УДК 539.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ СМАРТ-СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОВ

В. П. Матвеенко, Д. А. Ошмарин, Н. А. Юрлова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь, Россия
E-mails: mvp@icmm.ru, oshmarin@icmm.ru, yurlova@icmm.ru

Рассматривается задача о демпфировании колебаний смарт-структуры, состоящей из упругих, вязкоупругих материалов и пьезоэлементов, к которым присоединены шунтирующие цепи. Предлагается использовать в шунтирующей цепи вместо классического резистора элемент из электропроводящего материала, в частности полимерного материала, наполненного наночастицами графена. Этот элемент выполняет роль нескольких резисторов с различной величиной сопротивления, обеспечивающих мультимодальное демпфирование колебаний. Приводится математическая постановка задачи о вынужденных установившихся и собственных колебаниях рассматриваемых смарт-систем, а также результаты численных расчетов, из которых следует, что графеновые композиты могут быть использованы для дополнительного демпфирования колебаний смарт-структур на основе пьезоэлементов.

Ключевые слова: графеновые композиты, пьезоэлектрические элементы, колебания, мультимодальное демпфирование, численное моделирование.

DOI: 10.15372/PMTF20210505

Введение. В настоящей работе рассматриваются смарт-структуры на основе пьезоэлементов. Для таких структур имеется дополнительная возможность управления их динамическим поведением путем подключения к электродированным поверхностям пьезоэлементов шунтирующих электрических цепей, состоящих из резистивных, емкостных и индуктивных элементов. В данных системах электрический потенциал рассеивается с пьезоэлементов в шунтирующих цепях в виде тепла или электромагнитного излучения, а элементы шунтирующей цепи являются механическими аналогами дополнительных массы, упругих и вязких элементов.

Разработаны различные варианты шунтирующих цепей, которые согласно классификации, приведенной в [1], могут быть линейными и нелинейными. Среди линейных пассивных цепей, в свою очередь, можно выделить резистивные (состоящие только из резисторов) и резонансные (в состав которых входят резисторы и катушки индуктивности).

При использовании пьезоэлементов, шунтированных резистивными цепями, динамическое поведение конструкции становится таким же, как при замене упругого материала

Работа выполнена в рамках Программы создания и развития научного центра мирового уровня “Сверхзвук” на 2020–2025 гг. при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение № 075-15-2020-925 от 16 ноября 2020 г.).

конструкции вязкоупругим. При этом для соответствующей моды колебаний существует значение сопротивления, обеспечивающее максимальное демпфирование этой моды [2].

Применение резонансных цепей, состоящих из последовательно либо параллельно соединенных катушки индуктивности и резистора, приводит к образованию электрического колебательного контура и как следствие к возникновению в спектре частот колебаний деформируемой системы дополнительной резонансной частоты (собственной частоты колебательного контура). Максимальное демпфирование колебаний соответствующей моды достигается при параметрах электрической цепи, обеспечивающих совпадение частот колеблющегося контура и демпфируемой моды колебаний.

Для практических приложений представляет интерес демпфирование колебаний в заданном диапазоне частот при наличии в нем ряда резонансных частот, т. е. обеспечение мультимодального демпфирования. Существуют различные способы реализации мультимодального демпфирования:

— использование одного пьезоэлектрического элемента, взаимодействующего со сложной электрической цепью, в которой тем или иным способом реализована возможность демпфирования нескольких мод колебаний [3–13];

— использование ряда пьезоэлектрических элементов, образующих единую сеть и соединенных тем или иным способом с одной внешней электрической цепью [14–18];

— использование системы, состоящей из отдельных пьезоэлектрических элементов с собственными электрическими цепями [19–22].

Каждый из указанных способов имеет преимущества и недостатки.

Возможность использования в смарт-структурах шунтирующих электрических цепей обусловливает развитие соответствующей элементной базы для обеспечения резистивных, емкостных и индуктивных свойств. Появление полимерных композиционных материалов на основе наночастиц графена (далее — графеновые композиты) приводит к необходимости рассмотрения новых квазистатических и динамических задач для деформируемых тел [23]. Анализ данных о графеновых композитах позволяет сделать вывод, что элементы, изготовленные из этих материалов, являются деформируемыми телами и в то же время выполняют роль резистивных элементов электрических цепей [24–27].

В настоящей работе, являющейся продолжением [28], исследуются графеновые композиты, используемые в качестве резисторов в смарт-структурах на основе пьезоэлементов, и проводится математическое моделирование диссипативных свойств таких систем. Рассматривается вариант получения на основе одного элемента из графенового композита ряда резистивных элементов. Это позволяет осуществить мультимодальное демпфирование колебаний с использованием одного пьезоэлемента и одного элемента из графенового композита за счет реализации в нем различных значений сопротивления.

1. Математическая постановка и численная реализация задач о колебаниях деформируемых тел с элементами из пьезоматериалов и резисторами. Для математической постановки задач о колебаниях деформируемых тел с пьезоэлементами используется вариационное уравнение движения деформируемого тела, в элементах которого проявляется пьезоэффект [29, 30]:

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{V_1^k}(\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}+\rho_k\ddot{u}_i\delta u_i)\,dV\Big)+\int\limits_{V_2}(\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}-D_i\,\delta E_i+\rho\ddot{u}_i\,\delta u_i)\,dV=$$

$$=\int\limits_{S_\sigma}F_i\,\delta u_i\,dS+\int\limits_{S_p}q_e\,\delta\varphi\,dS. \qquad (1)$$

Здесь $V_1 = \sum_k^N V_1^k$ — объем части кусочно-однородного тела объемом $V = V_1 + V_2$, состоящей из однородных упругих или вязкоупругих элементов; V_2 — объем элемента, обладающего пьезоэлектрическими свойствами; D_i, E_i — компоненты вектора электрической индукции и напряженности электрического поля; σ_{ij} — компоненты симметричного тензора напряжений Коши; ε_{ij} — компоненты тензора линейных деформаций; u_i — компоненты вектора перемещений; ρ_k — удельная плотность материала k-й составляющей кусочно-однородного тела V_1^k; ρ — удельная плотность пьезоэлектрического материала; S_σ — часть поверхности тела объемом V, на которой заданы поверхностные усилия F_i; S_p — поверхность пьезоэлектрического тела объемом V_2; q_e — поверхностная плотность свободных зарядов; φ — электрический потенциал.

Для электрического поля выполняется условие потенциальности

$$\varphi_{,i} = -E_i. \tag{2}$$

Для рассматриваемого тела принимаются следующие соотношения:

— для упругих элементов, принадлежащих объему V_1,

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2G_k\Big(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\,\vartheta\delta_{ij}\Big), \qquad \sigma = B_k\vartheta; \tag{3}$$

— для вязкоупругих элементов, принадлежащих объему V_1 [31, 32],

$$s_{ij} = 2G_k^0\Big(e_{ij} - \int\limits_0^t R_k(t-\tau)e_{ij}(\tau)\,d\tau\Big), \qquad \sigma = B_k^0\Big(\vartheta - \int\limits_0^t U_k(t-\tau)\vartheta(\tau)\,d\tau\Big); \tag{4}$$

— для пьезоэлектрического элемента объемом V_2

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ijk}E_k, \qquad D_k = \beta_{ijk}\varepsilon_{ij} + \alpha_{ki}E_i.$$

Здесь G_k, B_k — упругие сдвиговые и объемные модули; G_k^0, B_k^0 — мгновенные сдвиговые и объемные модули; R_k, U_k — ядра релаксации; σ — среднее напряжение; ϑ — объемная деформация; s_{ij}, e_{ij} — компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих констант пьезоэлемента; β_{ijk}, α_{ki} — компоненты тензоров пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов.

В рассматриваемой задаче отдельные элементы, принадлежащие объему V_1, могут быть выполнены из графеновых композитов, которые наряду с механическими свойствами, описываемыми соотношениями (3) или (4), обладают электрической проводимостью и, следовательно, могут дополнительно выполнять роль пассивного резистивного элемента электрической цепи. В этом случае при наличии электродированных поверхностей $S_э^1$, $S_э^2$ у элемента из графенового композита V_1^k (рис. 1,*а*) последний помимо деформационных свойств будет обладать электрическим сопротивлением R, а при соединении проводником электродированных поверхностей пьезоэлемента $S_э^1$, $S_э^2$ с электродированными поверхностями элемента из графенового композита $S_э^3$, $S_э^4$ систему следует рассматривать как электродеформируемое тело из упругих и вязкоупругих элементов с резистором (рис. 1,*б*).

При наличии элемента, обладающего резистивными свойствами, в уравнение (1) должно быть добавлено слагаемое δA_R, учитывающее работу электрического поля с разностью потенциалов $\Delta\varphi$ по перемещению заряда q на участке проводящей среды с сопротивлением R:

$$\Delta\varphi_R = \varphi_1^R - \varphi_2^R, \qquad \delta A_R = \frac{1}{R}\int(\varphi_1^R - \varphi_2^R)\,\delta\varphi\,dt \tag{5}$$

(φ_1^R, φ_2^R — электрические потенциалы на электродированных поверхностях пьезоэлемента).

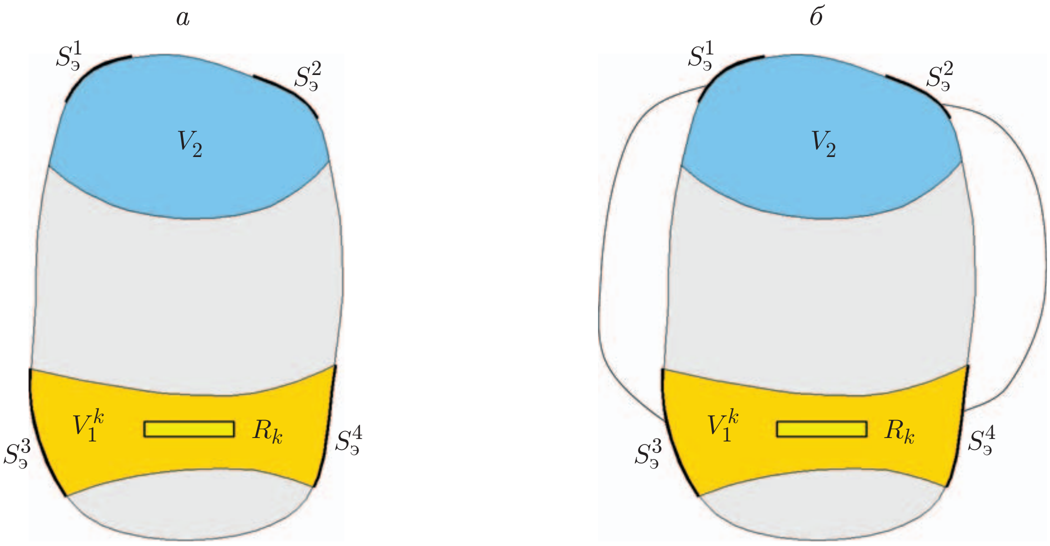

Рис. 1. Кусочно-однородное тело с обладающими пьезоэлектрическими свойствами элементами V_2, элементами из графенового композита V_1^k и электродированными поверхностями $S^1_э$, $S^2_э$, $S^3_э$, $S^4_э$:
а — в отсутствие проводников, *б* — при наличии проводников, соединяющих электродированные поверхности пьезоэлемента

С учетом выражения (5) вариационное уравнение движения электровязкоупругого тела с резистором принимает вид [33]

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{V_1^k}(\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}+\rho_k\ddot{u}_i\,\delta u_i)\,dV\Big)+\int\limits_{V_2}(\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}-D_i\,\delta E_i+\rho\ddot{u}_i\,\delta u_i)\,dV\,-$$

$$-\int\limits_{S_\sigma}p_i\,\delta u_i\,dS-\int\limits_{S_p}q_e\,\delta\varphi\,dS+\sum_{q=1}^{n_R}\frac{1}{R_q}\int(\varphi_1^{R_q}-\varphi_2^{R_q})\,\delta\varphi\,dt=0.$$

Здесь n_R — количество реализованных в системе резисторов.

Оценка диссипативных свойств в рассматриваемых системах проводится с использованием амплитудных значений перемещений для резонансных режимов при вынужденных установившихся колебаниях или скорости затухания соответствующей моды при собственных колебаниях.

Решение задачи о вынужденных установившихся колебаниях представляется в виде [32]

$$u_i(\boldsymbol{x},t)=\bar{U}_i(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{ipt},\qquad \varphi_i(\boldsymbol{x},t)=\bar{\varphi}_i(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{ipt},$$

где p — частота внешнего периодического воздействия.

Для оценки скорости затухания мод колебаний используется решение задачи о собственных колебаниях. При однородных граничных условиях решение этой задачи представляется в виде [32, 33]

$$u_i(\boldsymbol{x},t)=\bar{u}_i(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{i\omega t},\qquad \varphi_i(\boldsymbol{x},t)=\bar{\varphi}_i(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{6}$$

Здесь $\omega=\omega_R+i\omega_I$ — комплексная собственная частота колебаний; ω_R — собственная частота; ω_I — частота, характеризующая скорость затухания колебаний; $\bar{u}_i(\boldsymbol{x})$, $\bar{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ — собственные формы колебаний.

В задачах о собственных и вынужденных колебаниях в вязкоупругих элементах уравнения (4) заменяются их комплексными аналогами [31, 32]

$$s_{ij} = 2(G_k^R + iG_k^I)e_{ij}, \qquad \sigma = (B_k^R + iB_k^I)\vartheta, \tag{7}$$

где G_k^R, G_k^I, B_k^R, B_k^I — действительные и мнимые составляющие сдвигового и объемного комплексных динамических модулей.

С учетом решения (6) вариационное уравнение для задачи о собственных колебаниях электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями принимает вид

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{V_1^k}(\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} + \rho_k\omega^2 u_i\,\delta u_i)\,dV\Big) + \int\limits_{V_2}(\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} - D_i\,\delta E_i + \rho\omega^2 u_i\,\delta u_i)\,dV +$$

$$+\sum_{q=1}^{n_R}\frac{1}{i\omega R_q}\int(\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q})\,\delta\varphi\,dt = 0. \tag{8}$$

Для построения численных алгоритмов применяется метод конечных элементов. При использовании метода конечных элементов для численного решения задачи электровязкоупругости резисторы рассматриваются как двухузловые конечные элементы.

С использованием метода конечных элементов запишем уравнение (8) в матричном виде

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{V_1^k}\big(\delta\{\varepsilon_1\}^{\mathrm{т}}[Q_1^k]\{\varepsilon_1\} - \omega^2\,\delta\{u\}^{\mathrm{т}}[\rho_k]\{u\}\big)\,dV +$$

$$+\int\limits_{V_2}\big(\delta\{\varepsilon_2\}^{\mathrm{т}}[Q_2]\{\varepsilon_2\} - \omega^2\,\delta\{\tilde u\}^{\mathrm{т}}[\rho]\{\tilde u\}\big)\,dV + \sum_{q=1}^{n_R}\delta\{\varphi^q\}^{\mathrm{т}}[k^q]\{\varphi^q\} = 0. \tag{9}$$

Здесь

$$\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}^{\mathrm{т}}, \quad \{\varepsilon_1\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^{\mathrm{т}}, \quad [\rho_k] = \mathrm{diag}\,\{\rho_k, \rho_k, \rho_k\}.$$

Матрица $[Q_1^k]$ в (9) определяет вид соотношений для упругих и вязкоупругих элементов тела:

$$\{\sigma_1\} = [Q_1^k]\{\varepsilon_1\} = (2G_k[A_1] + B_k[A_2])\{\varepsilon_1\},$$

где

$$[A_1] = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \qquad [A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{\sigma_1\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^{\mathrm{т}},$$

при этом для вязкоупругих элементов тела сдвиговый G_k и объемный B_k модули заменяются на соответствующие комплексные модули.

Матрица $[Q_2]$ в (9) определяет вид соотношений для пьезоэлектрических элементов:

$$\{\sigma_2\} = [Q_2]\{\varepsilon_2\} = \begin{bmatrix} [C_p] & [\beta] \\ [\beta]^{\mathrm{т}} & [\alpha] \end{bmatrix}\{\varepsilon_2\}.$$

Здесь

$$[C_p] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}, \qquad [\beta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_{31} \\ 0 & 0 & \beta_{31} \\ 0 & 0 & \beta_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{15} & 0 \\ \beta_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

С учетом соотношений (5) для двухузлового элемента электрической цепи вектор $\{\varphi^g\}$ и матрица $[k_э^g]$ имеют вид

$$\{\varphi^q\} = \{\varphi_i^q, \varphi_j^q\}^{\text{т}}, \qquad [k_R^q] = \frac{i}{\omega R_q} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

В результате вычислений, используемых в методе конечных элементов, рассматриваемая задача о собственных колебаниях сводится к следующей системе алгебраических уравнений:

$$([K] - \omega^2[M] + [C(\omega)])\{\delta\} = 0. \tag{11}$$

Здесь $[K]$, $[M]$ — матрицы жесткости и масс, полученные для объемов V_1 и V_2 с использованием известных процедур метода конечных элементов. С учетом соотношений (10) матрица $[C(\omega)]$ имеет вид

$$[C(\omega)] = \sum_{q=1}^{n_R} [k^q].$$

При решении алгебраической задачи определения комплексных собственных значений (11) имеет смысл находить только заданное количество собственных частот колебаний в порядке возрастания их действительных частей. При решении этой задачи эффективным является использование алгоритма на основе метода Мюллера и принципа аргумента [32, 33].

С помощью метода конечных элементов задача о вынужденных установившихся колебаниях сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$([K] - p^2[M] + [C(p)])\{\delta\} = \{f\},$$

где вектор $\{f\}$ определяет внешние силовые и электрические воздействия.

2. Мультимодальное демпфирование колебаний деформируемой системы, содержащей пьезоэлектрический элемент и элемент из графенового композита. Рассматривается консольно защемленная пластина размером $500 \times 100 \times 1$ мм, к верхней грани которой прикреплена пластина размером $60{,}0 \times 90{,}0 \times 1{,}3$ мм из пьезоэлектрического материала, а к нижней грани — пластина размером $100 \times 100 \times 2$ мм из графенового композита (рис. 2). Ставится задача поиска варианта этой системы с максимальным демпфированием первых трех мод изгибных колебаний. Основная пластина выполнена из алюминия ($E = 6{,}85 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0{,}3$, $\rho = 2750$ кг/м^3). Пьезоэлемент размером $60{,}0 \times 90{,}0 \times 1{,}3$ мм выполнен из материала ПКР7, поляризованного в направлении оси z и обладающего следующими физико-механическими характеристиками: $C_{11} = C_{22} = 12{,}5 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{12} = 8{,}40 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{13} = C_{23} = 8{,}10 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{33} = 12{,}1 \cdot 10^{10}$ Па,

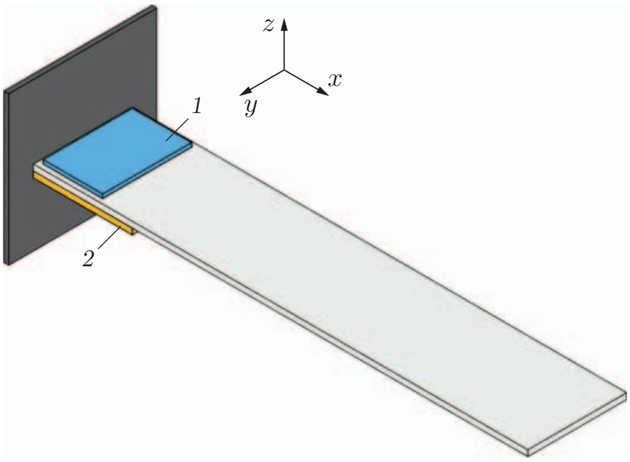

Рис. 2. Пластина с пьезоэлементом (*1*) и элементом из графенового композита (*2*)

$C_{44} = 2{,}05 \cdot 10^{10}$ Па, $C_{55} = C_{66} = 2{,}36 \cdot 10^{10}$ Па, $\beta_{31} = \beta_{32} = -9{,}0$ Кл/м^2, $\beta_{33} = 28{,}3$ Кл/м^2, $\beta_{52} = \beta_{61} = 17{,}9$ Кл/м^2, $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1{,}27 \cdot 10^{-8}$ Ф/м, $\alpha_{33} = 1{,}20 \cdot 10^{-8}$ Ф/м, $\rho = 7500$ кг/м^3.

Расчеты выполнены для графенового композита на основе полиметилметакрилата (ПММА). При моделировании с использованием соотношений (3) линейной теории упругости были заданы следующие характеристики материала: модуль сдвига $G = 2{,}29 \cdot 10^8$ Па, объемный модуль упругости $B = 5{,}96 \cdot 10^8$ Па, удельная плотность $\rho = 1190$ кг/м^3. При моделировании элемента с помощью соотношений (7) теории линейной наследственной вязкоупругости комплексный модуль сдвига $G = G^R + iG^I$ и объемный модуль упругости задавались следующим образом: $G^R = 2{,}29 \cdot 10^8$ Па, $G^I = 5{,}73 \cdot 10^7$ Па, $B = 5{,}96 \cdot 10^8$ Па.

Для мультимодального демпфирования колебаний используется вариант на основе одного пьезоэлектрического элемента и сложной внешней электрической цепи. В данном случае электрическая цепь представляет собой три не связанных между собой резистивных элемента, каждый из которых подключается к пьезоэлементу при определенной частоте колебаний. Для построения на основе графенового элемента электрической цепи, состоящей из трех отдельных резисторов, нужно определить положение электродированных поверхностей, которые при замыкании в соответствующем порядке обеспечат необходимые значения сопротивления.

Вариант максимального демпфирования заданных мод колебаний выбирается на основе решения оптимизационной задачи, в которой определяются значения сопротивления, обеспечивающие максимальную скорость затухания соответствующих мод при собственных колебаниях [33]. На рис. 3 приведена зависимость мнимой части первых трех комплексных собственных частот колебаний, характеризующих скорость затухания колебаний, от сопротивления.

Данная зависимость позволяет определить значения сопротивления $R_1^{opt} = 210$ кОм, $R_2^{opt} = 35$ кОм, $R_3^{opt} = 14$ кОм, обеспечивающие максимальное демпфирование первой, второй и третьей мод изгибных колебаний соответственно. Результаты получены при решении задачи для графенового элемента в рамках упругой модели. Учет вязкоупругих свойств графенового композита приводит к изменению значений мнимых частей комплексных собственных частот колебаний, но практически не влияет на значение сопротивления, обеспечивающее максимальную скорость затухания колебаний.

Для получения значений сопротивления R_1^{opt}, R_2^{opt} и R_3^{opt} необходимо определить конфигурацию электродированных поверхностей элемента из графенового композита. С этой

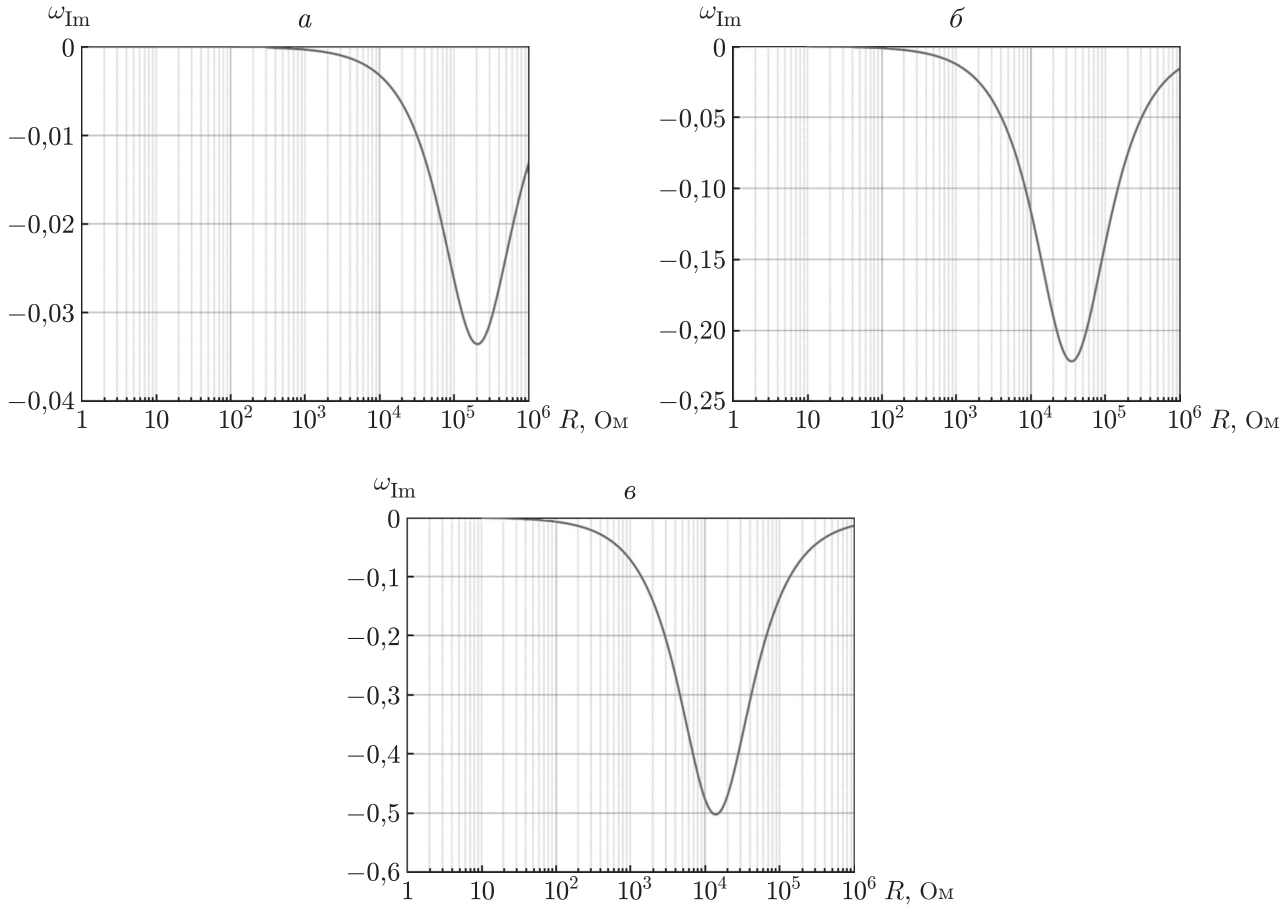

Рис. 3. Зависимость мнимой части комплексных собственных частот колебаний для первых трех изгибных мод колебаний пластины от сопротивления:
а — первая мода, *б* — вторая мода, *в* — третья мода

целью решается задача электростатики для пластины, выполненной из графенового композита, проводящие свойства которого в данной работе полагаются однородными, изотропными и не зависящими от деформации. Значение удельной проводимости принято равным $\gamma = 1{,}173 \cdot 10^4$ См/м, что соответствует диапазону значений этой величины для ПММА, приведенных в [27].

Рассмотрим случай, когда нижняя поверхность графенового элемента полностью покрыта токопроводящим слоем материала с пренебрежимо малыми толщиной и массой (нижняя электродированная поверхность). Требуется определить размер и положение электродированных участков на верхней поверхности элемента, при которых обеспечиваются необходимые значения электрического сопротивления. При этом сопротивление R_1^{opt} должно возникать при замыкании нижней электродированной поверхности (электрод 1 на рис. 4) и электродированного участка (электрод 2), сопротивление R_2^{opt} должно обеспечиваться при замыкании электродов 1 и 3, а сопротивление R_3^{opt} — при замыкании электродов 1 и 4.

Для решения поставленной задачи необходимо определить напряженность электрического поля в среде, заключенной между двумя проводящими участками рассматриваемого элемента из графенового композита (между электродами 1 и 2, между электродами 1 и 3, между электродами 1 и 4), на каждом из которых задается постоянное во времени значение электрического потенциала. Величина напряженности электрического поля находится

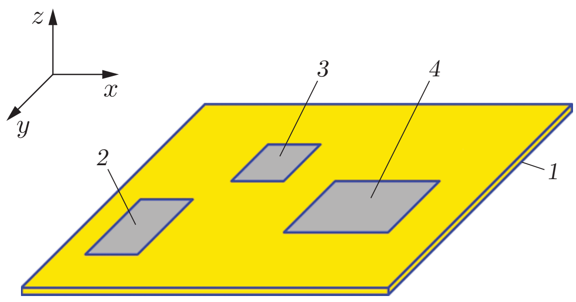

Рис. 4. Расположение проводящих участков на верхней поверхности графенового элемента:
1 — электрод 1, *2* — электрод 2, *3* — электрод 3, *4* — электрод 4

из решения уравнения (2) с граничными условиями вида

$$\varphi\big|_{z=0} = \varphi_1, \qquad \varphi\big|_{z=h_{gr}} = \varphi_2, \tag{12}$$

где $z = 0$ — поверхность, на которой расположен электрод 1; h_{gr} — толщина пластины из графенового композита; $z = h_{gr}$ — поверхности, на которых расположены электроды 2, 3, 4. Уравнение (2) с заданными граничными условиями (12) решается численно с использованием метода конечных элементов, реализованного в пакете программ ANSYS.

На основе закона Ома в дифференциальной форме и решения уравнения (2) находятся значения компонент вектора плотности тока в каждой точке рассматриваемой среды:

$$j_i = \gamma_{ij} E_j$$

(j_i — компоненты вектора плотности тока; γ_{ij} — компоненты тензора удельной проводимости среды; E_j — компоненты вектора напряженности электрического поля в рассматриваемой точке среды). Зная значение вектора плотности тока в каждой точке, можно найти значение силы тока, протекающего через любую замкнутую поверхность S_0 проводящей среды, по направлению вектора нормали $\boldsymbol{n}$ к ней:

$$I = \int (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n})\, dS.$$

Далее, учитывая, что разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$ между проводящими участками рассматриваемого элемента известна, и используя интегральную формулировку закона Ома для однородного проводника, можно определить значение сопротивления рассматриваемого проводящего элемента при протекании тока между соответствующими электродированными участками:

$$R = U/I.$$

В результате вычислительных экспериментов выбраны один из вариантов расположения и размеры электродированных поверхностей, при которых обеспечиваются требуемые значения сопротивления R_1^{opt}, R_2^{opt}, R_3^{opt}. Размеры и положение электродированных поверхностей приведены на рис. 5. Расстояние между электродами вдоль оси x равно 10 мм.

При анализе эффективности использования в смарт-системах резистивной функции графеновых композитов исследовались три варианта рассматриваемой задачи:

1) учитываются только вязкоупругие свойства элемента из графенового композита;

2) элемент из графенового композита является упругим и выполняет функцию резистора;

3) элемент из графенового композита является вязкоупругим и выполняет функцию резистора.

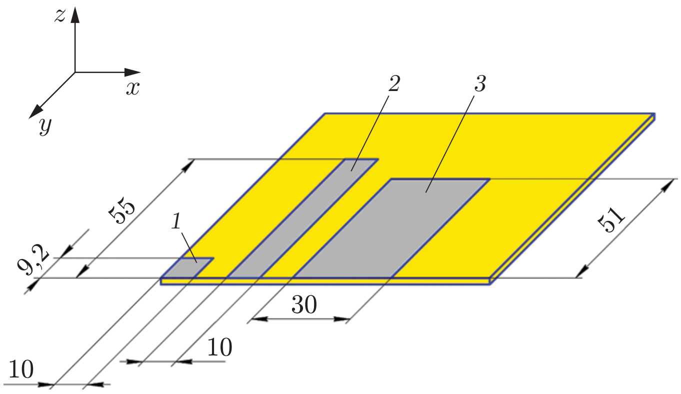

Рис. 5. Схема расположения электродированных поверхностей, при котором обеспечиваются оптимальные значения сопротивления:
1 — электрод 2, *2* — электрод 3, *3* — электрод 4

Значения комплексных собственных частот колебаний для трех вариантов рассматриваемой задачи

Мода колебаний	$\omega = \omega_R + i\omega_I$		
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Первая	$7{,}82 - i\,0{,}044$	$7{,}78 - i\,0{,}034$	$7{,}78 - i\,0{,}078$
Вторая	$46{,}34 - i\,0{,}166$	$46{,}11 - i\,0{,}222$	$46{,}12 - i\,0{,}387$
Третья	$120{,}23 - i\,0{,}332$	$119{,}72 - i\,0{,}502$	$119{,}73 - i\,0{,}833$

В таблице для указанных вариантов приведены комплексные собственные частоты колебаний первых трех мод колебаний. При этом электрический потенциал подается с пьезоэлектрического элемента на электроды графенового элемента: для первой моды колебаний — на электроды 1 и 2, для второй моды — на электроды 1 и 3, для третьей моды — на электроды 1 и 4.

Приведенные результаты позволяют сделать вывод, что при совместном использовании двух элементов демпфирования (элемента из вязкоупругого материала и резистора) скорость затухания колебаний является суммой скоростей затухания колебаний каждого элемента.

Наряду с задачей о собственных колебаниях рассмотрена задача о вынужденных установившихся колебаниях. В качестве внешних воздействий рассмотрен вариант задания перемещений при $x = 0$:

$$u_x = u_y = 0, \qquad u_z = u_0 \sin{(pt)}.$$

На рис. 6 приведены амплитудно-частотные характеристики перемещения свободного торца пластины в окрестности первого, второго и третьего резонансов для вариантов 1–3. В диапазоне значений частоты внешнего воздействия $p = 0 \div 20$ Гц электрический потенциал подавался с пьезоэлектрического элемента на электроды 1 и 2 графенового элемента, в диапазоне $p = 20 \div 60$ Гц — на электроды 1 и 3, в диапазоне $p > 60$ Гц — на электроды 1 и 4.

Анализ полученных результатов показывает, что использование свойств электрической проводимости графеновых композитов, применяемых в качестве пьезоэлементов в смарт-материалах, является дополнительным способом демпфирования колебаний.

Заключение. В работе предложен вариант смарт-структур на основе пьезоэлементов с шунтирующей цепью, в которой роль резистора выполняет деформируемый элемент из графенового композита. Приведена математическая постановка задачи о вынужденных

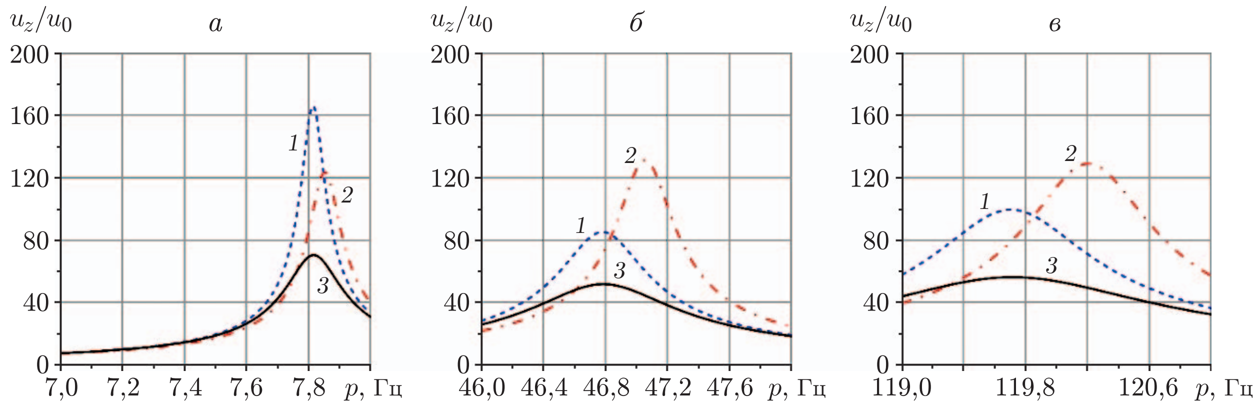

Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики перемещения u_z свободного торца пластины в окрестности первого (*а*), второго (*б*) и третьего (*в*) резонансов изгибных мод колебаний:
1 — вариант 1, *2* — вариант 2, *3* — вариант 3

установившихся колебаниях и собственных колебаниях смарт-структур, представляющих собой кусочно-однородное тело, состоящее из упругих и вязкоупругих элементов, пьезоэлементов и элементов из графеновых композитов, которые не только являются механически деформируемым телом, но и выполняют роль резистора. Проведен численный анализ демпфирующих свойств элементов из графенового композита в рассмотренных смарт-структурах. Представлен вариант мультимодального демпфирования колебаний при использовании одного пьезоэлектрического элемента и одного элемента из графенового композиционного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Reza Moheimani S. O.** Piezoelectric transducers for vibration control and damping / S. O. Reza Moheimani, A. J. Fleming. L.: Springer, 2006.
2. **Hagood N. W., Von Flotow A.** Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // J. Sound Vibrat. 1991. V. 146. P. 243–268.
3. **Viana F. A. C., Valder S. (Jr.)** Multimodal vibration damping through piezoelectric patches and optimal resonant shunt circuits // J. Brazill. Soc. Mech. Sci. Engng. 2006. V. 28, N 3. P. 293–310.
4. **Cheng T. H., Oh I. K.** A current-flowing electromagnetic shunt damper for multi-mode vibration control of cantilever beams // Smart Materials Structures. 2009. V. 18, N 6. 095036.
5. **Behrens S., Moheimani S. O. R.** Optimal resistive elements for multiple mode shunt damping of a piezoelectric laminate beam // Proc. of the 39th IEEE conf. on decision and control. S. l., 2000. V. 4. P. 4018–4023. [Electron. resource]. DOI: 10.1109/CDC.2000.912343.
6. **Fleming A. J., Moheimani S. O. R.** Adaptive piezoelectric shunt damping // Smart Materials Structures. 2003. V. 12, N 1. P. 36–48.
7. **Behrens S., Moheimani S. O. R.** Current flowing multiple mode piezoelectric shunt dampener // SPIE Proc. Ser. 2002. V. 4697. [Electron. resource]. DOI: 10.1117/12.472658.
8. **Behrens S., Moheimani S. O. R., Fleming A. J.** Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller // J. Sound Vibrat. 2003. V. 266, N 5. P. 929–942.
9. **Hollkamp J. J.** Multimodal passive vibration suppression with piezoelectric materials and resonant shunts // J. Intelligent Material Systems Structures. 1994. V. 5, iss. 1. P. 49–57.

10. **Wu S. Y.** Method for multiple mode shunt damping of structural vibration using a single PZT transducer // SPIE Proc. Ser. 1998. V. 3327. P. 159–168.
11. **Wu S. Y.** Multiple PZT transducers implemented with multiple-mode piezoelectric shunting for passive vibration damping // SPIE Proc. Ser. 1999. V. 3672. P. 112–122.
12. **Wu S. Y., Bicos A. S.** Structural vibration damping experiments using improved piezoelectric shunts // SPIE Proc. Ser. 1997. V. 3045. P. 40–50.
13. **Yan L., Lallart M., Guyomar D.** Multimodal nonlinear damping technique using spatial filtering // J. Intelligent Material Systems Structures. 2014. V. 25, N 3. P. 308–320.
14. **Vidoli S., dell'Isola F.** Vibration control in plates by uniformly distributed PZT actuators interconnected via electric networks // Europ. J. Mech. A. Solids. 2001. V. 20. P. 435–456.
15. **Porfri M., dell'Isola F., Frattale M. F. M.** Circuit analog of a beam and its application to multimodal vibration damping, using piezoelectric transducers // Intern. J. Circuit Theory Appl. 2004. V. 32. P. 167–198.
16. **dell'Isola F., Henneke E. G., Porfiri M.** Piezoelectromechanical structures: new trends towards the multimodal passive vibration control // SPIE Proc. Ser. 2003. V. 5052. P. 392–402.
17. **Maurini C., dell'Isola F., Del Vescovo D.** Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers // Mech. Systems Signal Process. 2004. V. 18, N 5. P. 1243–1271.
18. **Giorgio I., Culla A., Del Vescovo D.** Multimode vibration control using several piezoelectric transducers shunted with a multiterminal network // Arch. Appl. Mech. 2009. V. 79, N 9. P. 859–879.
19. **Casadei F., Ruzzene M., Dozio L., Cunefare K. A.** Broadband vibration control through periodic arrays of resonant shunts: experimental investigation on plates // Smart Materials Structures. 2010. V. 19, N 1. 015002.
20. **Guo K. M., Jiang J.** Independent modal resonant shunt for multimode vibration control of a truss-cored sandwich panel // Intern. J. Dynamics Control. 2014. V. 2. P. 326–334.
21. **Trindade M. A., Maio C. E. B.** Multimodal passive vibration control of sandwich beams with shunted shear piezoelectric materials // Smart Materials Structures. 2008. V. 17. 055015.
22. **Spadoni A., Ruzzene M., Cunefare K.** Vibration and wave propagation control of plates with periodic arrays of shunted piezoelectric patches // J. Intelligent Material Systems Structures. 2009. V. 20, N 5. P. 979–990.
23. **Пан М., Фан Ю., Чзан Ю. Ц.** Исследование свободных и вынужденных колебаний конструкции, состоящей из двух ортотропных графеновых пластин, связанных вязкоупругим слоем, с учетом поверхностных напряжений высшего порядка // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 1. С. 147–158.
24. **Wang D., Chung D. D. L.** Through-thickness piezoresistivity in a carbon fiber polymer-matrix structural composite for electricalresistance-based through-thickness strain sensing // Carbon. 2013. V. 60. P. 129–138.
25. **Xi X., Chung D. D. L.** Piezoelectric and piezoresistive behavior of unmodified carbon fiber // Carbon. 2019. V. 145. P. 452–461.
26. **Tallman T. N., Hassan H.** A computational exploration of the effect of alignment and aspect ratio on alternating current conductivity in carbon nanofiber-modified epoxy // J. Intelligent Material Systems Structures. 2020. V. 31, N 5. P. 756–770.
27. **Alemour B., Yaacob M. H., Lim H. N., et al.** Review of electrical properties of graphene conductive composites // Intern. J. Nanoelectron. Materials. 2018. V. 11, N 4. P. 371–398.
28. **Матвеенко В. П., Ошмарин Д. А., Юрлова Н. А.** Использование графеновых композитов для дополнительного демпфирования колебаний smart-структур на основе пьезоэлементов // Докл. РАН. Физика, техн. науки. 2020. Т. 491, № 1. С. 18–23.

29. **Washizu K.** Variational methods in elasticity and plasticity. L.: Pergamon Press, 1982.
30. **Jaffe B.** Piezoelectric ceramics / B. Jaffe, W. R. Cook (Jr.), H. Jaffe. L.; N. Y.: Acad. Press., 1971.
31. **Rubinshtein M.** Polymer physics / M. Rubinshtein, R. Colby. Oxford: Oxford Univ. Press, 2003.
32. **Kligman E. P., Matveenko V. P.** Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions // J. Vibrat. Control. 1997. V. 3, N 1. P. 87–102.
33. **Матвеенко В. П., Ошмарин Д. А., Севодина Н. А., Юрлова Н. А.** Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации // Вычисл. механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 4. С. 476–485.

Поступила в редакцию 2/VI 2021 г.,
после доработки — 2/VI 2021 г.
Принята к публикации 26/VII 2021 г.