

УДК 539

## ТЕРМОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ СХОЖДЕНИЯ СНЕЖНЫХ ЛАВИН И ГРУНТОВЫХ ОПОЛЗНЕЙ

А. Д. Чернышов

Воронежский государственный университет инженерных технологий, 394000 Воронеж

E-mail: chernyshovad@mail.ru

Снежный или грунтовый массив клиновидной формы, находящийся на плоском склоне горы, в связанной постановке моделируется термоупругой средой, на которую действуют массовая сила тяжести, равномерная поверхностная нагрузка и тепловой поток. Получено точное решение задачи о равновесии массива. Из условий невозможности равновесия выведены два критерия, при выполнении которых начинается схождение снежной лавины или грунтового оползня. Данный результат может быть использован для прогноза образования грунтовых оползней и схождения снежных лавин в горных условиях.

Ключевые слова: массив клиновидной формы, термоупругая среда, снежная лавина.

Исследованию проблемы моделирования движения снежных лавин посвящено большое количество работ. В [1] рассматривается равновесие снежного покрова на склонах гор, в [2–4] изучается движение лавины, моделируемой вязкой жидкостью, в [5, 6] с использованием одномерной модели SNOWPACK развития снежной лавины проведены расчеты толщины и плотности слоя снега с вязкоупругими свойствами, вычислено предельное сопротивление сдвигу.

Изучалось также деформирование материалов тел клиновидной формы. В работе [7] рассмотрены задачи для клина с жестко защемленной гранью, в [8] — для клина, погруженного в пластическое полупространство, в [9] изучается деформирование клина с гладкими гранями, в [10] на гранях клина задаются граничные условия смешанного типа, в [11] исследуется упругий клин в трехмерной постановке.

В данной работе снежная или грунтовая масса рассматривается в состоянии покоя и моделируется термоупругим телом клиновидной формы, находящимся на жестком основании. Температурные и упругие характеристики снега и грунта приведены в справочниках физических величин.

**1. Постановка задачи.** До момента схода грунтовый оползень или снежная лавина (далее — массив) находится в равновесном состоянии и имеет все свойства твердого тела. Поскольку температура является одной из важнейших климатических характеристик, данный массив следует моделировать термоупругим телом. Условие его схождения будем трактовать как невозможность термоупругого равновесия. Вследствие изменения погодных условий входные параметры, определяющие равновесие массива, могут измениться таким образом, что равновесие станет невозможным и начнется схождение грунтового оползня или снежной лавины.

При нарушении условий термоупругого равновесия в одной точке массив не будет вовлечен в движение, так как остальная его часть будет сдерживать небольшой участок, где нарушены условия термоупругого равновесия, и схождение лавины будет невозможным.

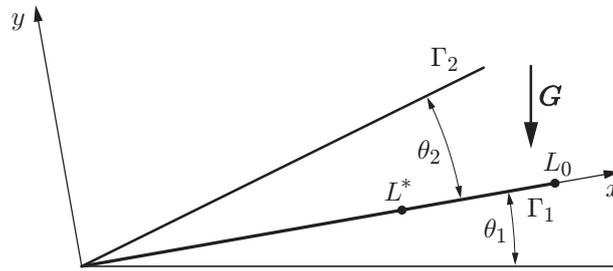


Схема массива клиновидной формы:

$\Gamma_1$  — твердое основание, расположенное под углом  $\theta_1$  к горизонтальной линии,  $\Gamma_2$  — свободная поверхность снежного или грунтового массива

Если условия термоупругого равновесия нарушены на достаточно протяженном участке длиной  $\Delta L$ , то часть массива на этом участке придет в движение и увлечет за собой остальную его часть, т. е. начнется сходжение лавины. Это позволяет сделать вывод, что в случае плоского склона горы условием сходжения лавины является нарушение условий упругого равновесия на участке протяженностью не меньше некоторого критического значения  $\Delta L$ , определяемого экспериментально.

Предположим, что все компоненты тензора напряжений линейно зависят от геометрических координат. По мере удаления от внешней поверхности массива напряжения увеличиваются, достигая наибольшего значения на опорной плоскости горного склона. Поэтому критерии сходжения формулируются с использованием напряжений на опорной плоскости.

Обозначим через  $x = L^*$  координату точки, в которой впервые нарушаются условия упругого равновесия, а через  $L_0$  длину склона горы (см. рисунок). Во всех точках склона горы при  $x \geq L^*$  условия упругого равновесия также будут нарушены в силу монотонного возрастания напряжений при удалении от передней кромки. Тогда условие сходжения лавины можно представить в виде неравенства

$$L_0 - L^* \geq \Delta L. \quad (1)$$

В простейшей постановке задачи будем считать, что ребро плоского склона горы расположено горизонтально, сама опорная наклонная плоскость горы  $\Gamma_1$ , на которой находится массив грунта или снега, составляет с горизонталью угол  $\theta_1$ , массив имеет клиновидную форму с углом раствора  $\theta_2$ , внешняя поверхность массива  $\Gamma_2$  плоская.

На массив действуют массовая сила тяжести  $\mathbf{G}$ , постоянная поверхностная нагрузка  $\mathbf{Q}$ , приложенная на внешней плоской поверхности  $\Gamma_2$ , и тепловой поток  $q_0$ . Сила  $\mathbf{Q}$  может быть обусловлена действием атмосферного давления и наличием ветра. Свойства массива в равновесном состоянии до его сходжения с наклонной плоскости  $\Gamma_1$  будем описывать связанной термоупругой моделью [6].

Задача рассматривается для случая плоской деформации в декартовой системе координат. Начало координат расположено в вершине угла массива, ось  $x$  направлена по опорной наклонной плоскости  $\Gamma_1$ , ось  $y$  — перпендикулярно вверх. Тогда проекции сил  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{Q}$  определяются выражениями

$$\mathbf{G} = (-\rho g \sin \theta_1, -\rho g \cos \theta_1), \quad \mathbf{Q} = (q_x, q_y). \quad (2)$$

Запишем уравнения термоупругого равновесия в перемещениях и уравнения теплопроводности [6] с учетом массовой силы тяжести:

$$\begin{aligned} \lambda_0 U_{xx} + (\lambda + \mu) V_{xy} + \mu U_{yy} - \gamma T_x &= \rho g \sin \theta_1, & \lambda_0 &= \lambda + 2\mu, \\ \lambda_0 V_{yy} + (\lambda + \mu) U_{xy} + \mu V_{xx} - \gamma T_y &= \rho g \cos \theta_1, & \gamma &= (3\lambda + 2\mu)\alpha_t; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta T = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (U, V, T) \in C^{(2)}(\Omega). \quad (4)$$

Здесь  $\Omega$  — клиновидная область массива;  $\alpha_t$  — коэффициент температурного расширения; величина  $\gamma$  учитывает связь температурных и упругих деформаций. Каждое из уравнений равновесия (3) содержит неизвестные функции  $U, V, T$ . Необходимо определить, в каких случаях следует учитывать связность.

Запишем условия жесткого сцепления на границе  $\Gamma_1$  и линейный закон изменения температуры в зависимости от координаты  $x$ :

$$U(x, y)|_{\Gamma_1} = 0, \quad V(x, y)|_{\Gamma_1} = 0; \quad (5)$$

$$T(x, y)|_{\Gamma_1} = T_0 + T_1 x. \quad (6)$$

Здесь  $T_0$  — температура на передней кромке массива;  $T_1$  — градиент температуры на поверхности горного склона. Эти постоянные будем считать известными. Если склон горы находится в окрестности активного вулкана, то температура будет возрастать, если склон находится вдали от подобных зон, то с увеличением высоты горы температура будет уменьшаться. В данном случае изменение температуры аппроксимируется линейной зависимостью. На внешней поверхности  $\Gamma_2$  граничные условия задаются в виде постоянной нагрузки  $Q$  и постоянного теплового потока:

$$(\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y)|_{\Gamma_2} = q_x, \quad (\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y)|_{\Gamma_2} = q_y; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_2} = -q_0. \quad (8)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений;  $n_x, n_y$  — проекции единичной нормали к  $\Gamma_2$ , направленной внутрь области массива  $\Omega$ ;  $q_0$  — заданный внешний тепловой поток, обусловленный влиянием атмосферного воздуха и солнечного излучения.

В данной системе координат уравнения границ  $\Gamma_1, \Gamma_2$  запишем в виде равенств

$$\Gamma_1: y = 0, \quad \Gamma_2: x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2 = 0. \quad (9)$$

Отсюда находим значения проекций единичной внутренней нормали  $n_x, n_y$  к  $\Gamma_2$

$$n_x = \sin \theta_2, \quad n_y = -\cos \theta_2. \quad (10)$$

Полагаем, что при  $T = T_0$  температурные деформации на передней кромке склона горы  $\Gamma_1$  равны нулю. Тогда тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  будет выражаться через перемещения и температуру по формулам Дюамеля [12]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} - 3\alpha_t T) + 2\mu e_{xx}, & \sigma_{yy} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} - 3\alpha_t T) + 2\mu e_{yy}, \\ \sigma_{xy} &= 2\mu e_{xy}, & e_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y}, & e_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Задачу о равновесии термоупругого массива сформулируем следующим образом: найти решение системы уравнений (3), (4) относительно перемещений  $U, V$  и температуры  $T$  с граничными условиями (5)–(8) из класса непрерывных функций  $C^{(2)}(\Omega)$  до вторых производных включительно.

**2. Построение точного решения.** Для того чтобы использовать метод угловых суперпозиций [13], от системы координат  $(x, y)$  перейдем к косоугольной системе координат  $(\xi_1, \xi_2)$ :

$$\xi_1 = y, \quad \xi_2 = x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2, \quad \theta_2 \neq 0. \quad (12)$$

Условие  $\theta_2 \neq 0$  в (12) является необходимым, для того чтобы преобразование  $(x, y)$  в  $(\xi_1, \xi_2)$  было невырожденным. В новых переменных уравнения границ  $\Gamma_1, \Gamma_2$  записываются в более удобной форме

$$\Gamma_1: \xi_1 = 0, \quad \Gamma_2: \xi_2 = 0, \quad (\xi_1, \xi_2) > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (13)$$

Частные производные вычисляются из равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \sin \theta_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \sin \theta_2 \cos \theta_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \sin^2 \theta_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - 2 \cos \theta_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \cos^2 \theta_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

В переменных  $\xi_1, \xi_2$  компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  выражаются через частные производные от перемещений  $U, V$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \left( \sin \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \cos \theta_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} - 3\alpha_t(T - T_0) \right) + 2\mu \sin \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda \left( \sin \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \cos \theta_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} - 3\alpha_t(T - T_0) \right) + 2\mu \left( \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \cos \theta_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} \right), \\ \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial U}{\partial \xi_1} - \cos \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \sin \theta_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

С помощью формул для частных производных (14) и напряжений (15) уравнения равновесия (3) и теплопроводности (4) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \lambda_0 \sin^2 \theta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} + (\lambda + \mu) \left( \sin \theta_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \sin \theta_2 \cos \theta_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_2^2} \right) + \\ + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} - 2 \cos \theta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \cos^2 \theta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} \right) - \gamma T_x = \rho g \sin \theta_1, \\ \lambda_0 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1^2} - 2 \cos \theta_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \cos^2 \theta_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_2^2} \right) + \mu \sin^2 \theta_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_2^2} + \\ + (\lambda + \mu) \left( \sin \theta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \sin \theta_2 \cos \theta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} \right) - \gamma T_y = \rho g \cos \theta_1; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_2^2} - 2 \cos \theta_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0. \quad (17)$$

Граничные условия (5)–(8) принимают следующую форму:

$$U(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=0} = 0, \quad V(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=0} = 0; \quad (18)$$

$$T(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=0} = T_0 + T_1 \frac{\xi_2}{\sin \theta_2} \Big|_{\xi_1=0}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \left[ \lambda \left( \sin \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \cos \theta_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} - 3\alpha_t(T - T_0) \right) + 2\mu \sin \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \right] \sin \theta_2 - \right. \\ \left. - \mu \left( \frac{\partial U}{\partial \xi_1} - \cos \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \sin \theta_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} \right) \cos \theta_2 \right\} \Big|_{\xi_2=0} = q_x, \\ \left\{ - \left[ \lambda \left( \sin \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \cos \theta_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} - 3\alpha_t(T - T_0) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\mu \left( \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \cos \theta_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} \right) \right] \cos \theta_2 + \mu \left( \frac{\partial U}{\partial \xi_1} - \cos \theta_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \sin \theta_2 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} \right) \sin \theta_2 \right\} \Big|_{\xi_2=0} = q_y; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_2} - \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \cos \theta_2\right)\Big|_{\xi_2=0} = -q_0. \quad (21)$$

Решение системы трех дифференциальных уравнений (16), (17) относительно  $U, V, T$  с граничными условиями (18)–(21) будем искать в классе полиномов второй степени по переменным  $\xi_1, \xi_2$  для перемещений и полинома первой степени для температуры:

$$\begin{aligned} U &= A_1 \xi_1 + A_2 \xi_1 \xi_2 + A_3 \xi_1^2 + A_4 + A_5 \xi_2 + A_6 \xi_2^2, \\ V &= B_1 \xi_1 + B_2 \xi_1 \xi_2 + B_3 \xi_1^2 + B_4 + B_5 \xi_2 + B_6 \xi_2^2, \\ T &= C_0 + C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку уравнение теплопроводности выполняется тождественно, постоянные  $C_0, C_1, C_2$  можно найти из граничных условий (19), (21):

$$C_0 = T_0, \quad C_1 = \frac{2T_1}{\sin 2\theta_2} + \frac{q_0}{\cos \theta_2}, \quad C_2 = \frac{T_1}{\sin \theta_2}. \quad (23)$$

Остальные коэффициенты  $A_1, \dots, A_6, B_1, \dots, B_6$  определим с помощью граничных условий (18), (20) и двух уравнений равновесия (16). Подставляя выражения для перемещений (22) в (18), получаем систему

$$A_4 + A_5 \xi_2 + A_6 \xi_2^2 = 0, \quad B_4 + B_5 \xi_2 + B_6 \xi_2^2 = 0. \quad (24)$$

Равенства (24) должны выполняться при любых  $\xi_2 \geq 0$ , поэтому

$$A_4 = A_5 = A_6 = B_4 = B_5 = B_6 = 0.$$

Выражения для  $U$  и  $V$  можно упростить:

$$U = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_1 \xi_2 + A_3 \xi_1^2, \quad V = B_1 \xi_1 + B_2 \xi_1 \xi_2 + B_3 \xi_1^2. \quad (25)$$

Подставляя перемещения  $U, V$  из (25) в граничные условия (20) и уравнения равновесия (16), получаем систему четырех уравнений

$$\begin{aligned} &[\lambda(A_2 \xi_1 \sin \theta_2 + B_1 + 2B_3 \xi_1 - B_2 \xi_1 \cos \theta_2 - 3\alpha_t C_1 \xi_1) + 2\mu A_2 \xi_1 \sin \theta_2] \sin \theta_2 - \\ &\quad - \mu(A_1 + 2A_3 \xi_1 - A_2 \xi_1 \cos \theta_2 + B_2 \xi_1 \sin \theta_2) \cos \theta_2 = q_x, \\ \mu(A_1 + 2A_3 \xi_1 - A_2 \xi_1 \cos \theta_2 + B_2 \xi_1 \sin \theta_2) \sin \theta_2 - \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &- [\lambda(A_2 \xi_1 \sin \theta_2 + B_1 + 2B_3 \xi_1 - B_2 \xi_1 \cos \theta_2 - 3\alpha_t C_1 \xi_1) + \\ &\quad + 2\mu(B_1 + 2B_3 \xi_1 - B_2 \xi_1 \cos \theta_2)] \cos \theta_2 = q_y; \end{aligned}$$

$$(\lambda + \mu)B_2 \sin \theta_2 + \mu(2A_3 - 2A_2 \cos \theta_2) - \gamma C_2 \sin \theta_2 = \rho g \sin \theta_1, \quad (27)$$

$$\lambda_0(2B_3 - 2B_2 \cos \theta_2) + (\lambda + \mu)A_2 \sin \theta_2 - \gamma(C_1 - C_2 \cos \theta_2) = \rho g \cos \theta_1.$$

Уравнения (26) должны выполняться при любых  $\xi_1 \geq 0$ . Это условие приводит к замкнутой системе шести уравнений относительно  $A_1, \dots, A_3, B_1, \dots, B_3$ :

$$\lambda B_1 \sin \theta_2 - \mu A_1 \cos \theta_2 = q_x, \quad \mu A_1 \sin \theta_2 - \lambda_0 B_1 \cos \theta_2 = q_y; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &[\lambda_0 A_2 \sin \theta_2 + \lambda(2B_3 - B_2 \cos \theta_2) - 3\alpha_t \lambda C_1] \sin \theta_2 - \\ &\quad - \mu(2A_3 - A_2 \cos \theta_2 + B_2 \sin \theta_2) \cos \theta_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\mu(2A_3 - A_2 \cos \theta_2 + B_2 \sin \theta_2) \sin \theta_2 - \quad (29)$$

$$- [\lambda A_2 \sin \theta_2 + \lambda_0(2B_3 - B_2 \cos \theta_2) - 3\alpha_t \lambda C_1] \cos \theta_2 = 0.$$

Из равенств (28) получаем коэффициенты  $A_1, B_1$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= (q_x \lambda_0 \cos \theta_2 + q_y \lambda \sin \theta_2) / \Delta_1, & B_1 &= \mu(q_x \sin \theta_2 + q_y \cos \theta_2) / \Delta_1, \\ \Delta_1 &= \mu(\lambda \sin^2 \theta_2 - \lambda_0 \cos^2 \theta_2). \end{aligned} \quad (30)$$

Остается найти  $A_2, A_3, B_2, B_3$  из системы четырех линейных алгебраических уравнений (27), (29). Для этого сначала с помощью уравнений (27) найдем следующие комбинации неизвестных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \mu(2A_3 - A_2 \cos \theta_2) &= \mu A_2 \cos \theta_2 - (\lambda + \mu) B_2 \sin \theta_2 + \rho g \sin \theta_1 + \gamma C_2 \sin \theta_2, \\ 2B_3 - B_2 \cos \theta_2 &= \lambda_0^{-1} [\lambda_0 B_2 \cos \theta_2 - (\lambda + \mu) A_2 \sin \theta_2 + \rho g \cos \theta_1 + \gamma(C_1 - C_2 \cos \theta_2)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя выражения  $\mu(2A_3 - \cos \theta_2 A_2)$  и  $2B_3 - \cos \theta_2 B_2$  из (31) в (29), получаем систему двух уравнений относительно  $A_2, B_2$ :

$$\begin{aligned} A_2 \mu [(3\lambda + 4\mu) \sin^2 \theta_2 - \lambda_0 \cos^2 \theta_2] + 2B_2 \lambda \lambda_0 \sin \theta_2 \cos \theta_2 &= \\ = \lambda [3\alpha_t C_1 \lambda_0 - \rho g \cos \theta_1 - \gamma(C_1 - C_2 \cos \theta_2)] \sin \theta_2 + \lambda_0 (\rho g \sin \theta_1 + \gamma C_2 \sin \theta_2) \cos \theta_2, \\ 2A_2 \mu \sin \theta_2 \cos \theta_2 - B_2 (\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_2) &= \rho g (\cos \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \sin \theta_1) + \\ + \gamma (C_1 \cos \theta_2 - C_2) - 3\alpha_t \lambda C_1 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда определяем  $A_2, B_2$ :

$$A_2 = \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} h_1 & 2\lambda \lambda_0 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ h_2 & -(\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_2) \end{vmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} (3\lambda + 4\mu) \sin^2 \theta_2 - \lambda_0 \cos^2 \theta_2 & h_1 \\ 2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \mu [(3\lambda + 4\mu) \sin^2 \theta_2 - \lambda_0 \cos^2 \theta_2] & 2\lambda \lambda_0 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ 2\mu \sin \theta_2 \cos \theta_2 & -(\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_2) \end{vmatrix}, \\ h_1 &= 4\alpha_t \lambda \mu C_1 \sin \theta_2 + \gamma (\lambda + \mu) C_2 \sin 2\theta_2 + \rho g (\lambda_0 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \lambda \cos \theta_1 \sin \theta_2), \\ h_2 &= \rho g (\cos \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \sin \theta_1) + 2\alpha_t \mu C_1 \cos \theta_2 - \gamma C_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Коэффициенты  $A_3, B_3$  в (31) выразим через коэффициенты  $A_2, B_2$ :

$$\begin{aligned} A_3 &= \cos \theta_2 A_2 + \frac{1}{2\mu} [ -(\lambda + \mu) \sin \theta_2 B_2 + \rho g \sin \theta_1 + \gamma C_2 \sin \theta_2 ], \\ B_3 &= \cos \theta_2 B_2 + \frac{1}{2\lambda_0} [ -(\lambda + \mu) \sin \theta_2 A_2 + \rho g \cos \theta_1 + \gamma (C_1 - C_2 \cos \theta_2) ]. \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, найдены все коэффициенты:  $C_1, C_2, C_3$  находятся из (23),  $A_1, B_1$  — из (30),  $A_2, B_2$  — из (33), (34),  $A_3, B_3$  — из (35), температура — из (22), перемещения — из (25).

Для вычисления напряжений следует использовать выражения для частных производных от перемещений

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi_1} &= A_1 + A_2 \xi_2 + 2A_3 \xi_1, & \frac{\partial U}{\partial \xi_2} &= A_2 \xi_1, \\ \frac{\partial V}{\partial \xi_1} &= B_1 + B_2 \xi_2 + 2B_3 \xi_1, & \frac{\partial V}{\partial \xi_2} &= B_2 \xi_1. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя частные производные из (36) и температуру из (22) в (15), определим компоненты тензора напряжений. В результате подстановки всех коэффициентов в (36), (25) и в третье уравнение в (22) получим решение в аналитическом виде для перемещений, температуры и напряжений.

**3. Критерии схождения грунтовых оползней и снежных лавин.** При вычислении коэффициентов  $A_1, B_1$  в формулах (30) необходимо потребовать, чтобы определитель  $\Delta_1$  был меньше нуля:

$$\Delta_1 = \mu[\lambda \sin^2 \theta_2 - (\lambda + 2\mu) \cos^2 \theta_2] < 0, \quad (37)$$

так как при  $\Delta_1 = 0$  решения не существует, а при  $\Delta_1 > 0$  вектор перемещений изменяет направление на противоположное, что противоречит физическому смыслу. Следует отметить, что при малых конечных значениях  $\Delta_1$  решение для  $A_1, B_1$  существует, а при  $\Delta_1 \rightarrow 0$  коэффициенты  $A_1, B_1$  неограниченно возрастают. В этом случае будут неограниченно увеличиваться все компоненты перемещений и напряжений.

Для анализа условий схождения лавин неравенство (37), при выполнении которого данное решение существует, запишем в виде

$$\theta_2 < \alpha_1, \quad \alpha_1 = \arctg \sqrt{\nu}, \quad \nu = (\lambda + 2\mu)/\lambda. \quad (38)$$

Значение  $\alpha_1$  получено из решения уравнения  $\Delta_1 = 0$ . Можно показать, что при любых  $\theta_2 \in [0, \alpha_1)$  имеет место неравенство  $\Delta_2 \neq 0$ , т. е. решение для коэффициентов  $A_2, A_3, B_2, B_3$  в (33)–(35) существует. Это означает, что если  $\theta_2 < \alpha_1$ , то  $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$  и решение задачи существует, а если  $\theta_2 = \alpha_1$ , то решения не существует. Полученное критическое значение угла  $\theta_2 = \alpha_1$  можно трактовать следующим образом.

При  $\theta_2 \rightarrow \alpha_1 - 0$  напряжения неограниченно возрастают, поэтому термоупругое равновесие невозможно, т. е. при выполнении неравенства

$$\theta_2 \geq \alpha_1 \quad (39)$$

нарушается равновесие массива не только на опорной плоскости, но и во всей области  $\Omega$ . Следовательно, можно считать, что условие (39) является глобальным. При выполнении неравенства  $\theta_2 \geq \alpha_1 > \pi/4$  внешняя поверхность массива  $\Gamma_2$  будет расположена под большим углом к горизонтали, поэтому под действием силы тяжести произойдет естественное схождение лавины.

Первый критерий схождения лавин получим из условия превышения касательного напряжения по сравнению с кулоновским трением покоя на опорной плоскости при  $y = \xi_1 = 0$ :

$$|\sigma_{xy}|_{y=0} \geq k_1 |\sigma_{yy}|_{y=0} \quad (40)$$

( $k_1$  — коэффициент кулоновского трения покоя). Из полученного выше решения задачи следует, что при фиксированном  $x$  по мере удаления от внешней плоскости  $\Gamma_2$  по направлению к опорной плоскости  $\Gamma_1$  с уменьшением  $y$  абсолютные величины всех компонент тензора напряжений монотонно увеличиваются по линейному закону, достигая наибольшего значения на опорной плоскости при  $y = 0$ . Чтобы вычислить значения  $|\sigma_{xy}|_{y=0}, |\sigma_{yy}|_{y=0}$ , найдем частные производные от перемещений при  $y = 0$ :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_1} \Big|_{y=0} = A_1 + A_2 \xi_2, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \Big|_{y=0} = B_1 + B_2 \xi_2, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial V}{\partial \xi_2} \Big|_{y=0} = 0. \quad (41)$$

Подставляя частные производные от перемещений из (41) и температуры  $T$  из (22) в выражения (15) для  $\sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ , получаем

$$\sigma_{yy} \Big|_{y=0} = \lambda_0 B_1 + (\lambda_0 B_2 - 3\alpha_t \lambda C_2) \xi_2, \quad \sigma_{xy} \Big|_{y=0} = \mu(A_1 + A_2 \xi_2), \quad \xi_2 \Big|_{y=0} = x \sin \theta_2. \quad (42)$$

Результаты анализа выражений (42) позволяют сделать вывод, что материал массива сдвигается вниз по наклонной плоскости  $\Gamma_1$  и сжимается под действием силы тяжести

как основной нагрузки. Следовательно,  $\sigma_{xy} > 0$ ,  $\sigma_{yy} < 0$ . Поэтому выражение (40) можно записать в виде

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \geq -k_1 \sigma_{yy}|_{y=0}.$$

Таким образом,

$$\mu(A_1 + A_2 \xi_2) \geq -k_1[\lambda_0 B_1 + (\lambda_0 B_2 - 3\alpha_t \lambda C_2) \xi_2]. \quad (43)$$

С помощью (43) определим критическое значение координаты  $x$ :

$$x^* = L^* = \frac{-k_1(\lambda + 2\mu)B_1 - \mu A_1}{\sin \theta_2 [\mu A_2 + k_1(\lambda_0 B_2 + \mu A_2)] - 3k_1 \alpha_t \lambda T_1}.$$

Отсюда в соответствии с условием (1) получаем первый критерий

$$L_0 + \frac{k_1(\lambda + 2\mu)B_1 + \mu A_1}{\sin \theta_2 [\mu A_2 + k_1(\lambda_0 B_2 + \mu A_2)] - 3k_1 \alpha_t \lambda T_1} \geq \Delta L. \quad (44)$$

Если выполняется неравенство (44), то массив сходит с наклонной плоскости  $\Gamma_1$ . При  $T_1 > 0$ , когда температура воздуха понижается, значение выражения в левой части неравенства (44) уменьшается, поэтому опасность схождения массива уменьшается. При  $T_1 < 0$ , когда температура воздуха повышается, значение выражения в левой части (44) увеличивается, поэтому опасность схождения лавины возрастает. Учет температуры и температурных деформаций позволяет сделать вывод, что при повышении температуры воздуха опасность схождения лавины возрастает, а при наступлении заморозков — уменьшается.

Второй критерий схождения лавины можно получить из условия, согласно которому в некоторых точках массива на плоскости  $\Gamma_1$  напряженное состояние становится предельным. При этом начинается пластическое течение, которое приводит к образованию лавины. Условие пластичности запишем в форме условия Мизеса [8]

$$\sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^*|_{y=0} = 2k_0^2, \quad (45)$$

где  $\sigma_{ij}^*$  — девиаторная часть тензора напряжений на плоскости  $\Gamma_1$ ;  $k_0$  — предел текучести материала массива. Напряжения  $\sigma_{ij}^*|_{y=0}$  линейно зависят от координаты  $x$ , поэтому условие (45) представляет собой квадратное уравнение относительно критического значения  $x^* = L^*$ . Вследствие громоздкости решение этого уравнения в явной форме не приводится. Если в точке  $x = L^*$  на плоскости  $\Gamma_1$  достигается предел текучести, то при  $x > L^*$  в результате монотонного возрастания составляющих  $\sigma_{ij}^*$  материал массива также будет находиться в пластическом состоянии. Вычислив  $L^*$  из (45), с помощью (1) получим третий критерий схождения лавин.

**4. Влияние погодных условий на входные параметры.** Полученное точное решение задачи о равновесии термоупругого массива угловой формы зависит от большого количества параметров, входящих в предложенные критерии схождения массива. Перечислим факторы, которые могут оказать влияние на изменение входных параметров задачи и послужить причиной схождения лавины или грунтового оползня, если состояние массива близко к критическому.

1. Изменение скорости и направления ветра, а также атмосферного давления, приводящее к изменению значений составляющих  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ .

2. Размокание грунта вследствие длительных дождей, что приводит к увеличению удельной массовой силы  $\rho g$ , уменьшению коэффициента сцепления  $k_1$  и предела текучести  $k_0$ .

3. Наступление оттепели (этот вывод получен вследствие учета связности в термоупругой модели).

4. Подземные толчки или искусственные взрывы, приводящие к увеличению напряжений.

**5. Выводы.** Результаты анализа полученного решения позволяют сделать следующие выводы. По мере удаления от передней кромки массива напряжения в нем монотонно увеличиваются. Наибольшее значение сдвигового напряжения достигается в области контакта массива с опорной жесткой плоскостью. С увеличением протяженности склона горы вероятность схода лавины или грунтового оползня возрастает. Зона схождения лавины зарождается на склоне горы на некотором удалении  $L^*$  от его передней кромки. Критическое значение  $L^*$ , при котором впервые нарушается условие термоупругого равновесия, может быть вычислено из уравнения (44) или (45).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Божинский А. Н., Григорян С. С.** О равновесии снежного покрова на склонах гор // Материалы гляциологических исследований. Хроника, обсуждение. М.: Ин-т географии АН СССР, 1978. Вып. 34. С. 101–107.
2. **Бахвалов Н. С., Эглит М. Э.** Исследование одномерного движения снежной лавины по плоскому склону // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1973. № 5. С. 7–14.
3. **Володичева Н. А., Миронова Е. М., Олейникова А. Д., Эглит М. Э.** Использование математического моделирования для определения границ распространения лавин // Материалы гляциологических исследований. Хроника, обсуждение. М.: Ин-т географии АН СССР, 1986. Вып. 56. С. 78–81.
4. **Данилова Е. М.** Движение снежной лавины в лотке треугольного поперечного сечения. Некоторые вопросы математики и механики. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1981.
5. **Мокров Е. Г., Соловьев А. Ю.** Использование моделирования снежной толщи “SNOWPACK” для определения параметров лавинообразования // Криосфера Земли. 2010. Т. 14, № 2. С. 79–86.
6. **Lehning M., Bartelt P. V., Brown R. L., et al.** A physical SNOWPACK model for the Swiss avalanche warning. Pt 2. Snow microstructure // Cold Reg. Sci. Technol. 2002. V. 35. P. 147–167.
7. **Александров В. М., Копасенко В. В.** Контактная задача для упругого клина с жестко защемленной гранью // Прикл. механика. 1968. Т. 4, вып. 7. С. 75–82.
8. **Ивлев Д. Д.** Механика пластических сред. М.: Наука, 2001. Т. 1.
9. **Чернышов А. Д.** О деформировании сплошных сред в клиновидной области с гладкими гранями // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. С. 193–199.
10. **Уфлянд Я. С.** Смешанная задача теории упругости для клина // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Сер. Механика и машиностроение. 1959. № 2. С. 156–158.
11. **Пожарский Д. А.** О трехмерной контактной задаче для упругого клина при учете сил трения // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64. С. 151–159.
12. **Купрадзе В. Д.** Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе. Под общ. ред. В. Д. Купрадзе. М.: Наука, 1976.
13. **Чернышов А. Д.** Метод угловых суперпозиций. Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад., 2009.