

УДК 539.387

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИГМОИДАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

А. Каси<sup>\*,\*\*</sup>, К. Бахти<sup>\*</sup>, Х. Хебали<sup>\*,\*\*</sup>, А. Тунси<sup>\*</sup>

\* Университет г. Сиди-Бель-Аббес, Сиди-Бель-Аббес, Алжир

\*\* Университет им. Мустафы Стамбули, Маскара, Алжир

E-mail: tou\_abdel@yahoo.com

Рассмотрены задачи нелинейного цилиндрического изгиба пластин, выполненных из функционально-градиентного материала. Для описания непрерывного изменения свойств материала по толщине используются сигмоидальная функция и два степенных закона распределения объемной доли компонентов функционально-градиентного материала. С помощью нелинейных зависимостей Кармана деформаций от перемещений исследовано влияние геометрической нелинейности на решение задачи. Определяющие уравнения сводятся к линейному дифференциальному уравнению с нелинейными краевыми условиями, что позволяет упростить решение задачи. Приведены результаты численного решения, по которым можно судить о влиянии распределения свойств материалов на напряжения и перемещения.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы, сигмоидальная функция, нелинейное поведение, пластина.

**Введение.** Как правило, в условиях экстремального нагружения в многослойных композиционных материалах высока вероятность разрыва связей. Этого можно избежать, постепенно изменяя объемные доли компонентов композиционного материала. Функционально-градиентными материалами (ФГМ) называются композиты, функциональные свойства которых (состав, структура и т. д.) непрерывно изменяются по пространственным переменным внутри материала. В связи с этим следует отметить работы [1–4], в которых функционально-градиентные материалы исследуются с использованием одной степенной зависимости для описания распределений объемных долей их компонентов. Применение одной степенной функции для многослойного композита приводит к тому, что на внутренних поверхностях, на которых свойства материала изменяются непрерывно, но достаточно быстро, появляется концентрация напряжений [5, 6]. В работах [7, 8] распределение объемных долей составляющих описывается с помощью двух степенных функций, обеспечивающих гладкое распределение напряжения на внутренних контактных поверхностях.

Широкое применение функционально-градиентных материалов обуславливает необходимость изучения нелинейного поведения пластины из такого материала под действием нагрузки. Существует большое количество работ, посвященных исследованию нелинейных задач для изотропных и многослойных пластин, однако число работ, в которых изу-

чается поведение пластин из ФГМ под действием нагрузок, ограничено. В [9] с помощью рядов Фурье получено аналитическое решение задачи о деформировании функционально-градиентных пластин и пологих оболочек при больших деформациях под действием поперечной механической нагрузки и температурного поля. В [10] с использованием нового балочного элемента, созданного на основе теории деформации сдвига первого порядка, исследовано термоупругое поведение стержневых систем. В работе [11] новый балочный элемент использован при изучении влияния геометрической нелинейности на статику и динамику изотропных, композиционных и функционально-градиентных стержневых конструкций. В [12] с помощью полуаналитического метода расчета проведено исследование критических и закритических деформаций прямоугольных пластин из ФГМ при поперечном и продольном нагружении. При этом предполагалось, что свойства материала зависят от температуры и изменяются по толщине в соответствии со степенным законом распределения, используемым для описания распределений объемных долей составляющих материала. Условия закрепления рассматриваемой пластины были следующие: два края жестко закреплены, остальные два могли быть свободно опертыми, защемленными либо упруго закрепленными относительно поворотов. В работе [13] на основе классической теории пластин проведен анализ нелинейного цилиндрического изгиба пластин из ФГМ.

Из сказанного выше следует, что для описания распределений объемных долей составляющих материала в основном используется степенная зависимость, в то время как нелинейные задачи о функционально-градиентных пластинах рассмотрены с использованием сигмоидальной функции лишь в нескольких работах.

В данной работе с помощью сигмоидальной функции исследуется задача нелинейного цилиндрического изгиба пластин из функционально-градиентного материала. Предполагается, что характеристики таких материалов, за исключением коэффициента Пуассона, изменяются по толщине пластины в соответствии с двумя степенными функциями распределения. Для построения определяющих уравнений задачи применяются классическая теория пластин и нелинейные уравнения Кармана для деформаций.

**1. Теоретические основы используемого метода.** Ниже приводится математическая постановка рассматриваемой задачи.

1.1. *Свойства составляющих сигмоидально-функционально-градиентного материала.* Функционально-градиентные материалы могут быть получены путем непрерывного изменения характеристик компонентов многослойных материалов по заданному закону. Особенностью таких материалов является наличие неоднородных микроструктур с непрерывно изменяющимися макросвойствами. Тип ФГМ зависит от распределения объемных долей его компонентов. При этом для закона распределения, как правило, используется степенная или экспоненциальная зависимость. Лишь в отдельных работах для закона распределения используется сигмоидальная функция. В данной работе пластины из ФГМ детально исследуются с помощью сигмоидальной функции.

Рассмотрим упругую прямоугольную пластину постоянной толщины  $h$ , изготовленную из ФГМ. Составляющими материала являются керамика и металл. На верхней и нижней поверхностях пластины модуль Юнга и коэффициент Пуассона не одинаковы и задаются в соответствии с условиями эксплуатации пластины. Эти параметры изменяются только по толщине пластины:  $E = E(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ . Поскольку в отличие от модуля Юнга коэффициент Пуассона оказывает менее существенное влияние на деформацию [14], его значение считается константой. Для определения значения модуля Юнга, который изменяется по сигмоидальной зависимости по толщине пластины, используются две степенные

функции [7, 8]:

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq \frac{h}{2}: & \quad V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p, \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq 0: & \quad V_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \end{aligned} \quad (1)$$

( $p$  — параметр материала).

По правилу смесей модуль Юнга для сигмоидально-функционально-градиентного материала (СФГМ) можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq h/2: & \quad E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2, \\ -h/2 \leq z \leq 0: & \quad E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \end{aligned} \quad (2)$$

( $E(z)$  — модуль Юнга;  $E_1, E_2$  — модули Юнга для нижней ( $z = +h/2$ ) и верхней ( $z = -h/2$ ) поверхностей пластины соответственно).

1.2. *Основные уравнения задачи нелинейного цилиндрического изгиба пластин из СФГМ.* Рассмотрим пластину из СФГМ толщиной  $h$  и длиной  $l = 2a$ . Верхняя поверхность пластины выполнена из керамики, нижняя — из металла. В соответствии с классической теорией пластин поле перемещений можно описать с помощью формул

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad v(x, y, z) = 0, \quad w(x, y, z) = w_0(x, y),$$

где  $u, v, w$  — перемещения в направлениях  $x, y, z$ ;  $u_0, v_0, w_0$  — перемещения в срединной плоскости в направлениях  $x, y, z$ .

Уравнения Кармана для нелинейных зависимостей деформаций от перемещений записываются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Определяющие соотношения для ненулевых деформаций задаются в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

С учетом свойств материала (см. (2)) выражения для коэффициентов жесткости  $Q_{ij}$  можно записать следующим образом:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2}, \quad Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}.$$

Применяя принцип Гамильтона, получаем уравнения Эйлера — Лагранжа [15]

$$N_{x,x} = 0; \quad (5)$$

$$Q_{x,x} + q + N_x w_{,xx} = 0, \quad M_{x,x} - Q_x = 0, \quad (6)$$

где  $q$  — поперечная нагрузка. Продольная, поперечная силы и момент определяются следующим образом:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz, \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz. \quad (7)$$

Из уравнения (5) следует, что  $N_x = N_x^0 = \text{const}$ . При этом уравнения (6) принимают вид

$$M_{x,xx} + q + N_x^0 w_{,xx} = 0. \quad (8)$$

Подставляя формулы (3) в (4), а полученный результат — в (7), выразим обобщенные усилия и момент через составляющие вектора перемещения:

$$N_x = A_{11}(u_{,x} + w_{,x}^2/2) - B_{11}w_{,xx}; \quad (9)$$

$$M_x = B_{11}(u_{,x} + w_{,x}^2/2) - D_{11}w_{,xx}. \quad (10)$$

Здесь  $A_{11}$ ,  $B_{11}$ ,  $D_{11}$  — коэффициенты жесткости на растяжение, совместный изгиб и растяжение и изгиб соответственно:

$$A_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} dz, \quad B_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} z dz, \quad D_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} z^2 dz. \quad (11)$$

Объемная доля и модуль Юнга пластин из СФГМ определяются уравнениями (1), (2). Подставляя (2) в (11), получаем

$$A_{11} = \frac{h}{1-\nu^2} \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad B_{11} = \frac{h^2(E_1 - E_2)}{8(1-\nu^2)} \frac{p^2 + 3p}{(p+1)(p+2)}, \quad D_{11} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{E_1 + E_2}{2}.$$

Из (9), (10) находим

$$M_x = \frac{B_{11}}{A_{11}} N_x^0 + \left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) w_{,xx}. \quad (12)$$

Наконец, подставляя (12) в (8), получаем

$$w_{,xxxx} - k^2 w_{,xx} = q_0, \quad (13)$$

где

$$k^2 = \frac{N_x^0}{D_{11} - B_{11}^2/A_{11}}, \quad q_0 = \frac{q}{D_{11} - B_{11}^2/A_{11}}.$$

**2. Общее решение.** Предположим, что на верхней поверхности пластины из СФГМ действует равномерно распределенная поперечная нагрузка  $q$ . Целью данной работы является получение аналитического решения задачи о нелинейном изгибе пластины, изготовленной из СФГМ.

2.1. *Нелинейный анализ.* Уравнение (13) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Запишем его решение

$$w(x) = C_1 \text{ch}(kx) + C_2 - \frac{q_0}{2k^2} x^2 \quad (14)$$

( $C_1$ ,  $C_2$  — константы, определяемые с использованием краевых условий на торцах пластины). Предположим, что начало системы координат находится в центре пластины. Тогда граничные условия для шарнирно опертого края пластины имеют вид

$$w(a) = w(-a) = 0, \quad M_x(a) = M_x(-a) = 0, \quad u(a) = u(-a) = 0.$$

Поскольку усилие  $N_x$  не зависит от  $x$ , перемещение в плоскости пластины  $u$  можно вычислить путем интегрирования уравнения (5) с использованием общего решения уравнения (14). Граничные условия можно записать в следующем виде:

$$w(a) = 0, \quad M_x(a) = \frac{B_{11}}{A_{11}} N_x^0 - \left( D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) w_{,xx} \Big|_{x=a} = 0; \quad (15)$$

$$u(a) = \int_0^a \left( \frac{N_x^0}{A_{11}} + \frac{B_{11}}{A_{11}} w_{,xx} - \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) dx = 0. \quad (16)$$

Подставляя общее решение (14) в условия (15), находим выражения для констант  $C_1, C_2$

$$C_1 = \left( \frac{B_{11}}{A_{11}} + \frac{q_0}{k^4} \right) \frac{1}{\operatorname{ch}(ka)}, \quad C_2 = \frac{q_0 a^2}{2k^2} - C_1 \operatorname{ch}(ka). \quad (17)$$

Из условия (16) получаем

$$u(a) = \frac{N_x^0}{A_{11}} a + \frac{B_{11}}{A_{11}} k C_1 \operatorname{sh}(ka) - \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{q_0}{k^2} a - \frac{1}{2} k^2 C_1^2 \left( \frac{1}{4k} \operatorname{sh}(2ka) - \frac{a}{2} \right) - \frac{q_0^2 a^3}{6k^4} + C_1 \frac{q_0}{k^3} [ka \operatorname{ch}(ka) - \operatorname{sh}(ka)] = 0. \quad (18)$$

Для решения уравнений (17), (18) относительно констант  $C_1, C_2, N_x^0$  применяются численные методы.

**2.2. Линейный анализ.** В данном случае в соответствии с теорией малых деформаций нелинейные члены Кармана (второе слагаемое в левой части уравнения (13)) не учитываются. Тогда решение можно записать в следующем виде:

$$w(x) = \frac{1}{24} q_0 (x^4 - a^4) + \frac{1}{12} \frac{2B_{11}^2 - 3D_{11}A_{11}}{D_{11}A_{11}} q_0 a^2 (x^2 - a^2),$$

$$u(x) = \frac{1}{6} q_0 x^3 \frac{B_{11}}{A_{11}} - \frac{1}{6} q_0 a^2 x \frac{B_{11}}{A_{11}}.$$

**3. Обсуждение результатов.** Исследование поведения конструкций из СФГМ при нелинейном изгибе проводилось на примере прямоугольной пластины, нижняя поверхность которой изготовлена из алюминия, а верхняя — из окиси алюминия. Модуль упругости алюминия равен 70 ГПа, для окиси алюминия это значение составляет 380 ГПа. Для обоих материалов коэффициент Пуассона принимался равным 0,3. Толщина пластины  $h = 5$  мм, длина  $a = 0,5$  м. Результаты численного анализа представлены ниже в следующих безразмерных переменных:  $\bar{x} = x/a$  — координата в плоскости пластины;  $\bar{z} = z/h$  — координата по толщине пластины;  $\bar{w} = w/h$  — смещение;  $\bar{\sigma}_x = \sigma_x / [Q_{11m}(h/a)^2]$  — осевое напряжение ( $Q_{11m}$  — коэффициент жесткости металлической пластины);  $q^n = q_0 a^4 / (E_m h^4)$  — параметр нагружения.

Как указано выше, объемная доля  $V(z)$  компонентов материала пластины из СФГМ изменяется по толщине в соответствии с двумя степенными функциями (1). На рис. 1 представлено распределение объемной доли керамики по толщине пластины при различных значениях показателя  $p$ . При  $p = 1$  объемная доля керамики и металла изменяется линейно. При  $p < 1$  резкий скачок объемной доли наблюдается вблизи верхней и нижней поверхностей пластины, при  $p > 1$  — вблизи срединной поверхности. Поэтому, если пластина из СФГМ используется в качестве подложки для многослойного композита, целесообразно выбирать распределение  $V(z)$  при  $p > 1$ .

На рис. 2 приведена зависимость смещения в центре пластины от параметра нагрузки  $q^n$ . Видно, что если максимальная деформация превышает  $0,2h$ , то необходимо использовать нелинейное решение. При достаточно большой нагрузке нелинейный анализ дает меньшие значения смещения по сравнению с линейным анализом. Такая закономерность отмечена в работах [15, 16] для несимметричных слоистых композитов.

На рис. 3 представлены распределения максимального смещения по продольной координате при  $p = 2, q = 1$  кН/м<sup>2</sup>, полученные в результате линейного и нелинейного анализа. Линейный анализ дает завышенное значение смещения.

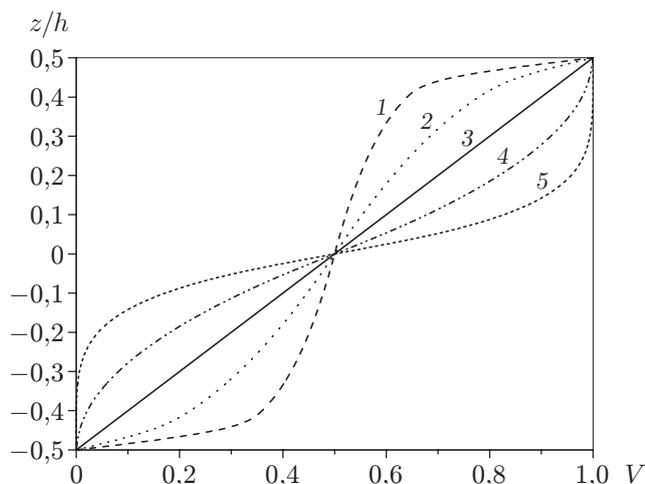


Рис. 1

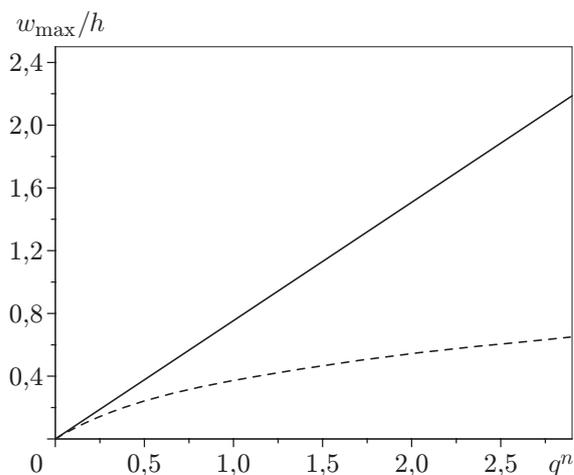


Рис. 2

Рис. 1. Распределение объемной доли керамики по толщине пластины из СФГМ при различных значениях параметра  $p$ :

1 —  $p = 0,2$ ; 2 —  $p = 0,5$ ; 3 —  $p = 1$ ; 4 —  $p = 2$ ; 5 —  $p = 5$

Рис. 2. Зависимость смещения в центре срединной плоскости пластины из СФГМ  $w_{\max}$  от параметра поперечной нагрузки  $q^n$  ( $p = 2$ ):

сплошная линия — результаты линейного анализа, штриховая — результаты нелинейного анализа

На рис. 4 показано изменение безразмерного смещения в центре пластины из СФГМ под действием равномерной поперечной нагрузки при различных значениях параметра  $p$ . Максимальное смещение имеет место для металлической пластины. Этого следовало ожидать, поскольку жесткость такой пластины меньше жесткости керамической пластины или пластины из СФГМ. Значение смещения для пластины из СФГМ находится между значениями смещений для пластин из металла и керамики. Из представленных результатов также следует, что поведение пластины из СФГМ под действием положительной и отрицательной поперечных сил различается. При отрицательной нагрузке нелинейный анализ дает большие значения смещения на начальном этапе нагружения, чем при положительной. Отметим, что при отрицательной нагрузке параметр  $p$  оказывает более существенное влияние на характер деформирования, чем при положительной нагрузке.

Распределения безразмерных осевых напряжений  $\bar{\sigma}_x$  по толщине пластины из СФГМ, находящейся под действием нагрузки  $q = 1 \text{ кН/м}^2$ , при различных значениях параметра материала  $p$ , полученные в результате линейного и нелинейного анализа, представлены на рис. 5. При сжатии напряжения на нижней поверхности пластины оказались сжимающими, на верхней — растягивающими. Максимальное растягивающее напряжение имеет место на верхней поверхности пластины в случае линейного анализа при  $p = 2$ . Данная поверхность является керамической. В случае нелинейного анализа максимальное растягивающее напряжение наблюдается на той же поверхности, но при  $p = 0,2$ . Зависимость напряжений в металлической и керамической пластинах от толщины является линейной как при линейном анализе, так и при нелинейном. При этом линейное решение дает одни и те же результаты как для керамических, так и для металлических пластин.

На рис. 6 показано, что смещение по длине пластины из СФГМ прямо пропорционально соответствующему смещению в металлической пластине. Поэтому, зная свойства составляющих материала, можно оценить деформации в пластинах из ФГМ.

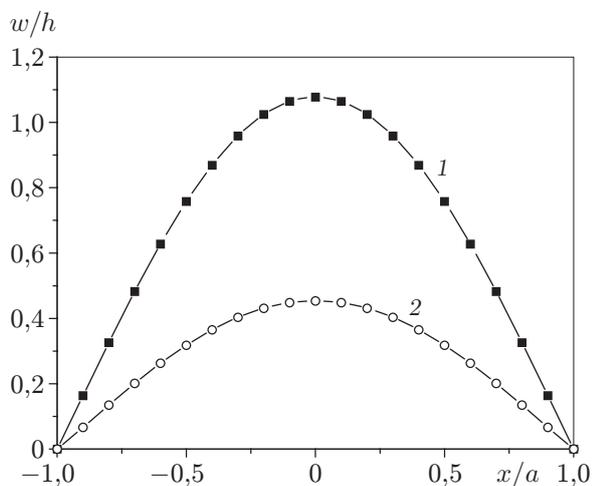


Рис. 3

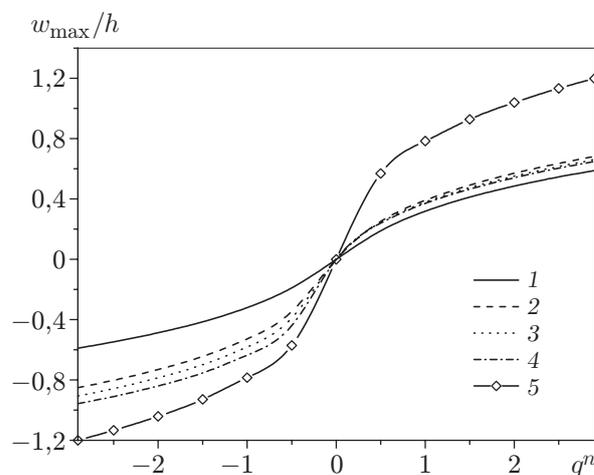


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость смещения от продольной координаты при поперечной нагрузке  $q = 1 \text{ кН/м}^2$  ( $p = 2$ ):

1 — результаты линейного анализа, 2 — результаты нелинейного анализа

Рис. 4. Зависимость смещения в центре срединной плоскости пластины из СФГМ  $w_{\max}$  от параметра поперечной нагрузки  $q^n$  при различных значениях параметра  $p$ :

1 — керамическая пластина; 2–4 — композитная пластина (2 —  $p = 0,5$ , 3 —  $p = 1$ , 4 —  $p = 2$ ); 5 — металлическая пластина

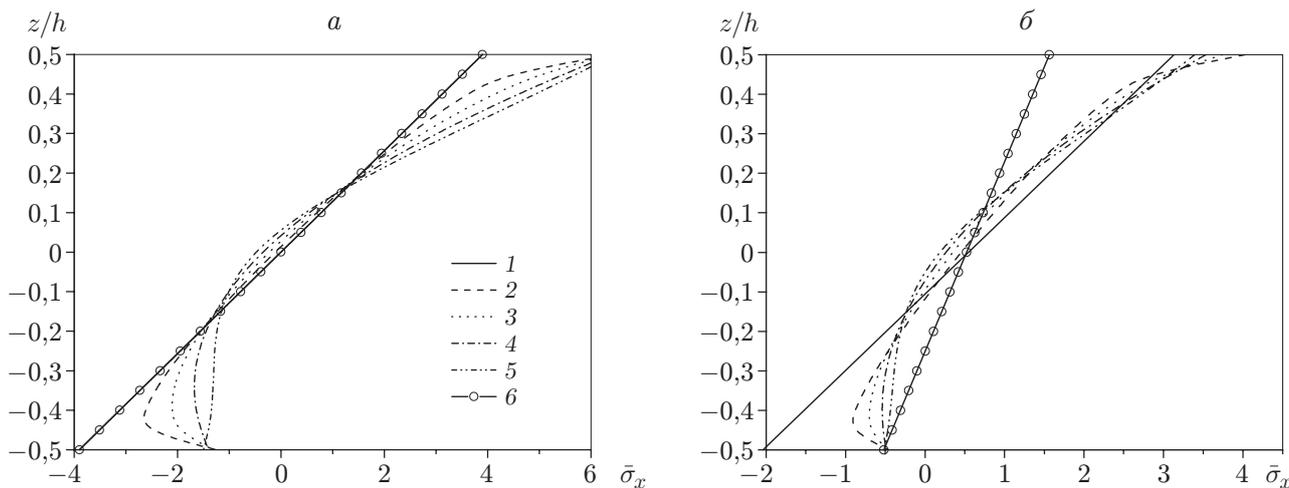


Рис. 5. Распределение осевого напряжения  $\bar{\sigma}_x$  в пластине из СФГМ по толщине при  $q = 1 \text{ кН/м}^2$  и различных значениях параметра  $p$  материала:

а — результаты линейного анализа, б — результаты нелинейного анализа; 1 — керамическая пластина, 2–5 — композитная пластина (2 —  $p = 0,2$ , 3 —  $p = 0,5$ , 4 —  $p = 1$ , 5 —  $p = 2$ ); 6 — металлическая пластина

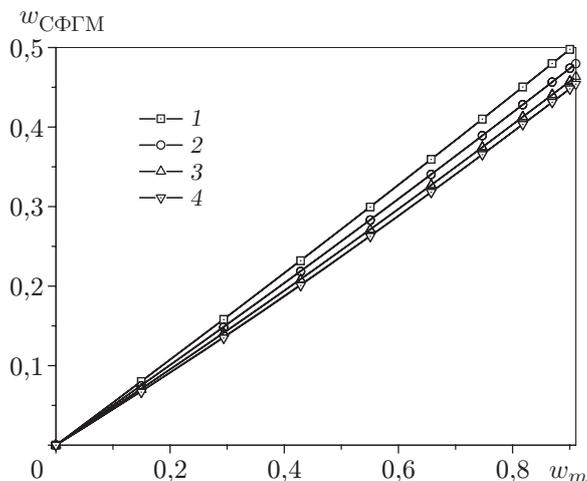


Рис. 6. Зависимость между смещениями в пластине из СФГМ и в металлической пластине при  $q = 1 \text{ кН/м}^2$  и различных значениях параметра материала  $p$  в случае нелинейного анализа:

1 —  $p = 0,2$ , 2 —  $p = 0,5$ , 3 —  $p = 1$ , 4 —  $p = 2$

**4. Выводы.** В работе исследован нелинейный цилиндрический изгиб пластин из СФГМ под действием равномерного давления. Основные уравнения получены с использованием теории Кармана для больших перемещений. Предполагалось, что свойства СФГМ изменяются по толщине пластин, при этом распределение материала происходит в соответствии с двумя степенными функциями. В задаче о цилиндрическом изгибе пластин уравнения пластин Навье с учетом больших перемещений можно получить в форме линейных уравнений и нелинейных граничных условий. Использование линейных дифференциальных уравнений существенно упрощает анализ больших перемещений. Для пластины из керамики и металла определены безразмерные напряжения и перемещения. Установлено, что результаты, полученные на основе нелинейного анализа, существенно отличаются от результатов, полученных на основе линейного анализа. Учет нелинейности приводит к уменьшению величины поперечного смещения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Wetherhold R. C., Seelman S., Wang J.** The use of functionally graded materials to eliminate or control thermal deformation // *Composite Sci. Technol.* 1996. V. 56. P. 1099–1104.
2. **Zenkour A. M.** Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates // *Appl. Math. Modelling.* 2006. V. 30. P. 67–84.
3. **Kadoli R., Akhtar K., Ganesan N.** Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory // *Appl. Math. Modelling.* 2008. V. 32, N 12. P. 2509–2525.
4. **Benatta M. A., Mechab I., Tounsi A., Adda bedia E. A.** Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects // *Comput. Materials Sci.* 2008. V. 44. P. 675–776.
5. **Lee Y. D., Erdogan F.** Residual/thermal stress in FGM and laminated thermal barrier coatings // *Intern. J. Fracture.* 1994. V. 69. P. 145–165.
6. **Bao G., Wang L.** Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings // *Intern. J. Solids Structures.* 1995. V. 32. P. 2853–2871.

7. **Chung Y. L., Chi S. H.** The residual stress of functionally graded materials // J. Chinese Inst. Civil Hydraulic Engng. 2001. V. 13. P. 1–9.
8. **Sallai B.-O., Tounsi A., Mechab I., et al.** A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams // Comput. Materials Sci. 2009. V. 44. P. 1344–1350.
9. **Woo J., Meguid S. A.** Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells // Intern. J. Solids Structures. 2001. V. 38. P. 7409–7421.
10. **Chakraborty A., Gopalakrishnan S., Reddy J. N.** A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials // Intern. J. Mech. Sci. 2003. V. 45. P. 519–539.
11. **Agarwal S., Chakraborty A., Gopalakrishnan S.** Large deformation analysis for anisotropic and inhomogeneous beams using exact linear static solutions // Composite Struct. 2006. V. 72, N 1. P. 91–104.
12. **Yang J., Shen H. S.** Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads // Intern. J. Non-Linear Mech. 2003. V. 38. P. 467–482.
13. **Navazi H. M., Haddadpour H., Rasekh M.** An analytical solution for nonlinear cylindrical bending of functionally graded plates // Thin-Walled Structures. 2006. V. 44. P. 1129–1137.
14. **Delale F., Erdogan F.** The crack problem for a nonhomogeneous plane // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. P. 609–614.
15. **Reddy J. N.** Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2003.
16. **Sun C. T., Chin H.** Analysis of asymmetric composite laminates // AIAA J. 1988. V. 26, N 6. P. 714–718.

*Поступила в редакцию 8/XII 2011 г.*

---