

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

УДК 539.375

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРЕЩИН ПРИ МНОЖЕСТВЕННОМ ГИДРОРАЗРЫВЕ

Е. Н. Шер, И. В. Колыхалов, А. М. Михайлов

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрена система из двух осесимметричных последовательно проведенных трещин гидроразрыва, соосных скважине. Построены формы поверхности развивающейся новой трещины в поле напряжений, порожденном имеющейся; рассчитано давление, необходимое для роста новой трещины. Оценена область влияния созданной первоначально трещины на вновь образующуюся. Изучены параметры, от которых зависит искривление новой трещины, получена формула, позволяющая оценить степень ее искривления.

Гидроразрыв, осесимметричная трещина, система трещин, форма трещин, горное давление

В последнее десятилетие гидроразрыв пласта — один из самых распространенных методов повышения продуктивности нефтяных и газовых скважин, а также метод для создания непроницаемых экранов в горных породах и улучшения условий дегазации угольных пластов. Более того, гидроразрыв пласта применяется для разработки новых флюидонесущих пластов, извлечение нефти или газа из которых традиционными способами нерентабельно, например для добычи газа из сланцев или уплотненных песчаников.

Трудноизвлекаемые запасы нефти и газа лучше всего добывать вскрытием больших площадей и созданием высокопроводимых каналов в флюидонесущем пласте, а именно бурением длинных горизонтальных скважин с созданием большого количества трещин гидроразрыва. Наиболее оптимальным является создание трещин перпендикулярно скважине через определенный интервал [1] и проведение новой трещины как можно ближе к имеющимся. Для этого заранее нужно знать, какое должно быть давление закачиваемой жидкости в развивающуюся трещину, а также, какова будет траектория развития этой трещины.

Изучение поведения развивающихся трещин множественного гидроразрыва перпендикулярно скважине является актуальной для практики задачей, так как большинство сделанных научных работ в этой области касались изучения параметров одной прямолинейной развивающейся трещины [2–5] или моделирования двух трещин, распространяющихся параллельно и одновременно [6–8].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе исследуется развитие осесимметричной трещины гидроразрыва вблизи имеющейся дисковой. Задача рассматривается в осесимметричной постановке теории упругости. В упругом пространстве, сжатом на бесконечности главными напряжениями горного сжатия $P_{xx} = P_{yy}$, P_{zz} , перпендикулярно оси Z на расстоянии h находятся две симметрично расположенные, параллельные дисковые трещины — большая и малая, радиусами R и r (рис. 1). Малая трещина нагружена изнутри давлением p , большая может быть нагружена давлением p_0 или на ней задано раскрытие, равное в ее центре $2U_0$.

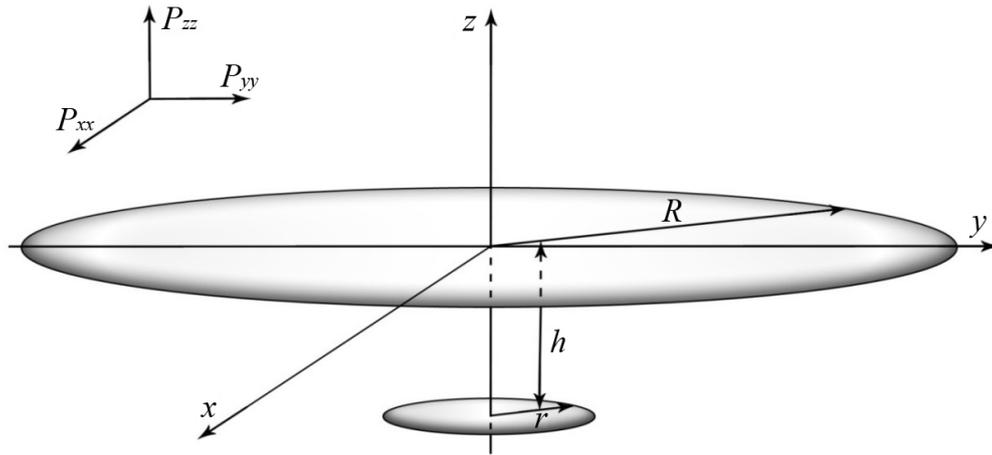


Рис. 1. Начальная конфигурация трещин гидроразрыва в осесимметричной постановке задачи

РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В МАЛОЙ ТРЕЩИНЕ, ВЫЗЫВАЮЩЕГО ЕЕ РАЗВИТИЕ

Для того чтобы оценить давление нагнетаемой жидкости, необходимое для начала роста малой трещины, нужно определить компоненты поля напряжений в точках оси имеющейся дисковой трещины радиусом R .

Напряженное состояние упругого пространства с дисковой трещиной, нагруженной изнутри давлением, исследовалось до настоящего времени достаточно подробно [9, 10]. В частности, в [10] приведены формулы для компонентов тензора напряжений и вектора смещений в плоскости трещины. Для точек упругого пространства, лежащих вдоль оси трещины, такие зависимости получены с использованием формул Пича–Келлера [11], определяющих поле напряжений в упругом пространстве, свободном от напряжений на бесконечности и содержащем дислокационный разрыв по поверхности, ограниченной контуром Γ с координатами $(\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} d\xi \left[b_y \left(3L \frac{Z^3}{H^5} - L \frac{Z}{H^3} \right) - b_z \left(3L \frac{YZ^2}{H^5} + L \frac{Y}{H^3} \right) \right] + \\ & + d\eta \left[b_z \left(3L \frac{XZ^2}{H^5} + L \frac{X}{H^3} \right) - b_x \left(3L \frac{Z^3}{H^5} - L \frac{Z}{H^3} \right) \right] + \\ & + d\zeta \left[b_x \left(3L \frac{YZ^2}{H^5} - M \frac{Y}{H^3} \right) - b_y \left(3L \frac{XZ^2}{H^5} - M \frac{X}{H^3} \right) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где b_x, b_y, b_z — координаты вектора Бюргерса; (ξ, η, ζ) — точки на контуре дислокации; H — расстояние между точкой контура и точкой наблюдения (x, y, z) ; X, Y, Z — разность соответствующих координат; L, M, N — параметры, определяемые упругими модулями Ламе:

$$L = \frac{2\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu}, \quad M = \frac{2\mu^2}{\lambda + 2\mu}, \quad N = \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Остальные компоненты тензора напряжений можно получить циклической перестановкой координат и компонент вектора Бюргерса. Для случая дислокации в виде диска радиусом r_1 , расположенного в плоскости XY с центром в начале координат, и вектора Бюргерса $(0, 0, b_z)$, соответствующего нормальному раскрытию b_z , при $x = y = 0, z = -h$ формула (1) упрощается:

$$\sigma_{zz}(0, 0, h) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} d\xi \left[-b_z \left(3L \frac{YZ^2}{H^5} + L \frac{Y}{H^3} \right) \right] + d\eta \left[b_z \left(3L \frac{XZ^2}{H^5} + L \frac{X}{H^3} \right) \right],$$

где $\xi = r_1 \cos \alpha, \eta = r_1 \sin \alpha, X = -r_1 \cos \alpha, Y = -r_1 \sin \alpha, Z = -h, H = \sqrt{r_1^2 + h^2}$.

После интегрирования по α от 0 до 2π , получаем

$$\sigma_{zz}(0, 0, h) = \frac{-b_z}{2} L \frac{r_1^2(4h^2 + r_1^2)}{H^5}. \quad (2)$$

Формула (2) описывает компоненту тензора напряжений σ_{zz} поля дисковой дислокации радиусом r_1 с постоянным раскрытием b_z . В то же время раскрытие дисковой трещины радиусом R , нагруженной изнутри давлением p_0^* , не постоянно по радиусу r и определяется формулой

$$b_z = \frac{8(1-\nu^2)p_0^*\sqrt{R^2 - r^2}}{\pi E}, \quad (3)$$

где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругой среды соответственно.

Поле такой трещины можно представить как суперпозицию полей от дислокационных круговых полосок, на которые разбита по радиусу дисковая трещина радиусом R , с раскрытием (3).

Компонента тензора напряжений σ_{zz}^{cr} при наличии дисковой трещины запишется так:

$$\sigma_{zz}^{cr}(0, 0, h) = \int_0^R b_z(r) \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} dr = - \int_0^R \sigma_{zz} \frac{db_z}{dr} dr. \quad (4)$$

После интегрирования (4) окончательно получаем для дисковой трещины

$$\sigma_{zz}^{cr} = - \frac{2(1-\nu^2)p_0^*}{\pi E} L \left(I + 2Rh \frac{R^2 - h^2}{(R^2 + h^2)^2} \right), \quad (5)$$

где $I = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{h^2 - R^2}{h^2 + R^2} \right]$.

Таким же способом получено выражение для радиальной компоненты напряжений $\sigma_{xx}^{cr}(0, 0, h)$ вдоль оси Z :

$$\sigma_{xx}^{cr} = - \frac{(1-\nu^2)p_0^*}{\pi E} \left[L \left(2I - 4Rh \frac{h^2 + 2R^2}{(R^2 + h^2)^2} \right) - M \left(I - \frac{2Rh}{R^2 + h^2} \right) \right].$$

На рис. 2 приведены зависимости напряжений σ_{xx}^{cr} и σ_{zz}^{cr} вдоль оси дисковой трещины радиусом R , нагруженной изнутри внутренним давлением p_0^* , от расстояния h до трещины. С помощью этого графика можно оценить зону возмущения, вносимого в свободное от напряжений упругое пространство раскрытой дисковой трещиной гидроразрыва. Заметим, что σ_{zz}^{cr} уменьшается от значения давления p_0^* в трещине до $0.1 p_0^*$ при удалении на $\approx 2.5R$. Можно сделать вывод, что область повышенного давления около дисковой трещины ограничивается с 10 % точностью расстоянием $\approx 2.5R$.

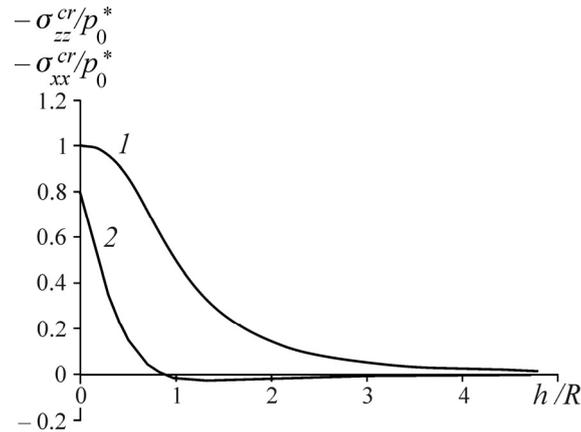


Рис. 2. Зависимости напряжений σ_{zz}^{cr} , σ_{xx}^{cr} (кривые 1, 2) вдоль оси дисковой трещины радиусом R , нагруженной изнутри давлением p_0^* , от расстояния h до трещины

Равновесное состояние малой трещины радиусом r (см рис. 1), нагруженной давлением p , определяется коэффициентом интенсивности напряжений в ее вершинах (КИН). При наличии сжатия горным давлением P_{zz} и поля, вносимого раскрытием большой трещины σ_{zz}^{cr} , коэффициент интенсивности имеет вид

$$K_I = 2(p + P_{zz} + \sigma_{zz}^{cr})\sqrt{\frac{r}{\pi}},$$

где σ_{zz}^{cr} определяется формулой (5) при $p_0^* = p_0 + P_{zz}$.

Согласно критерию Ирвина, критическое давление p^* , необходимое для начала роста малой трещины, равно

$$p^* = -P_{zz} + \frac{2(1-\nu^2)(p_0 + P_{zz})}{\pi E} L \left(I + 2Rh \frac{R^2 - h^2}{(R^2 + h^2)^2} \right) + \frac{K_{IC}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{r}}, \quad (6)$$

здесь K_{IC} — критический коэффициент интенсивности напряжений породы пласта.

Если у большой трещины фиксировано раскрытие, то, принимая, что она имеет форму эллипсоида, получаем из (3) давление, необходимое для ее раскрытия в центре до величины $2U_0$:

$$p_0^* = \frac{\pi E U_0}{4(1-\nu^2)R}. \quad (7)$$

В итоге для случая с заданным раскрытием в большой трещине имеем

$$p^* = -P_{zz} + \frac{U_0}{2R} L \left(I + 2Rh \frac{R^2 - h^2}{(R^2 + h^2)^2} \right) + \frac{K_{IC}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{r}}. \quad (8)$$

Метод, использованный для нахождения напряжений вдоль оси нагруженной дисковой трещины с помощью формул Пича–Келлера, применен для разработки программы расчета напряженного состояния упругого пространства с осесимметричными трещинами (ASDD).

РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИИ РАЗВИТИЯ МАЛОЙ ТРЕЩИНЫ

Расчет развития малой трещины проводился с помощью численной программы ASDD-T, разработанной по методу разрывных смещений [12, 13]. Для определения напряженного состояния упругого пространства с осесимметричными трещинами их поверхность разбивается параллелями и меридианами на дислокационные площадки, раскрытия и сдвиги берегов которых описываются векторами Бюргерса. Чтобы найти компоненты векторов Бюргерса, строится система линейных уравнений из условия выполнения граничных условий на трещинах. Коэффициенты такой системы рассчитываются с использованием формул Пича–Келлера, выражающих компоненты тензора напряжений через смещения на дислокационных площадках. Решение системы уравнений позволяет определить искомое напряженное состояние упругого пространства вокруг осесимметричных трещин.

Расчет развития трещины осуществляется поэтапно. На каждом этапе определяется равновесное для развивающейся трещины давление и направление ее развития. Угол поворота трещины находится из условия ее распространения по направлению с максимальным растягивающим напряжением. Равновесное давление устанавливается из энергетического условия Гриффитса, после чего трещина удлиняется на заданный отрезок. Далее цикл повторяется.

Конкретные расчеты проводились для параметров задачи, соответствующих типовым газовым и нефтяным месторождениям с низкопроницаемыми коллекторами. В качестве характеристики искривления новой трещины использована величина Δ — отклонение траектории трещины в меридиональном сечении от прямолинейного распространения на радиусе имеющейся трещины: $\Delta = h - z(R, 0)$, где $z(x, 0)$ — форма вновь образованной трещины в сечении $y = 0$.

На рис. 3 представлены примеры форм осесимметричных трещин гидроразрыва, развившихся из начальных, находящихся на разном расстоянии от большой при заданном максимальном раскрытии $2U_0 = 8$ мм, и графики критического давления в развивающейся трещине в зависимости от ее длины при $h = 3, 10, 30, 60$ м (кривые 1–4).

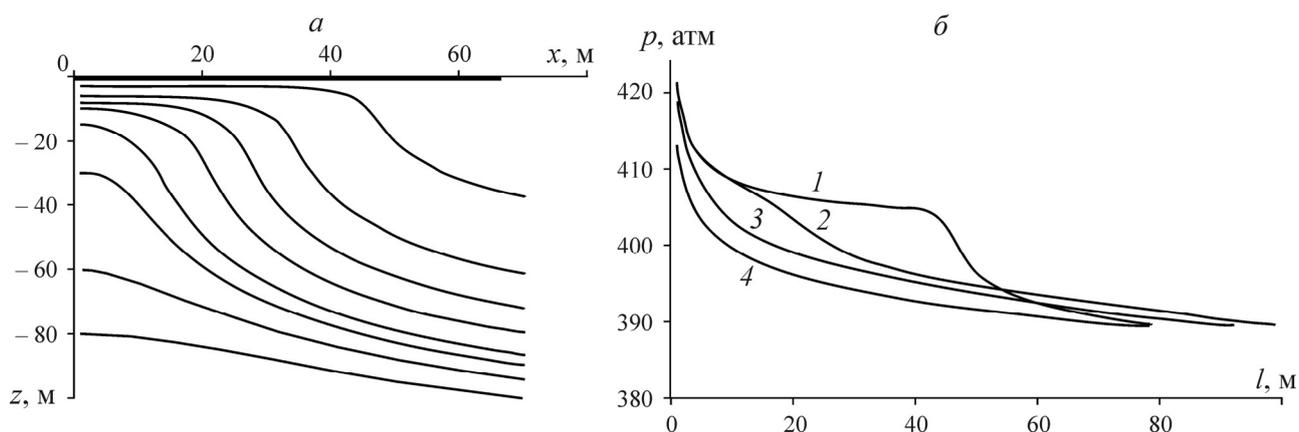


Рис. 3. Формы осесимметричных трещин, развившихся из начальных радиусом 1 м, находящихся на расстояниях $h = 3, 6, 8, 10, 15, 30, 60, 80$ м от имеющейся дисковой радиусом $R = 60$ м при максимальном раскрытии $2U_0 = 8$ мм, в поле внешнего сжатия $P_{xx} = P_{yy} = -39$ МПа, $P_{zz} = -38.5$ МПа (а), и изменение внутреннего давления при равновесном росте трещины (б). Кривые 1–4 соответствуют $h = 3, 10, 30, 60$ м

Анализируя результаты расчетов для различных значений параметров задачи, выявлено, что на отклонение трещины от прямолинейного развития Δ наибольшее влияние оказывают раскрытие имеющейся трещины $2U_0$ или давление в ней p_0 , разность давлений, действующих вдоль и поперек трещин на бесконечности $\Delta P = P_{zz} - P_{xx}$, и расстояние между начальной трещиной и имеющейся h . Влияние коэффициента интенсивности напряжений K_{IC} на изменение Δ заметно при малых значениях $\Delta P = P_{zz} - P_{xx}$. Так, при $\Delta P = 0.5$ МПа увеличение K_{IC} в 2 раза приводит к уменьшению Δ на 10 %, а при $\Delta P = 1.5$ МПа Δ изменяется на 5 %.

ВЛИЯНИЕ РАЗНОСТИ ДАВЛЕНИЙ ΔP И РАССТОЯНИЯ h НА ОТКЛОНЕНИЕ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ТРЕЩИНЫ

Расчеты по имеющемуся набору параметров задачи для разных боковых давлений P_{xx} позволили определить влияние этого параметра на отклонение трещин от прямолинейного развития. Такие зависимости представлены на рис. 4. Оказалось, что отклонение трещины от прямолинейного распространения Δ зависит от разности главных напряжений ΔP , и такая зависимость может быть приближенно описана степенной функцией $\Delta \sim [1/(P_{zz} - P_{xx})]^M$, где $M \approx 1.57$ (рис. 5).

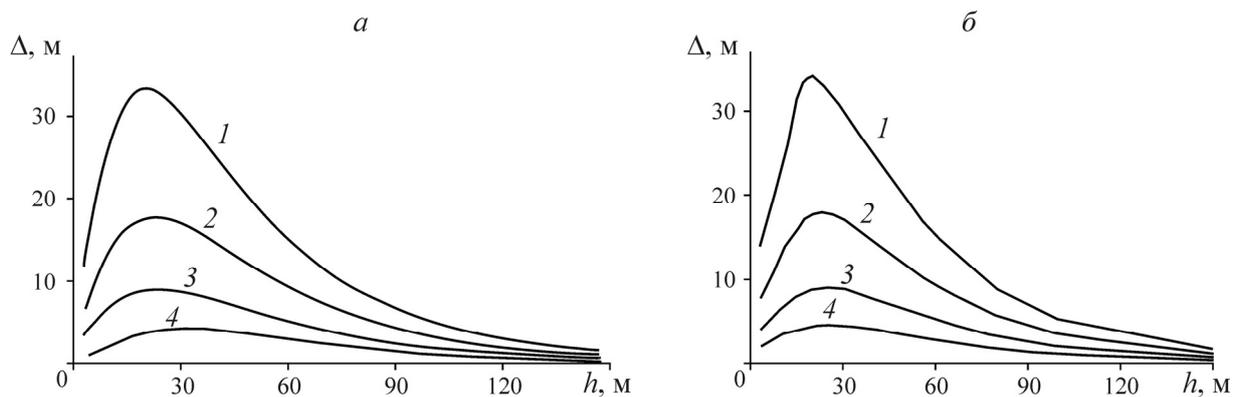


Рис. 4. Влияние бокового напряжения P_{xx} и расстояния h на кривизну осесимметричной трещины: 1–4 соответствует $P_{xx} = -39.5, -40, -41, -43$ МПа. В большой трещине задано раскрытие $2U_0 = 8$ мм (а) и давление $p_0 = 40.1$ МПа (б), $P_{zz} = -38.5$ МПа, $R = 60$ м

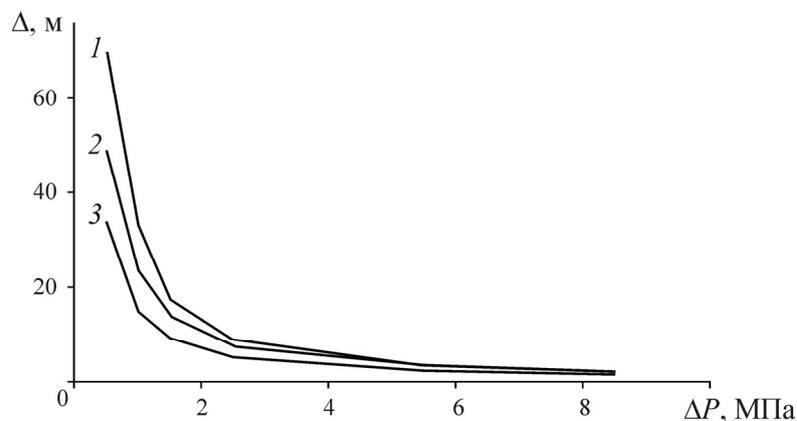


Рис. 5. Влияние разности главных напряжений $P_{zz} - P_{xx}$ и расстояния h на отклонение осесимметричной трещины. Кривые 1–3 соответствуют $h = 18, 42, 60$ м, $2U_0 = 8$ мм, $R = 60$ м

Максимальное отклонение от прямолинейного развития наблюдается у трещин, находящихся на расстоянии $\approx 0.3R$ от имеющейся (рис. 4а, б). При больших расстояниях такое отклонение уменьшается, достигая на расстоянии $\approx 2R$ значения $\approx 0.05R$. Уменьшение бокового напряжения с -39.5 до -43 МПа уменьшает отклонение в 10–12 раз. Для сравнения приведем результаты исследований последовательного развития плоских трещин гидроразрыва [14]. У плоских трещин максимальное отклонение от прямолинейного развития вторичной трещины наблюдается на расстоянии $\approx 0.5L$ (L — полудлина имеющейся трещины). При больших расстояниях отклонение уменьшается, достигая на расстоянии $\approx 2L$ значения $\approx 0.2L$.

ВЛИЯНИЕ РАСКРЫТИЯ $2U_0$ БОЛЬШОЙ ТРЕЩИНЫ НА ОТКЛОНЕНИЕ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ТРЕЩИНЫ

Характер влияния раскрытия имеющейся трещины на отклонение развивающейся от прямолинейного распространения в меридиональном сечении определен с помощью большого количества расчетов для различных параметров задачи при изменении значения $2U_0$. Примеры таких расчетов приведены на рис. 6.

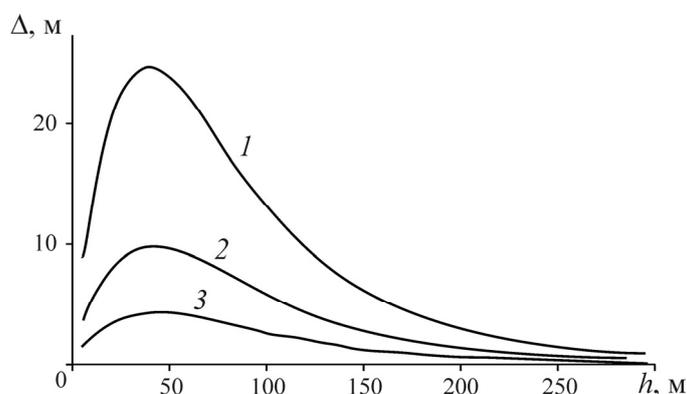


Рис. 6. Влияние раскрытия большой дисковой трещины $2U_0$ на кривизну траектории развивающейся: 1–3 соответствуют $2U_0 = 8, 4, 2$ мм, $P_{xx} = -39.5$ МПа, $P_{zz} = -38.5$ МПа, $R = 100$ м

Детальный анализ полученных зависимостей показал, что $\Delta \sim (2U_0)^{M_1}$, где $M_1 \approx M$. В случае с плоскими трещинами [14] зависимость отклонения вторичной трещины гидроразрыва от раскрытия имеющейся $2U_0$ близка к линейной.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как уже указывалось, основное влияние на отклонение развивающейся трещины оказывают: разность главных напряжений, вызванных горным давлением и действующих вдоль и поперек трещин на бесконечности $\Delta P = P_{zz} - P_{xx}$; расстояние между начальной трещиной вторичного гидроразрыва и имеющейся h ; раскрытие имеющейся большой трещины $2U_0$ или давление в ней p_0 . Рассмотрим безразмерные параметры изучаемой расчетной модели: $\alpha_1 = \Delta / R$ — относительное отклонение вторичного гидроразрыва от прямолинейного распространения в меридианальном сечении; $\alpha_2 = \Delta P / E$ — относительная разность главных компонент напряжений поля внешнего сжатия; $\alpha_3 = h / R$ — относительное расстояние начальной трещины вторичного гидроразрыва от имеющейся; $\alpha_4 = 2U_0 / R$ — относительное раскрытие имеющейся трещины, посаженной на проппант.

Форма осесимметричной трещины гидроразрыва, развивающейся около имеющейся дисковой трещины, посаженной на проппант, зависит при прочих равных условиях от отношения давления раскрытия p_0^* имеющейся трещины до значения $2U_0$ в свободном от напряжений упругом пространстве и разности главных напряжений горного сжатия, действующих вдоль и поперек трещин на бесконечности ΔP . В рассматриваемой расчетной модели, при сохранении ΔP , величина P_{zz} не оказывает никакого влияния на форму трещины. В предположении, что имеющаяся трещина, посаженная на проппант, имеет эллиптическое раскрытие с максимальным значением $2U_0$ и, следовательно, для ее раскрытия в центре до значения $2U_0$ необходимо давление p_0^* (7), определяющим форму трещины безразмерным параметром будет являться комбинация

$$\alpha_5 = F_1(\alpha_2, \alpha_4) = \frac{\pi U_0 E}{4(1-\nu^2)R(P_{xx} - P_{zz})}. \quad (9)$$

Для безразмерного отклонения Δ / R приближенно имеем функциональное соотношение

$$\Delta / R = F_2(\alpha_3, \alpha_5). \quad (10)$$

Учитывая близкую к степенной зависимость отклонения трещины Δ от раскрытия $2U_0$, функциональное соотношение (10) можно представить в виде

$$\Delta / R = \left[\frac{\pi U_0 E}{4(1-\nu^2)R(P_{xx} - P_{zz})} \right]^M f(h / R).$$

Функцию $f(h / R)$ с помощью зависимостей, примеры которых приведены на рис. 4а, б и рис. 6, можно записать выражением

$$f(h / R) = B \frac{h}{L} e^{-3\left(\frac{h}{R}\right)^I},$$

где I — параметр приближения.

В результате имеем интерполяционную формулу, позволяющую рассчитать отклонение вторичной трещины гидроразрыва от прямолинейного распространения в меридиональном сечении:

$$\Delta / R = B \left[\frac{\pi E U_0}{2(1-\nu^2)R(P_{xx} - P_{zz})} \right]^M \frac{h}{R} e^{-3\left(\frac{h}{R}\right)^I}, \quad (11)$$

где $B = 1$, $I = 0.9$, $M = 1.57$ — константы, выбираемые из условия наилучшего приближения расчетов, полученных с использованием численного метода и интерполяционной формулы.

Для определения точности расчета безразмерного отклонения с помощью формулы (11) выполнены расчеты по программе ASDD-T развития трещины вблизи существующей при изменении определяющих параметров задачи в диапазонах: $R = 30 - 100$ м, $h = 3 - 300$ м, $K_{IC} = 1.1 - 2.75$ МПа·м^{1/2}, $U_0 = 2 - 32$ мм, $\Delta P = 0.5 - 8.5$ МПа. Результаты расчетов приведены на рис. 7 в координатах Δ_a / R и Δ_p / R , рассчитанных для каждого набора параметров по формуле (11) и по программе ASDD-T соответственно.

Видно, что безразмерное отклонение Δ_a / R , определяющееся по формуле (11), достаточно близко к определяемому численными расчетами. Отклонение от расчетного значения по про-

грамме ASDD-T составляет ± 0.02 при малых значениях $\Delta/R < 0.1$ и при больших не превосходит $\pm 15\%$.

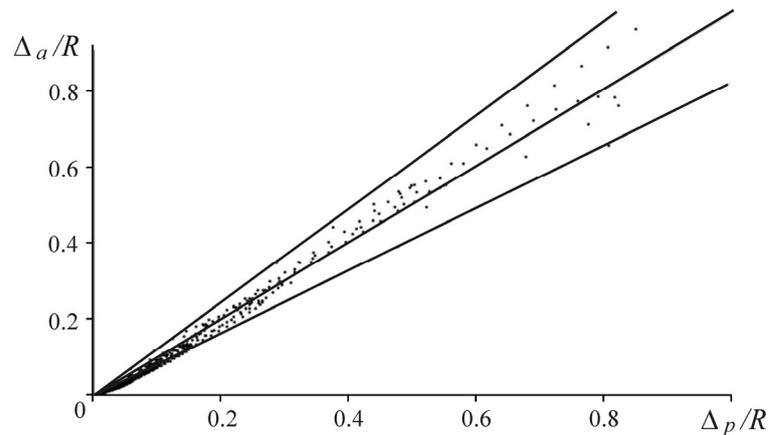


Рис. 7. Функциональная связь безразмерных отклонений развития осесимметричной трещины гидроразрыва вблизи существующей от прямолинейного в меридиональном сечении, рассчитанного по формуле (11) и по программе ASDD-T

ВЫВОДЫ

Определен размер зоны возмущения, вносимого в однородное поле сжатия раскрытой дисковой трещиной гидроразрыва радиусом R . Он составляет $\approx 2.5R$, т. е. имеющаяся трещина гидроразрыва слабо влияет на образование новой, если расстояние между ними больше $\approx 2.5R$.

В осесимметричной постановке выведена формула расчета давления, необходимого для начала гидроразрыва в поле влияния имеющегося.

Построены траектории в меридиональном сечении развития трещин гидроразрыва вблизи имеющихся, а также определен характер изменения критического давления внутри развивающейся трещины с увеличением ее длины для типовых условий нефтяных и газовых месторождений.

Выявлена зависимость степени искривления траектории развивающейся трещины от таких параметров, как расстояние до имеющейся трещины, напряженное состояние массива, его трещиностойкость K_{IC} , радиус и раскрытие имеющейся трещины. Оказалось, что основное влияние оказывает расстояние до имеющейся трещины, разность главных напряжений действующих в массиве $\Delta P = P_{zz} - P_{xx}$, раскрытие имеющейся трещины $2U_0$, а также K_{IC} при малых $(P_{zz} - P_{xx})$.

Получена интерполяционная формула, позволяющая рассчитать отклонение вторичной трещины гидроразрыва от прямолинейного распространения с точностью 15% по сравнению с данными численного расчета ее траектории.

В заключение авторы выражают благодарность канд. физ.-мат. наук О. П. Алексеенко за постановку задачи и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deimbacher F. X., Economides M. J., Jensen O. K. Generalized performance of hydraulic fractures with complex geometry intersecting horizontal wells, SPE 25505, Production Operations Symposium, 1993, Oklahoma City, Oklahoma, USA.

2. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. — 1955. — № 5.
3. **Алексеев О. П., Вайсман А. М.** Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. — 1988. — № 6.
4. **Алексеев О. П., Вайсман А. М.** Плоская задача гидроразрыва // ФТПРПИ. — 2001. — № 5.
5. **Алексеев О. П., Вайсман А. М.** Моделирование гидроразрыва продуктивного пласта, граничащего с пластичной вмещающей породой // ФТПРПИ. — 2001. — № 4.
6. **Rahman M. M., Hossain M. M. et al.** Analytical, numerical and experimental investigations of transverse fracture propagation from horizontal wells, J. of Petroleum Science & Engineering, 2002, Vol. 35.
7. **Crosby D. G., Rahman M. M. et al.** Single and multiple transverse fracture initiation from horizontal wells, J. of Petroleum Science & Engineering, 2002, Vol. 35.
8. **Kresse O., Weng X., et al.** Numerical Modeling of Hydraulic Fractures Interaction in Complex Naturally Fractured Formations, Rock Mechanics and Rock Engineering, 2013, Vol. 46.
9. **Снеддон И. С.** Преобразование Фурье. — М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
10. **Слепян Л. И.** Механика трещин. — Л.: Судостроение, 1981.
11. **Peach M. and Koehler J. S.** The forces exerted on dislocations and the stress fields produced by them, Physical Review, 1950, No. 3, Vol. 80.
12. **Dong C. Y., de Pater C. J.** Numerical implementation of displacement discontinuity method and its application in hydraulic fracturing, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2001, Vol. 191.
13. **Крауч С., Старфилд А.** Методы граничных элементов в механике твердого тела. — М.: Мир, 1987.
14. **Шер Е. Н., Колыхалов И. В.** Особенности последовательного развития близко расположенных трещин гидроразрыва // ФТПРПИ. — 2011. — № 6.

Поступила в редакцию 10/VIII 2013