{4}\,w'^2(r)(w'^2(r) + 2v^2), \qquad U' = a(w'^2(r) + v^2),$$
$$q = h - \frac{a}{4}\,w'^2(r)(w'^2(r) + 2v^2), \quad h = \frac{a}{2(r_1^2 - r_2^2)}\int\limits_{r_2}^{r_1} w'^2(r)(w'^2(r) + 2v^2)\,r\,dr, \quad v^2 = \frac{2b}{a}. \tag{34}$$

Функциями полярного радиуса являются также цилиндрические компоненты тензора напряжений в объеме трубки и вектора напряжений на ее поверхности

$$P_{rr} = -\frac{a}{4}\,w'^2(r)(3w'^2(r) + 2v^2) - h, \quad P_{\varphi\varphi} = P_{zz} = \frac{a}{4}\,w'^2(r)(w'^2(r) + 2v^2) - h,$$
$$P_{r\varphi} = P_{\varphi z} = 0, \quad P_{zr} = aw'(r)(w'^2(r) + v^2), \quad p_r^{\pm} = \pm aw'(r)(w'^2(r) + v^2), \quad p_\varphi^{\pm} = 0,$$
$$p_z^{\pm} = \pm\Big[\frac{a}{4}\,w'^2(r)(w'^2(r) + 2v^2) - h\Big], \quad p_r\big|_{r_i} = \mp\Big[h + \frac{a}{4}\,w'^2(r_i)(3w'^2(r_i) + 2v^2)\Big], \tag{35}$$
$$p_\varphi\big|_{r_i} = 0, \qquad p_z\big|_{r_i} = \pm aw'(r_i)(w'^2(r_i) + v^2).$$

Если $v^{-2} \ll 1$, то можно получить приближенные выражения для смещения и его производной и, следовательно, для решения (32)–(35) осесимметричной задачи. Уравнение для w' в случае линейного упругого потенциала $rw' = A$ является приближением соответствующего уравнения в случае квадратичного потенциала $rw'^3 + v^2rw' = m$, если принять $m = Av^2$. Тогда, представив радикалы в (32) разложениями

$$J_+ = \frac{v}{\sqrt{3}}\Big(1 + \frac{\sqrt{3}A}{2r}\,v^{-1} + \frac{3A^2}{8r^2}\,v^{-2} - \frac{\sqrt{3}A^3}{2r^3}\,v^{-3} + \frac{135A^4}{128r^4}\,v^{-4}\Big),$$
$$J_- = -\frac{v}{\sqrt{3}}\Big(1 - \frac{\sqrt{3}A}{2r}\,v^{-1} + \frac{3A^2}{8r^2}\,v^{-2} + \frac{\sqrt{3}A^3}{2r^3}\,v^{-3} + \frac{135A^4}{128r^4}\,v^{-4}\Big),$$

в указанном приближении для смещения и его производной получим выражения

$$w' = \frac{A}{r}\Big(1 - \frac{A^2}{v^2r^2}\Big), \qquad w = A\ln r + \frac{A^3}{2v^2r^2} + B, \qquad A,\, B = \mathrm{const}\,.$$

С учетом краевых условий (26) само смещение равно

$$w = A\ln\frac{r}{r_2} + \frac{A^3}{2v^2}\Big(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}\Big), \tag{36}$$

где постоянная A определяется из кубического уравнения

$$A^3 - ugA + uw_1 = 0, \qquad u = \frac{2r_1^2r_2^2v^2}{r_1^2 - r_2^2}, \qquad g = \ln\frac{r_1}{r_2}.$$

Уравнение имеет единственное вещественное решение при условии [10]

$$\left(-\frac{ug}{3}\right)^3 + \left(\frac{uw_1}{2}\right)^2 > 0 \qquad \left(\frac{w_1^2}{4} - \frac{2}{27}\frac{r_1^2 r_2^2 v^2}{r_1^2 - r_2^2}\left(\ln\frac{r_1}{r_2}\right)^3 > 0\right).$$

Приближенное нелинейное решение (36) обобщает линейное решение (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
2. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.
3. **Литвинова З. Н.** О механизме разрушения нелинейно-упругого тела с трещиной при антиплоской деформации // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 6. С. 1344–1347.
4. **Knowles J. K.** On finite anti-plane shear for incompressible elastic materials // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1976. V. 19, pt 4. P. 400–415.
5. **Murnaghan F. D.** Finite deformations of an elastic solid // Amer. J. Math. 1939. V. 59, N 2. P. 235–260.
6. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
7. **Петровский И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
8. **Бондарь В. Д.** О конечных плоских деформациях несжимаемого упругого материала // ПМТФ. 1990. № 2. С. 155–164.
9. **Бай Ши-и.** Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
10. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968.
11. **Смолянский М. Л.** Таблицы неопределенных интегралов. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 30/X 2000 г.