

УДК 519.626.1

Оптимальное по расходу ресурсов управление возмущенными системами*

В.М. Александров

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. В.А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

E-mails: vladalex@math.nsc.ru, alexhome.a@yandex.ru

Александров В.М. Оптимальное по расходу ресурсов управление возмущенными системами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 3. — С. 223–238.

Разработан метод вычисления оптимального по расходу ресурса управления линейными динамическими системами при известном возмущении, включающий как нормальное, так и вырожденное решения задачи. Метод основан на разделении задачи на три независимые подзадачи: 1) учет действия возмущения на систему; 2) вычисление структуры оптимального управления; 3) вычисление моментов переключений оптимального управления. Учет действия возмущения на систему и перевод в ненулевое конечное состояние сводятся к преобразованию начального и конечного состояний системы. Вычисление структуры основано на оригинальном методе формирования квазиоптимального управления. Вычисление моментов переключений управления основано на найденной связи между отклонениями начальных условий сопряженной системы с отклонениями фазовой траектории в конечный момент. Разработан итерационный алгоритм и рассмотрены его особенности. Приведены результаты моделирования и численных расчетов.

DOI: 10.15372/SJNM20170301

Ключевые слова: *оптимальное управление, расход ресурса, возмущение, время перевода, быстродействие, моменты переключений, итерационный процесс, сопряженная система, фазовая траектория.*

Aleksandrov V.M. Optimal resource consumption control of perturbed systems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 3. — P. 223–238.

A method for calculating the optimal consumption of the resource control of perturbed dynamic systems. This method includes both normal and singular solutions. According to the method proposed the problem is subdivided into three independent tasks: 1) a consideration of the effects of perturbations on the system; 2) computation of the optimal control structure; 3) computation of the switching moments of optimal control. A consideration of the effects of perturbations on the system and transfer to a non-zero final state are reduced to the transformation of the initial and final states of the systems. The structure calculation is based on the relation between deviations in the initial conditions of the conjugate systems and deviations of the phase trajectory at the completion instant. An iterative algorithm has been developed, its characteristics being considered. The results of modeling and numerical calculations are given.

Keywords: *optimal control, resource consumption, perturbation, moving time, switching moments, iterative process, conjugate system, phase trajectory.*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00592а).

1. Введение

Оптимальное управление представляет значительный теоретический и практический интерес [1, 2]. Особое место занимает задача минимизации расхода ресурсов. Сформулированная первоначально как задача оптимального управления по расходу топлива она рассматривалась многими как отечественными, так и зарубежными авторами [3–10]. Так как аналитическое решение задачи в общем случае невозможно, то отечественными и зарубежными специалистами предложены различные численные методы, каждый из которых обладает определенными достоинствами и недостатками [11–16]. Для существования решения задачи время перевода должно быть больше (либо равно) времени оптимального по быстрдействию управления. Но время оптимального по быстрдействию перевода системы заранее неизвестно и зависит от начального условия и возмущения. Произвольное фиксированное задание времени перевода для любых начальных условий и возмущений, во-первых, ограничивает область начальных условий, для которых такой перевод возможен, во-вторых, делает неравномерным расход ресурса от начальных условий, в-третьих, может привести к вырожденному решению, для которого структура управления (т. е. последовательность знаков управляющих воздействий) не определяется с помощью сопряженной системы, в-четвертых, может вообще не существовать решения задачи. Ввиду сложности получения решения широко использовалось лишь нормальное решение для невозмущенной системы, и недостаточно внимания уделялось другим аспектам задачи.

В работе предложен метод вычисления оптимального по расходу ресурса управления линейными динамическими системами с известным возмущением, включающий как нормальное, так и вырожденное решения. Принципиальная трудность в случае вырожденного решения заключается в неопределенности знаков управляющих воздействий и отсутствии их связи с решением сопряженной системы. Рассматриваемый в работе метод основан на разделении задачи минимизации расхода ресурса на три независимые подзадачи: 1) учет действия возмущения; 2) вычисление структуры оптимального управления; 3) вычисление моментов переключений оптимального управления. Учет действия возмущения на систему и перевод в ненулевое конечное состояние сводятся к преобразованию начального и конечного состояний системы. Вычисление структуры основано на оригинальном методе формирования квазиоптимального управления [17], которое обладает рядом важных свойств: а) переводит систему в требуемое конечное состояние; б) формируется с использованием сопряженной системы, т. е. с использованием первого необходимого условия оптимальности в классическом вариационном исчислении (уравнения Эйлера–Лагранжа). Поэтому структура квазиоптимального управления позволяет определить структуру искомого оптимального управления, т. е. определить знаки управляющих воздействий для каждой компоненты вектора искомого оптимального управления. Вычисление моментов переключений оптимального управления основано на найденной приближенной связи между отклонениями начальных условий сопряженной системы с отклонениями фазовых координат прямой системы в конечный момент времени. Использование приближенных соотношений приводит к итерационному вычислительному процессу. Разработан итерационный алгоритм и рассмотрены его особенности. Приведены результаты моделирования и численных расчетов.

2. Постановка задачи

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u + F(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y_0 \in D, \quad D \subset V, \quad (2.1)$$

где y — n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; $F(t)$ — n -мерный вектор детерминированного возмущения; u — m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям:

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

Предполагается, что система (2.1) покомпонентно полностью управляема, т. е.

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_0, \tau) B_j(\tau) B_j^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) d\tau \right] = n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.3)$$

и переводима в ненулевое $y(t_k) = y_k$ и нулевое конечное состояния из ограниченной области начальных условий D ; V — область управляемости; $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения; t_0 — начальный момент; t_k — конечный момент; $*$ — знак транспонирования.

Задача 1. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за фиксированное время $T = t_k - t_0$ ($T \geq T_0$) систему (2.1) из начального состояния $y(t_0) = y_0$ в конечное состояние $y(t_k) = y_k$ и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau. \quad (2.4)$$

Здесь T_0 — время оптимального по быстродействию перевода системы.

Замечание 1. В случае $T = T_0$ оптимальное по расходу ресурса управление совпадает с оптимальным по быстродействию управлением.

Замечание 2. Условие покомпонентной полной управляемости (2.3) для рассматриваемых прямоугольных параллелепипедных ограничений (2.2) адекватно “условию общности положения” [1].

3. Вычислительный метод решения задачи

3.1. Трансформация исходной задачи

Выпишем решение системы (2.1) в конечный момент $t = t_k$ при переводе системы в ненулевое конечное состояние $y(t_k) = y_k$ для кусочно-постоянного управления $u(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени t_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$, и принимают значения $u_j(t) = u_j^p$, $t \in [t_j^{p-1}, t_j^p]$, где $t_j^0 = t_0$, $t_j^{r_j} = t_k$:

$$y(t_k) = \Phi(t_k, t_0)y(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{p-1}}^{t_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^p d\tau + \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau. \quad (3.1)$$

Представим (3.1) в следующем виде:

$$0 = \Phi(t_k, t_0) \left(y(t_0) - \Phi^{-1}(t_k, t_0) \left[y(t_k) - \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau \right] \right) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{p-1}}^{t_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^p d\tau. \quad (3.2)$$

Здесь $x_0 = \left(y(t_0) - \Phi^{-1}(t_k, t_0) \left[y(t_k) - \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau \right] \right)$ — новое (преобразованное) начальное условие. В результате приходим к задаче перевода системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_k) = 0, \quad (3.3)$$

из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$. Ограничение (2.2) на управление сохраняется. Перевод системы (3.3) в начало координат эквивалентен переводу системы (2.1) в заданное ненулевое конечное состояние $y(t_k) = y_k$. Другими словами, найденное оптимальное управление $u^0(t)$, переводящее систему (3.3) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$, переводит систему (2.1) из начального состояния $y(t_0) = y_0$ в заданное ненулевое конечное состояние $y(t_k) = y_k$ [18]. В результате приходим к следующей задаче

Задача 2. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за фиксированное время $T = t_k - t_0$ ($T \geq T_0$) систему (3.3) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_k) = 0$ и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau. \quad (2.4)'$$

Здесь T_0 — время оптимального по быстрдействию перевода системы (3.3).

Для нахождения оптимального по расходу ресурса управления воспользуемся принципом максимума Понтрягина. При этом предполагается, что выполнены следующие необходимые условия: 1) $T \geq T_0$, т. е. заданное время не меньше времени оптимального по быстрдействию управления для преобразованного начального условия $x(t_0) = x_0$; 2) для системы (3.3) выполнены условия покомпонентной полной управляемости (2.3); 3) преобразованное начальное условие $x(t_0) = x_0$ принадлежит области управляемости, т. е. принадлежит области начальных условий, из которой возможен перевод системы (3.3) в начало координат; 4) матричная функция $B(t)$ дифференцируема по t .

3.2. Вычисление оптимального по расходу ресурса управления

Для нахождения оптимального по расходу ресурса управления при ограничении (2.2) образуем функцию Понтрягина $H(\psi, x, u, t)$ и выпишем сопряженную систему ψ :

$$H(\psi, x, u, t) = - \sum_{j=1}^m |u_j| + \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u, \quad \dot{\psi} = -A^*(t)\psi. \quad (3.4)$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей функциям $x(t)$ и $u(t)$,

что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(\psi(t), x(t), u, t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума. Значение функции $H(\psi(t), x(t), u, t)$ максимально, если компоненты вектора управления удовлетворяют следующим условиям:

$$u_j(t) = \begin{cases} \pm M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \geq 1 \text{ и } [B_j(t)]^* \psi(t) \leq -1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \end{cases} \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.5)$$

В зависимости от положения начальной точки в фазовом пространстве и величины заданного времени T возможны два решения: 1) нормальное решение; 2) вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурса. Нормальное решение характеризуется тем, что последовательность знаков оптимального по расходу ресурса управления однозначно задается функцией переключений $[B_j(t)]^* \psi(t)$. Нормальное решение задачи минимизации расхода ресурса рассмотрено в [10].

Вырожденное решение характеризуется тем, что для заданного начального условия $x(t_0) = x_0$ и заданного времени перевода T последовательность знаков оптимального по расходу ресурса управления не совпадает с последовательностью знаков оптимального по быстрдействию управления, т. е. не определяется функцией переключений. Это порождает существенную трудность нахождения оптимального по расходу ресурса управления.

Структура оптимального по расходу ресурса управления может быть представлена так:

$$\begin{aligned} u(t) &= \pm M_j, \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], \quad p = \overline{1, r_j}, \\ u(t) &\equiv 0, \quad t \in [t_j^{2p-1}, t_j^{2p}], \quad p = \overline{1, r_j - 1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $t_j^0 = t_0$; $t_j^{2r_j-1} = t_k$; r_j — максимальное число интервалов знакопостоянства j -й компоненты вектора оптимального по быстрдействию управления; t_j^α — α -й момент переключения (включения или выключения) j -й компоненты вектора оптимального по расходу ресурса управления. Моменты переключений задаются функцией переключений $[B_j(t)]^* \psi(t)$. Для j -й компоненты вектора управления функция переключений принимает значения ± 1 в моменты $t = t_j^\alpha$, т. е. справедливо соотношение $[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = \pm 1$. Задавая произвольно и последовательно знаки ($R_j = \pm 1$), можно записать

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = R_j. \quad (3.7)$$

Выразим решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ через фундаментальную матрицу прямой системы

$$\psi(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi(t_0) \quad (3.8)$$

и подставим (3.8) в (3.7). Задав произвольно n моментов переключений t_j^α ($\alpha = \overline{1, l_j}$, $\sum_{j=1}^m l_j = n$; $j = \overline{1, m}$), получим для вычисления начальных условий сопряженной системы $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, следующую систему из n линейных алгебраических уравнений:

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - R_j = 0. \quad (3.9)$$

Вычислив начальное условие $\psi(t_0)$, с помощью решения (3.8) на интервале $[t_0, t_k]$ сопряженной системы находим все t_j^α , для которых выполняются (3.9). Параметры p и α связаны соотношением $p = E(\alpha/2 + 1)$, $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, где $E(\cdot)$ — целая часть числа.

Таким образом, задав произвольно n моментов переключений, находим с помощью функций переключений соответствующие n заданным *все* остальные моменты переключений на интервале $[t_0, t_k]$.

Важно отметить, что двум симметричным функциям переключений соответствуют одни и те же значения моментов переключений t_j^α , $\alpha = 1, 2(r_j - 1)$.

На рисунке 1 приведены две симметричные функции переключений, которым соответствуют одинаковые значения моментов переключений. *Это обстоятельство позволяет разнести проблемы и решать их отдельно и последовательно: 1) определить структуру оптимального управления (т.е. последовательность знаков управляющих воздействий); 2) вычислить моменты переключений оптимального управления.*

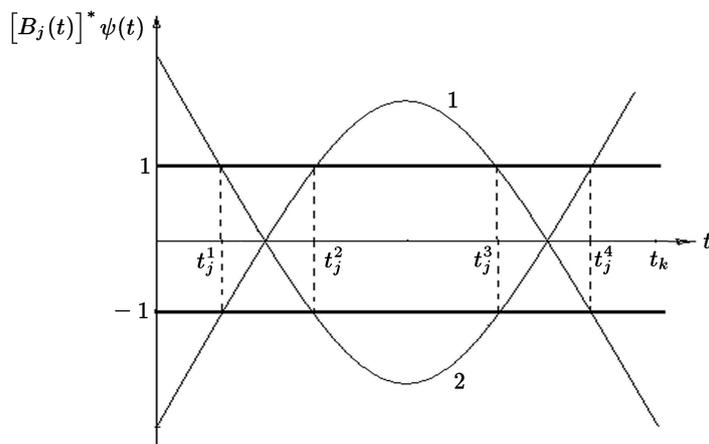


Рис. 1. Симметричные функции переключений

3.3. Определение структуры оптимального управления

Знаки управляющих воздействий искомого оптимального управления определяются по знакам квазиоптимального по расходу ресурса управления, которое формируется следующим образом. Предположим, что вектор начальных условий $x^{(i)}(t_0) = (0, \dots, 0, x_i(t_0), 0, \dots, 0)$ содержит только одну ненулевую компоненту $x_i(t_0)$. Рассмотрим алгоритм формирования управления из начального условия i -й фазовой координаты.

Введем в рассмотрение переменные ограничения на компоненты вектора управления, зависящие от начальных условий:

$$|u_j| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad N_{ij} > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.10)$$

где N_{ij} — некоторые весовые коэффициенты, выбор которых рассмотрен ниже. Для принятого начального условия ограничение (3.10) имеет вид

$$|u_j| \leq N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.11)$$

Для нахождения оптимального по расходу ресурса управления при ограничении (3.11) воспользуемся принципом максимума. Функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления удовлетворяют следующим соотношениям:

$$u_j^{(i)}(t) = \begin{cases} N_{ij}|x_i(t_0)| & \text{при } [B_j(t)]^* \psi^i(t) \geq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi^i(t) > -1, \\ -N_{ij}|x_i(t_0)| & \text{при } [B_j(t)]^* \psi^i(t) \leq -1, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}. \quad (3.12)$$

Соотношение (3.12) можно записать более компактно

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij} x_i(t_0) \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi^i(t) [1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi^i(t)|)] \right\}, \quad i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}. \quad (3.13)$$

В [17] доказана независимость моментов переключений от начальных условий, что обеспечивает простую реализацию управления, и найдена допустимая область начальных условий, для которой не нарушаются предельные ограничения на управления. Последнее важно при *непосредственном* управлении объектами, но не важно при задании начального приближения. В этом случае важна форма начального приближения. *Форма квазиоптимального управления позволяет определить структуру искомого оптимального по расходу ресурса управления.*

Сохраним это важное свойство независимости моментов переключений от начальных условий, но другим способом сформируем квазиоптимальное управление. Зафиксируем моменты переключений управления. Тогда весовые коэффициенты N_{ij} принимают различные значения N_{ij}^p на каждом p -м интервале знакопостоянства компонент вектора управления, где $p = \overline{1, r_j}$ а r_j — число интервалов знакопостоянства j -й компоненты.

Квазиоптимальное по расходу ресурса управление при одинаковых для всех фазовых координат моментах переключений формируется по алгоритму

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}^p x_i(t_0) \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) [1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|)] \right\}, \quad (3.14)$$

$$j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j}; t \in [t_j^{p-1}, t_j^p].$$

В общем случае, когда вектор начальных условий $x(t_0)$ содержит все (либо часть) ненулевые компоненты, компоненты вектора управления образуются суммированием составляющих (3.14), сформированных из начальных условий каждой фазовой координаты:

$$u_j^{\text{kv}}(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p x_i(t_0) \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) [1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|)] \right\}, \quad (3.15)$$

$$j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j}; t \in [t_j^{p-1}, t_j^p].$$

Суммарное управление (3.15) в силу справедливости принципа суперпозиции для линейных систем переводит систему (3.3) из любого начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$ и минимизирует расход ресурсов при переменных ограничениях:

$$|u_j| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij}^p |x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j}; t \in [t_j^{p-1}, t_j^p]. \quad (3.16)$$

3.4. Определение весовых коэффициентов для квазиоптимального управления

Весовые коэффициенты N_{ij}^p , $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$, связаны с параметрами управляемой системы следующим уравнением:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij}^p \operatorname{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* \psi(\tau) [1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(\tau)]^* \psi(\tau)|)] \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.17)$$

Введем обозначение

$$\hat{N}_{ij}^p = N_{ij}^p \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) [1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|)] \right\}, \quad t \in [t_j^{p-1}, t_j^p]. \quad (3.18)$$

Учитывая, что $\Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = \Phi(t_k, t_0) I_i$, где I_i — i -й вектор-столбец единичной матрицы, а $\Phi(t_k, t_0)$ невырождена, систему уравнений (3.17) представим, используя обозначение (3.18), следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.19)$$

где t_j^α — α -й момент переключения j -й компоненты вектора управления. Квазиоптимальное по расходу ресурсов управление формируется с учетом введенных обозначений по алгоритму

$$\begin{aligned} u_j^{\text{kv}}(t) &= \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], \quad p = \overline{1, r_j}, \\ u_j^{\text{kv}}(t) &\equiv 0, \quad t \in (t_j^{2p-1}, t_j^{2p}), \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Пусть определены все моменты переключений t_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$, включая и конечный момент $t_j^{2r_j-1} = t_k$. Так как $\sum_{j=1}^m 2r_j - 1 \geq n$, то число параметров \hat{N}_{ij}^p может быть больше числа уравнений. Поэтому для i -й фазовой координаты на n интервалах знакопостоянства компонент вектора управления принимаем неизвестными коэффициенты \hat{N}_{ij}^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, k_j}$, где $\sum_{j=1}^m k_j = n$, а на остальных интервалах полагаем $\hat{N}_{ij}^{p+1} = -\hat{N}_{ij}^p$, $p = \overline{k_j, r_j - 1}$. Отсюда $\hat{N}_{ij}^{p+1} = (-1)^{p-k_j} \hat{N}_{ij}^{k_j}$, $p = \overline{k_j, r_j - 1}$. В результате из (3.19) получаем n систем, каждая из которых состоит из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных весовых коэффициентов \hat{N}_{ij}^p :

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{k_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + \sum_{p=k_j+1}^{r_j} (-1)^{p-k_j} \hat{N}_{ij}^{k_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau \right\} + I_i = 0, \quad (3.21)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Итак, задав произвольно моменты переключений, решаем системы линейных алгебраических уравнений (3.21) и находим весовые коэффициенты. Формируем по соотношениям (3.20) квазиоптимальное управление. Структура квазиоптимального управления совпадает со структурой искомого оптимального управления. На этом свойстве и основано использование квазиоптимального управления для нахождения знаков управляющих воздействий для каждой компоненты вектора искомого оптимального управления.

3.5. Отклонение фазовой траектории от начала координат

Пусть заданы все *приближенные* значения моментов переключений t_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, для системы (3.3). Управляемая система (3.3) переводится в некоторую точку фазового пространства, которая отклоняется от начала координат на величину

$$\Delta \hat{x}(t_k) = \Phi(t_k, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau, \quad (3.22)$$

где $S_j(p) = \pm 1$ — знак управления на p -м интервале знакопостоянства j -й компоненты вектора управления. Это отклонение должно быть скомпенсировано соответствующим изменением моментов переключений управления.

3.6. Вариация моментов переключений управления

Изменение t_j^α на величину Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, вызывает следующее отклонение фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$ для кусочно-постоянного управления $u_j^p(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени $t = t_j^\alpha$, $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, и принимают значения $u_j^p(t) = M_j S_j(p)$, $t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}]$, $p = \overline{1, r_j}$:

$$\Delta \tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \int_{t_j^\alpha}^{t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) d\tau. \quad (3.23)$$

Если Δt_j^α достаточно малы (а это, как показано ниже, всегда достижимо), то получаем приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю Δt_j^α :

$$\Delta \tilde{x}(t_k) \approx \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha. \quad (3.24)$$

3.7. Уравнение баланса отклонений

Отклонения фазовых координат (3.22), порождаемые неточным заданием моментов переключений, должны быть скомпенсированы соответствующим изменением моментов переключений, т. е. должно выполняться уравнение баланса отклонений: $\Delta \tilde{x}(t_k) + \Delta \hat{x}(t_k) = 0$. Подставив в это уравнение выражения (3.22) и (3.24), получим систему из n линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha + \Delta \hat{x}(t_k) = 0. \quad (3.25)$$

Число неизвестных Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, в (3.25) может быть больше числа уравнений, однако только n из них являются независимыми переменными. Выше отмечалось, что с помощью сопряженной системы заданием n моментов переключений однозначно задаются все остальные моменты переключений на интервале $[t_0, t_k]$. Поэтому для нахождения оптимального управления (а не просто допустимого управления) необходимо перейти к определению моментов переключений с помощью сопряженной системы.

С этой целью установим связь между отклонениями Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, моментов переключений и отклонениями $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, начальных условий сопряженной системы. Число последних равно n . В результате получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$. Такая связь была получена в [10]:

$$\Delta t_j^\alpha \approx \left\{ \left\{ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \right\} [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \right\}^{-1} \times \\ [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (3.26)$$

Запишем соотношение (3.26) в компактном виде

$$\Delta t_j^\alpha \approx \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta \psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (3.26)'$$

Следует отметить, что несмотря на кажущуюся сложность, выражение (3.26) имеет простой вид благодаря матрицам размера $1 \times n$ и $n \times 1$, входящим в это выражение.

3.8. Основное уравнение

Подставив (3.26)' в (3.25), получим основную систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta \psi(t_0) + \Delta \hat{x}(t_k) = 0. \quad (3.27)$$

Решив (3.27), находим $\Delta \psi(t_0)$. Из соотношения (3.26) вычисляем отклонения Δt_j^α , на которые следует изменить каждый из моментов переключений, чтобы уменьшить в конечный момент отклонение от начала координат фазовой траектории движения системы (3.3). Приближенность выражений (3.24) и (3.26) приводит к итерационной процедуре нахождения оптимального управления.

Отклонение $\Delta \hat{x}(t_k)$ может быть значительным и для его компенсации необходимы большие отклонения моментов переключений Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. В силу линеаризации и приближенности полученных соотношений возможна расходимость вычислительного процесса. Оценить “малы” или “велики” отклонения $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, и гарантируется ли сходимость вычислительного процесса весьма сложно. Более просто судить о сходимости вычислительного процесса по величине максимального отклонения момента переключения по сравнению с заданным временем управления. Если $\max_{j,\alpha} |\Delta t_j^\alpha| \leq \gamma T$, где γ задано ($0 < \gamma \ll 1$), то отклонения моментов переключений достаточно малы и гарантируется сходимость вычислительного процесса. В противном случае компенсируем отклонение $\Delta \hat{x}(t_k)$ не сразу полностью, а по частям, беря лишь ξ -ю часть отклонения $\Delta \hat{x}(t_k)$, полагая

$$\xi = \frac{\gamma T}{\max_{j,\alpha} |\Delta t_j^\alpha|}. \quad (3.28)$$

Таким образом, если окажется, что $\max_{j,\alpha} |\Delta t_j^\alpha| > \gamma T$, то ограничиваем максимальное отклонение предельным значением, т. е. принимаем $\max_{j,\alpha} |\Delta \tilde{t}_j^\alpha| = \gamma T$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в ξ раз, т. е. полагаем

$$\Delta \tilde{t}_j^\alpha = \xi \Delta t_j^\alpha, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, \quad \Delta \tilde{\psi}(t_0) = \xi \Delta \psi(t_0). \quad (3.29)$$

Здесь $\Delta\psi(t_0)$, Δt_j^α — вычисленные значения из уравнений (3.27) и (3.26) соответственно; $\Delta\tilde{\psi}(t_0)$, $\Delta\tilde{t}_j^\alpha$ — значения отклонений, которые реально принимаются для последующих расчетов. Такой подход обеспечивает сходимость итерационного вычислительного процесса для любых начальных условий из области управляемости. Доказательство сходимости вычислительного процесса аналогично [10].

3.9. Изменение момента включения управления

Если заданное время перевода T значительно больше времени оптимального быстрого действия T_0 , то в итерационном процессе вычисления оптимального по расходу ресурса управления возникает ситуация, когда $|[B_j(t)]^*\psi(t)| < 1$ на интервале $t \in [t_0, t_j^*)$. В момент $t = t_j^*$ имеем $|[B_j(t_j^*)]^*\psi(t_j^*)| = 1$. Следовательно, $u(t) \equiv 0$ на интервале $t \in [t_0, t_j^*)$, а момент $t = t_j^*$ — это момент включения управления. Ранее принималось, что $t = t_0$ — момент включения управления. Изменение момента включения управления требует соответственно изменения расчетных выражений. Следует перейти к следующим соотношениям. Основное уравнение (3.27) запишем как

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2r_j-1} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^\alpha M_j S_j(p) \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta\psi(t_0) + \Delta\hat{x}(t_k) = 0. \quad (3.27)'$$

Параметры p и α теперь связаны так: $p = E(1/2(\alpha + 1))$, $\alpha = \overline{1, 2r_j - 1}$, где $E(\cdot)$ — целая часть числа. Приближенное выражение (3.26) для каждого Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2r_j - 1}$, остается без изменений. Выражение (3.22) следует записать следующим образом:

$$\Delta\hat{x}(t_k) = \Phi(t_k, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2p-1}}^{t_j^{2p}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau. \quad (3.22)'$$

Выражение (3.19) следует заменить на (3.19)':

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{t_j^{2p-1}}^{t_j^{2p}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.19)'$$

Важно отметить работоспособность итерационного процесса вычисления оптимального по расходу ресурса управления, если не производится вычисление структуры искомого оптимального управления с помощью квазиоптимального управления, а структура управления задается произвольно. Отметим особенности итерационного вычислительного процесса в этом случае.

1. Если заданная начальная структура управления (т.е. последовательность знаков управляющих воздействий на ненулевых интервалах) отличается от искомого оптимального управления, то в итерационном процессе происходит сближение и пересечение моментов переключений. Пересечение двух моментов переключений означает, что в выражении (3.22) в соответствующем члене суммы слагаемых поменялись пределы интегрирования. Изменение пределов интегрирования влечет смену знака интегрального выражения, т.е. смену знака управления на этом интервале.

2. Если начальная структура управления не совпадает на нескольких интервалах знакопостоянства со структурой искомого оптимального управления, то смена знаков управ-

ления происходит не одновременно, а последовательно и в произвольном порядке чередования смен знаков управления.

3. Если в начальном приближении неправильно задан знак управления на первом интервале знакопостоянства, то в итерационном процессе первый момент переключения t_j^1 сближается с моментом t_0 и пересекает его. Необходимо изменить знак управления на первом интервале.

4. Если в начальном приближении неправильно задан знак управления на последнем интервале, то в итерационном процессе вычисления оптимального управления происходит сближение и пересечение последнего момента переключения t_j^α с моментом t_k . Это команда на изменение знака управления на последнем интервале.

5. Если начальное условие $x(t_0)$ находится на многообразии переключений, то в итерационном процессе вычисления оптимального управления происходит сближение и “слипание” моментов переключений интервала, на котором управление равно нулю. В результате уменьшается количество (число) интервалов оптимального управления.

6. Моменты переключений управления на каждой итерации задаются с помощью сопряженной системы заданием новых начальных условий. Поэтому с изменением на каждой итерации начального условия $\psi(t_0)$ изменяются сразу все моменты переключений управления. Система очень чувствительна к изменению начального условия $\psi(t_0)$. Поэтому для обеспечения сходимости вычислительного процесса параметр γ должен быть весьма малым (порядка 10^{-3} и менее при увеличении T). Однако с уменьшением γ существенно увеличивается число итераций. При поиске оптимального управления происходит многократное перемещение по оси времени всех моментов переключений, и поэтому сходимость по норме в этом случае не является монотонной.

7. Начальное неправильное задание структуры искомого оптимального управления требует многократной прогонки моментов переключений по оси времени с целью сближения и пересечения моментов переключений на тех интервалах, на которых знаки управления заданы неверно. Это существенно увеличивает трудоемкость вычислительного алгоритма.

8. Если начальная структура управления задана неверно, то даже точное задание моментов переключений не освобождает от необходимости многократной прогонки моментов переключений по оси времени для восстановления знаков управления.

9. Суммарная длительность управляющих воздействий прямо пропорциональна расходу ресурса и уменьшается по мере увеличения времени перевода T .

10. Квазиоптимальное управление позволяет сразу определить структуру искомого оптимального управления и резко сократить число итераций для его вычисления.

4. Моделирование и численное исследование

Рассмотрим систему четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(t_0) &= y_{10}, \\ \dot{y}_2 &= y_3, & y_2(t_0) &= y_{20}, \\ \dot{y}_3 &= y_4, & y_3(t_0) &= y_{30}, \\ \dot{y}_4 &= a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4 + bu + F, & y_4(t_0) &= y_{40}, \quad |u| \leq M. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Система (4.1) при $a_{41} = -2.9684$; $a_{42} = -5.84$; $a_{43} = -6.33$; $a_{44} = -3.4$ имеет следующие комплексно-сопряженные собственные значения матрицы A : $\lambda_{1,2} = -0.784 \pm j 0.986$;

$\lambda_{3,4} = -0.916 \pm j 1.016$. Принято: $b = 4$; $M = 5$; $F = \text{const}$. Конечное состояние $y(t_k) = (1, 1, 1, 1)$. Требуется найти оптимальное по расходу ресурса управление, переводящее систему (4.1) из начального в конечное состояние за заданное время T .

Пусть заданы начальное условие $y(t_0) = (3, -2, -5, 1)$, время перевода $T = 4.5$, возмущение $F = 2$. Оптимальное по расходу ресурса управление имеет структуру $[0; +M; 0; -M; 0; +M; 0; +M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.305143$; $t^2 = 0.602335$; $t^3 = 2.524759$; $t^4 = 2.617164$; $t^5 = 3.626838$; $t^6 = 4.102450$; $t^7 = 4.355869$.

Для сравнения отметим, что оптимальное по расходу ресурса управление без возмущения имеет другую структуру управления $[0; +M; 0; +M; 0; +M; 0; +M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.064855$; $t^2 = 0.648334$; $t^3 = 2.432697$; $t^4 = 2.509280$; $t^5 = 3.501109$; $t^6 = 4.018049$; $t^7 = 4.255889$. Это управление переводит систему (4.1) в ненулевое конечное состояние $y(t_k) = (1, 1, 1, 1)$ при $F = 0$.

Если время перевода задано равным $T = 5$, то система (4.1) с возмущением $F = 2$ переводится из $y(t_0) = (3, -2, -5, 1)$ в $y(t_k) = (1, 1, 1, 1)$ оптимальным по расходу ресурса управлением, имеющим уже другую структуру $[0; -M; 0; -M; 0; +M; 0; +M]$ и следующие значения моментов переключений: $t^1 = 0.932113$; $t^2 = 0.977261$; $t^3 = 3.022865$; $t^4 = 3.120309$; $t^5 = 4.130055$; $t^6 = 4.608872$; $t^7 = 4.862296$.

Если время перевода задано равным $T = 5.5$, то система (4.1) с тем же возмущением $F = 2$ переводится из $y(t_0) = (3, -2, -5, 1)$ в $y(t_k) = (1, 1, 1, 1)$ оптимальным по расходу ресурса управлением, имеющим такую же структуру $[0; -M; 0; -M; 0; +M; 0; +M]$, но другие значения моментов переключений: $t^1 = 1.318457$; $t^2 = 1.569962$; $t^3 = 3.532367$; $t^4 = 3.593677$; $t^5 = 4.630051$; $t^6 = 5.077072$; $t^7 = 5.340022$.

Если $T = 6.5$, то имеем уже другую структуру оптимального управления $[0; -M; 0; +M; 0; +M; 0; +M]$ и следующие моменты переключений: $t^1 = 2.235165$; $t^2 = 2.576283$; $t^3 = 4.515868$; $t^4 = 4.542413$; $t^5 = 5.621938$; $t^6 = 5.994674$; $t^7 = 6.282112$.

На рис. 2 приведены эти оптимальные по расходу ресурса управления: 1 — без возмущения при $T = 4.5$; 2, 3, 4, 5 — с возмущением $F = 2$ и временами перевода $T = 4.5$; $T = 5$; $T = 5.5$; $T = 6.5$ соответственно.

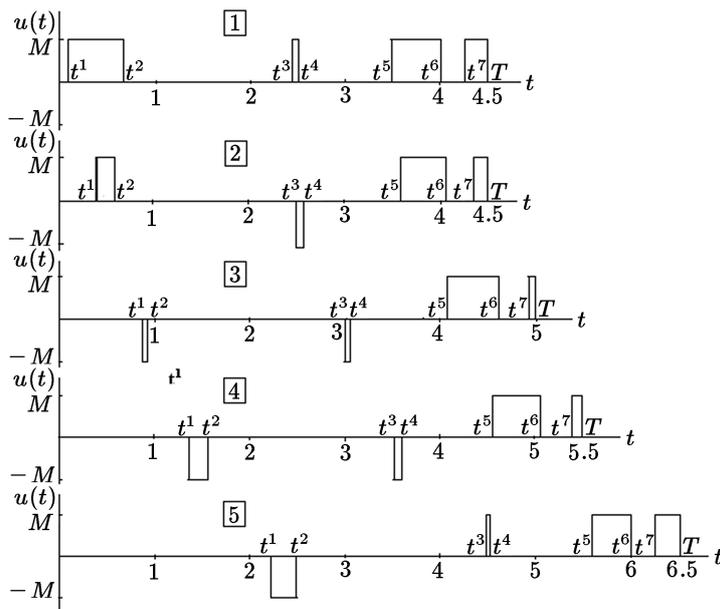


Рис. 2. Оптимальные по расходу ресурса управления

Заключение

Разработан общий метод вычисления оптимального по расходу ресурса управления возмущенными динамическими системами, включающий как нормальное, так и вырожденное решения задачи. Метод основан на разделении задачи на три независимые подзадачи: 1) учет действия возмущения на систему; 2) вычисление структуры оптимального управления; 3) вычисление моментов переключений оптимального управления. Учет действия возмущения на систему и перевод в ненулевое конечное состояние сводятся к преобразованию начального и конечного состояний системы. Вычисление структуры основано на оригинальном методе формирования квазиоптимального управления. Структура квазиоптимального управления совпадает со структурой искомого оптимального управления. На этом свойстве и основано использование квазиоптимального управления для нахождения знаков управляющих воздействий для каждой компоненты вектора искомого оптимального управления. Вычисление моментов переключений управления основано на связи между отклонениями начальных условий сопряженной системы с отклонениями фазовой траектории в конечный момент. Суммарная длительность управляющих воздействий прямо пропорциональна расходу ресурса и уменьшается по мере увеличения времени перевода T . При вычислении моментов переключений оптимального управления на каждой итерации происходит одновременно изменение всех моментов переключений. Использование квазиоптимального управления позволяет сразу определить структуру искомого оптимального управления, что избавляет от многократной прогонки моментов переключений и существенно уменьшает число необходимых итераций.

Литература

1. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.
2. **Болтянский В.Г.** Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
4. **Singh T.** Fuel/time optimal control of the benchmark problem // *J. Guid. Control Dyn.* — 1995. — Vol. 18, № 8. — P. 1225–1231.
5. **Иванов В.А., Кожевников С.А.** Одна задача синтеза оптимального по “расходу топлива” управления линейными объектами второго порядка с производными управления // *Известия РАН. Теория и системы управления.* — 1996. — № 4. — С. 77–83.
6. **Dewell L.D., Speyer J.L.** Fuel-optimal periodic control and regulation in constrained hypersonic flight // *J. Guid. Control Dyn.* — 1997. — Vol. 20, № 5. — P. 923–932.
7. **Liu S.W., Singh T.** Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers // *J. Guid. Control Dyn.* — 1997. — Vol. 20, № 2. — P. 394–397.
8. **Александров В.М.** Приближенное решение линейной задачи на минимум расхода ресурсов // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.* — 1999. — Т. 39, № 3. — С. 418–430.
9. **Шевченко Г.В.** Метод нахождения оптимального по минимуму расхода ресурсов управления для объектов специального вида // *Автометрия.* — 2006. — Т. 42, № 2. — С. 49–67.
10. **Александров В.М.** Оптимальное по расходу ресурсов управление линейными системами // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.* — 2011. — Т. 51, № 4. — С. 562–579.
11. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.

12. **Любушин А.А.** О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1982. — Т. 22, № 1. — С. 30–35.
13. **Грачев Н.И., Евтушенко Ю.Г.** Библиотека программ для решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1979. — Т. 19, № 2. — С. 367–387.
14. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Конструктивные методы оптимизации. Ч.2. Задачи управления. — Минск: Изд-во “Университетское”, 1984.
15. **Срочко В.А.** Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
16. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. — 2006. — Т. 61, вып. 4. — С. 25–76.
17. **Александров В.М.** Квазиоптимальное управление динамическими системами // Автоматика и телемеханика. — 2016. — Т. 7. — С. 47–67.
18. **Александров В.М.** Вычисление оптимального управления в реальном времени // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 10. — С. 1778–1800.
19. **Александров В.М.** Итерационный метод вычисления в реальном времени оптимального по быстрдействию управления // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2007. — Т. 10, № 1. — С. 1–28.
20. **Александров В.М., Дыхта В.А.** Приближенное решение задачи минимизации расхода ресурсов. II. Оценки близости управлений // Сиб. журн. промышленной математики. — 2011. — Т. 14, № 3. — С. 3–13.

*Поступила в редакцию 1 июня 2016 г.,
в окончательном варианте 23 января 2017 г.*

Литература в транслитерации

1. **Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.** Matematicheskaya teoriya optimal'nyh protsessov. — М.: Nauka, 1976.
2. **Boltyanskiy V.G.** Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya. — М.: Nauka, 1969.
3. **Krasovskiy N.N.** Teoriya upravleniya dvizheniem. — М.: Nauka, 1968.
4. **Singh T.** Fuel/time optimal control of the benchmark problem // J. Guid. Control Dyn. — 1995. — Vol. 18, № 8. — P. 1225–1231.
5. **Ivanov V.A., Kozhevnikov S.A.** Odnа zadacha sinteza optimal'nogo po “raskhodu topliva” upravleniya lineynymi ob"ektami vtorogo poryadka s proizvodnymi upravleniya // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. — 1996. — № 4. — S. 77–83.
6. **Dewell L.D., Speyer J.L.** Fuel-optimal periodic control and regulation in constrained hypersonic flight // J. Guid. Control Dyn. — 1997. — Vol. 20, № 5. — P. 923–932.
7. **Liu S.W., Singh T.** Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers // J. Guid. Control Dyn. — 1997. — Vol. 20, № 2. — P. 394–397.
8. **Aleksandrov V.M.** Priblizhennoe reshenie lineynoy zadachi na minimum raskhoda resursov // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1999. — Т. 39, № 3. — С. 418–430.
9. **Shevchenko G.V.** Metod nahozhdeniya optimal'nogo po minimumu raskhoda resursov upravleniya dlya ob"ektov spetsial'nogo vida // Avtometriya. — 2006. — Т. 42, № 2. — С. 49–67.
10. **Aleksandrov V.M.** Optimal'noe po raskhodu resursov upravlenie lineynymi sistemami // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2011. — Т. 51, № 4. — С. 562–579.
11. **Fedorenko R.P.** Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya. — М.: Nauka, 1978.

12. **Lyubushin A.A.** O primeneniі modifikatsiy metoda posledovatel'nyh priblizheniy dlya resheniya zadach optimal'nogo upravleniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1982. — Т. 22, № 1. — S. 30–35.
13. **Grachev N.I., Evtushenko YU.G.** Biblioteka programm dlya resheniya zadach optimal'nogo upravleniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1979. — Т. 19, № 2. — S. 367–387.
14. **Gabasov R., Kirillova F.M.** Konstruktivnye metody optimizatsii. CH.2. Zadachi upravleniya. — Minsk: Izd-vo “Universitetskoe”, 1984.
15. **Srochko V.A.** Iteratsionnye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya. — M.: Fizmatlit, 2000.
16. **Osipov Yu.S.** Pakety programm: podhod k resheniyu zadach pozitsionnogo upravleniya s nepolnoy informatsiyey // Uspekhi mat. nauk. — 2006. — Т. 61, vyp. 4. — S. 25–76.
17. **Aleksandrov V.M.** Kvazioptimal'noe upravlenie dinamicheskimi sistemami // Avtomatika i telemekhanika. — 2016. — Т. 7. — S. 47–67.
18. **Aleksandrov V.M.** Vychislenie optimal'nogo upravleniya v real'nom vremeni // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2012. — Т. 52, № 10. — S. 1778–1800.
19. **Aleksandrov V.M.** Iteratsionnyy metod vychisleniya v real'nom vremeni optimal'nogo po bystrodeystviyu upravleniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2007. — Т. 10, № 1. — S. 1–28.
20. **Aleksandrov V.M., Dyhta V.A.** Priblizhennoe reshenie zadachi minimizatsii raskhoda resursov. II. Otsenki blizosti upravleniy // Sib. zhurn. industrial'noy matematiki. — 2011. — Т. 14, № 3. — S. 3–13.