УДК 532.526

# ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ДИФФУЗИОННЫМ ГОРЕНИЕМ

С. А. Гапонов

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН
630090 Новосибирск, gaponov@itam.nsc.ru

Установлено, что при постоянной молекулярной массе по пограничному слою в невязком приближении и в приближении Дана — Линя при одинаковых числах Шмидта газов задача об устойчивости пограничного слоя с диффузионным пламенем сводится к аналогичной задаче однокомпонентного газа. Приближенно это заключение справедливо и при разных числах Шмидта. Расчеты стационарных параметров пограничного слоя указывают на то, что имеются две обобщенные точки перегиба, свидетельствующие о необходимом условии «невязкой» неустойчивости Рэлея. В результате моделирования установлено, что пограничный слой с диффузионным пламенем наиболее неустойчив к двумерным возмущениям. С увеличением частоты фазовая скорость нарастающей волны стремится к значению в обобщенной точке перегиба. Несмотря на достаточно большие значения степени нарастания, степень пространственного усиления волны с высокой точностью равна отношению временной степени усиления к групповой скорости.

Ключевые слова: пограничный слой, диффузионное пламя, подвод тепла, пористая пластина, неустойчивость, возмущения.

DOI 10.15372/FGV20230212

## ВВЕДЕНИЕ

Впервые задача диффузионного пламени в пограничном слое была решена Эммонсом [1]. Исследования пограничного слоя с диффузионным горением проводились неоднократно, что отражено, например, в обзоре [2].

Первоначально устойчивость ламинарных течений в присутствии диффузионного пламени исследовалась для слоя смешения топлива и окислителя или при подаче струи топлива в окислитель, и задача решалась в пренебрежении вязкостью в уравнениях устойчивости. Подробную информацию о таких работах можно найти в обзоре [3]. В связи с этим заслуживает внимания работа [4]. В ней, по-видимому, впервые рассмотрена устойчивость струи в присутствии пламени с учетом вязкости и теплопроводности в уравнениях устойчивости. До настоящего времени отсутствуют исследования устойчивости пограничного слоя при горении подаваемого через проницаемую поверхность топлива, сгорающего в потоке окислителя.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00017, https://rscf.ru/project/22-21-00017/) и частично в рамках государственного задания (номер гос. регистрации 121030500161-0).



Наличие диффузионного пламени приводит к внутреннему выделению тепла и изменению состава смеси, вследствие чего плотность зависит как от температуры, так и от состава смеси газов. Поэтому устойчивость пограничного слоя с горением зависит от числа Маха, температуры и состава смеси газов, определяемых химическими реакциями. Температура существенно зависит от тепловыделения реакций. Кроме того, при подаче топлива через пористую стенку, обтекаемую окислителем, важный фактор, влияющий на устойчивость пограничного слоя, связан с вдувом газа.

В [5] на примере задачи об устойчивости пограничного слоя диссоциирующего газа впервые показано, что его устойчивость слабо зависит от возмущений источника тепла и скоростей образования продуктов горения. Позже последний вывод был подтвержден в [6]. Слабое влияние этих возмущений связано с тем, что соответствующие им члены, входящие в уравнения устойчивости, обратно пропорциональны числу Рейнольдса [7] и имеют такое же влияние, как и члены, связанные с непараллельностью течения в пограничном слое. В приближении параллельного невозмущенного течения система уравнений устойчивости зависит от распределений основной скорости, концентраций, температуры и плотности. Во многих случаях, например при сгорании углеводородных топлив в потоке воздуха, плотность газа зависит в основном от температуры. Молекулярная масса смеси меняется по пограничному слою незначительно [2], ее изменением можно пренебречь и принять плотность обратно пропорциональной температуре, как это часто используется в задачах устойчивости диффузионных пламен.

В данной статье показано, что при постоянной молекулярной массе смеси газов задача устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением сводится к стандартной задаче устойчивости пограничного слоя однокомпонентного газа с внутренним подводом тепла и вдувом газа через пористую стенку. На основе предложенной модели решена задача устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением, рассматривавшаяся в работе [8].

## МОДЕЛИРОВАНИЕ

Задача устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением исследуется в приближении параллельного течения. В этом случае при умеренных числах Рейнольдса можно пользоваться приближенными уравнениями Дана — Линя — Алексеева [9, 10], когда в возмущениях потоков тепла, вещества и тензора вязких напряжений сохраняются только члены со старшей производной по нормальной к поверхности обтекаемой пластины координате. Следуя [7], линейные относительно возмущений параметры течения двумерного пограничного слоя можно получить в виде:

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial t}+u\,\frac{\partial\rho^*}{\partial x}+\frac{d\rho}{dy}\,v^*+\rho\Big(\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{\partial v^*}{\partial y}+\frac{\partial w^*}{\partial z}\Big)=0,$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u^*}{\partial t}+u\,\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{du}{dy}\,v^*\Big)=-\frac{\partial p^*}{\partial x}+\mu\,\frac{\partial^2u^*}{\partial y^2},$$

$$\rho\Big(\frac{\partial w^*}{\partial t}+u\,\frac{\partial w^*}{\partial x}\Big)=-\frac{\partial p^*}{\partial z}+\mu\,\frac{\partial^2w^*}{\partial y^2},$$

$$\rho\Big(\frac{\partial v^*}{\partial t}+u\,\frac{\partial v^*}{\partial x}\Big)=-\frac{\partial p^*}{\partial y}, \qquad (1)$$

$$\rho c_{pf}\Big(\frac{\partial T^*}{\partial t}+u\,\frac{\partial T^*}{\partial x}+\frac{dT}{dy}\,v^*\Big)=$$

$$=-\frac{\partial p^*}{\partial t}+u\,\frac{\partial p^*}{\partial x}+\frac{c_{pf}\mu}{\mathrm{Pr}}\,\frac{\partial^2T^*}{\partial y^2}-Q^*,$$

$$\rho\Big(\frac{\partial c_i^*}{\partial t}+u\,\frac{\partial c_i^*}{\partial x}+\frac{dc_i}{dy}v^*\Big)=\frac{\mu}{\mathrm{Sc}_i}\,\frac{\partial^2c_i^*}{\partial y^2}+\dot w_i^*,$$

$$p^*=RT\rho^*+R\rho T^*+T\rho R^*,$$

где $i=1,\ldots,n$, $n$ — количество веществ в смеси газов. Здесь $x,y,z$ — координаты в направлении набегающего потока, в нормальном к поверхности обтекающей пластины и в боковом направлениях, $t$ — время, $u,v,w$ — компоненты скорости, $\rho$ — плотность, $p$ — давление, $T$ — температура, $R$ — газовая постоянная смеси газов, $c_i$ — массовая концентрация вещества, $\mu$ — динамическая вязкость, $D_i$ — коэффициент диффузии $i$-го вещества, $\dot w_i$ — массовая скорость образования $i$-го вещества, $Q$ — скорость подвода тепла, Pr, $\mathrm{Sc}_i$ — числа Прандтля и Шмитда $i$-го вещества. Звездочкой помечены возмущения соответствующих параметров. Все величины размерные.

Прежде чем приводить систему к безразмерному виду, необходимо установить порядок величин $\dot w$ и $Q$. С этой целью запишем уравнение диффузии вещества и энергии в размерном виде [11]:

$$\rho\Big(u\,\frac{\partial c_i}{\partial x}+v\,\frac{\partial c_i}{\partial y}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\mu}{\mathrm{Sc}_i}\,\frac{\partial c_i}{\partial y}\Big)+\dot w_i,$$

$$\rho c_p\Big(u\,\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{dT}{dy}\,v\Big)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{c_p\mu}{\mathrm{Pr}}\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big)+\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+Q,$$

где

$$Q=\sum_i\rho D_i\Big(\frac{\partial c_i}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial\,(c_{pi}T)}{\partial y}\Big)-\sum_i h_i\dot w_i,$$

$$h_i=\int\limits_0^T c_{pi}\,dT+h_i^0,$$

$c_{pi}$ и $h_i^0$ — теплоемкость при постоянном давлении и теплота образования $i$-го вещества, $c_p=\sum\limits_i c_{pi}c_i$. Отнеся все линейные размеры к толщине пограничного слоя $\delta$, а другие величины к соответствующим значениям на внешней границе пограничного слоя, получим

$$\bar\rho\Big(\mathrm{Re}\,\bar u\,\frac{\partial c_i}{\partial\bar x}+\mathrm{Re}\,\bar v\,\frac{\partial c_i}{\partial\bar y}\Big)-\frac{\partial}{\partial\bar y}\Big(\frac{\bar\mu}{\mathrm{Sc}_i}\,\frac{\partial c_i}{\partial\bar y}\Big)=$$

$$=\bar{\dot w}_i=\frac{\delta^2}{\mu}\,\dot w_i,$$

$$\bar\rho\bar c_p\Big(\mathrm{Re}\,\bar u\,\frac{\partial\bar T}{\partial\bar x}+\frac{d\bar T}{d\bar y}\,\mathrm{Re}\,\bar v\Big)-\frac{\partial}{\partial\bar y}\Big(\frac{\bar\mu\bar c_p}{\mathrm{Pr}}\,\frac{\partial\bar T}{\partial\bar y}\Big)-$$

$$-(\gamma-1)\,\mathrm{M}^2\bar\mu\Big(\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\Big)^2=\bar Q=\frac{\delta^2}{\mu_e T_e c_{pe}}\,Q,$$

где $\mathrm{Re}=u_e\delta\rho_e/\mu_e$, индексом $e$ отмечены параметры вне пограничного слоя, $\gamma$ — показатель адиабаты, чертой сверху помечены безразмерные величины. Из условия, что все члены уравнений при умеренных числах Маха M — величины одного порядка, следует, что

$$\dot w_i=\frac{\mu_e}{\delta^2}\,\bar{\dot w}_i,\quad Q=\frac{\mu_e T_e c_{pe}}{\delta^2}\,\bar Q,$$

а их возмущения

$$w_i^*=\frac{\mu_e}{\delta^2}\hat w_i,\quad Q^*=\frac{\mu_e T_e c_{pe}}{\delta^2}\,\hat Q. \tag{2}$$

С учетом (2), отнеся $R^*$ к универсальной газовой постоянной $R_0$, систему (1) можно привести к безразмерному виду:

$$\frac{\partial\hat\rho}{\partial\bar t}+\bar u\,\frac{\partial\hat\rho}{\partial\bar x}+\frac{d\bar\rho}{d\bar y}\,\hat v+\bar\rho\Big(\frac{\partial\hat u}{\partial\bar x}+\frac{\partial\hat v}{\partial\bar y}+\frac{\partial\hat w}{\partial\bar z}\Big)=0,$$

$$\bar\rho\Big(\frac{\partial\hat w}{\partial\bar t}+\bar u\,\frac{\partial\hat w}{\partial\bar x}\Big)=-\frac{1}{\gamma\,\mathrm{M}_e^2}\,\frac{\partial\hat p}{\partial\bar z}+\frac{\bar\mu}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2\hat w}{\partial\bar y^2},$$

$$\bar\rho\Big(\frac{\partial\hat v}{\partial\bar t}+\bar u\,\frac{\partial\hat v}{\partial\bar x}\Big)=-\frac{1}{\gamma\mathrm{M}_e^2}\,\frac{\partial\hat p}{\partial\bar y},$$

$$\bar\rho\bar c_p\Big(\frac{\partial\hat T}{\partial\bar t}+\bar u\,\frac{\partial\hat T}{\partial\bar x}+\frac{d\bar T}{d\bar y}\,\hat v\Big)= \tag{3}$$

$$=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big(\frac{\partial\hat p}{\partial\bar t}+\bar u\,\frac{\partial\hat p}{\partial\bar x}\Big)+\frac{\bar c_p\bar\mu}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2\hat T}{\partial\bar y^2}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\hat Q,$$

$$\bar\rho\Big(\frac{\partial\hat c_i}{\partial\bar t}+\bar u\,\frac{\partial\hat c_i}{\partial\bar x}+\frac{dc_i}{d\bar y}\,\hat v\Big)=\frac{\bar\mu}{\mathrm{Sc}_i\,\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2\hat c_i}{\partial\bar y^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\hat w_i,$$

$$\frac{\hat p}{\bar p}=\frac{\hat\rho}{\bar\rho}+\frac{\hat T}{\bar T}+\frac{\hat R}{\bar R},$$

$$\bar R=\sum_i\frac{c_i}{m_i}=\frac{1}{m},\quad \hat R=\sum_i\frac{\hat c_i}{m_i}.$$

Здесь $i=1,\dots,n$; $m_i$, $m$ — молекулярные массы компонентов и смеси газов; крышечкой помечены безразмерные возмущения параметров течения.

В силу того, что в приближении Дана — Линя — Алексеева не учитываются нормальная к стенке скорость и производные от осредненных параметров течения по продольной координате, так как они обратно пропорциональны числу Рейнольдса, нет необходимости учитывать возмущения подвода тепла $\hat Q/\mathrm{Re}$ и источника порождения веществ $\hat w_i/\mathrm{Re}$. В рамках «невязкой» теории слабое влияние этих возмущений на устойчивость пограничного слоя с диссоциацией газа было установлено в [5], а для пограничного слоя с диффузионным горением — в [6]. В задаче неустойчивости пограничного слоя с учетом вязкости и теплопроводности и внутренним источником тепла результат слабого влияния его возмущения подтвержден в [12].

Для двумерных возмущений система (3) допускает решение

$$[\hat u,\hat v,\hat p,\hat T,\hat\rho,\hat c_i,\hat R]=$$

$$=[f,\bar\alpha\varphi,\pi,\theta,r,\varkappa_i,\sigma]\exp\{i[\bar\alpha(\bar x-C\bar t)]\}$$

и приводится к виду:

$$i(\bar u-C)r+\frac{d\bar\rho}{d\bar y}\,\varphi+\bar\rho\Big(if+\frac{d\varphi}{d\bar y}\Big)=0,$$

$$\bar\rho\Big[i(\bar u-C)f+\frac{d\bar u}{d\bar y}\,\varphi\Big]=-\frac{i}{\gamma\,\mathrm{M}_e^2}\,\pi+\frac{\bar\mu}{\bar\alpha\,\mathrm{Re}}\,\frac{d^2 f}{d\bar y^2},$$

$$\bar\rho\alpha^2 i(\bar u-C)\varphi=-\frac{1}{\gamma\,\mathrm{M}_e^2}\,\frac{d\pi}{d\bar y},$$

$$\bar\rho\bar c_p\Big[i(\bar u-C)\vartheta+\frac{d\bar T}{d\bar y}\,\varphi\Big]= \tag{4}$$

$$=i\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\,(\bar u-\bar C)\pi+\frac{\bar\lambda}{\bar\alpha\,\mathrm{Re}}\,\frac{d^2\theta}{d\bar y^2},$$

$$\bar\rho\Big[i(\bar u - C)\varkappa_i + \frac{dc_i}{d\bar y}\,\varphi\Big] = \frac{\bar\rho\bar D_{12}}{\bar\alpha\,\mathrm{Re}}\,\frac{\bar\mu}{\mathrm{Sc}_i\,\mathrm{Re}}\,\frac{d^2\varkappa_i}{d\bar y^2},$$

$$\frac{\pi}{\bar p} = \frac{r}{\bar\rho} + \frac{\theta}{\bar T} + m\sigma,$$

граничные условия:

$f, \varphi, \theta, \varkappa_i \to 0 \quad (\bar y \to \infty):$

$$f, \varphi, \theta + a\,\frac{d\theta}{d\bar y}, \quad \varkappa_i + b_i\,\frac{d\varkappa_i}{d\bar y} = 0 \quad (\bar y = 0), \quad (5)$$

где $i = 1, \ldots, n$.

Порядок системы (4) равен $N = 2(3 + n)$, где $n$ — количество элементов газа в смеси. Можно показать, что вне пограничного слоя, где стационарные параметры потока постоянны, существует $N$ решений. Только половина из них, $3 + n$, удовлетворяет первому условию (5). Построенное на их основе общее решение должно удовлетворять условию на стенке.

Если молекулярная масса смеси $m$ меняется по пограничному слою незначительно, можно принять $\bar\rho = 1/\bar T$, как и в однокомпонентном газе. В ряде случаев при неизменной молекулярной массе смеси газов в задаче устойчивости можно принять возмущение ее газовой постоянной равной нулю, т. е. $\sigma = 0$. Возможность пренебрежения возмущением $\sigma$ легко доказывается при условии, что число Шмидта одинаково для всех веществ, $\mathrm{Sc}_i = \mathrm{Sc}$. Косвенным обоснованием возможности использования такого равенства могут служить результаты расчетов параметров течения при горении водорода, вдуваемого через пористую пластину, в потоке воздуха [13], выполненные при одинаковом коэффициенте диффузии для всех веществ.

Поделив диффузионные уравнения системы (5) на $m_i$ и сложив их, получаем уравнение

$$\bar\rho\Big[i(\bar u - C)\sigma + \frac{d\bar R}{d\bar y}\,\varphi\Big] = \frac{\bar\mu}{\bar\alpha\,\mathrm{Sc}\,\mathrm{Re}}\,\frac{d^2\sigma}{d\bar y^2}.$$

При постоянстве молекулярной массы смеси $\dfrac{d\bar R}{d\bar y} = 0$ возмущение $\sigma$ не связано с возмущениями других параметров течения и может быть принято равным нулю, а возмущения давления, плотности и температуры будут связаны соотношением $\pi = r/\bar\rho + \theta/\bar T$, совпадающим со случаем однокомпонентного газа.

Несмотря на то, что при доказательстве независимости уравнений диффузии от других (основных) уравнений устойчивости использовалось равенство коэффициентов диффузии разных веществ, можно показать, что их различие слабо влияет на устойчивость. Для доказательства этого факта воспользуемся подходом Рэлея — Гейзенберга — Линя [14], согласно которому решение системы (4) ищется в виде ряда

$$q = q_1 + \frac{1}{\bar\alpha\,\mathrm{Re}}\,q_2 + \ldots + \Big(\frac{1}{\bar\alpha\,\mathrm{Re}}\Big)^{k-1} q_k + \ldots,$$

где $q_1$ — решение «невязких» уравнений.

Выше было установлено, что при одинаковых для всех веществ числах Шмидта и постоянной молекулярной массе смеси газов возмущение плотности не зависит от возмущения концентраций. Это тем более справедливо в невязком приближении. В этом случае первые четыре уравнения системы (4) приводятся к уравнению

$$\frac{d^2\pi_1}{d\bar y^2} = \Big(\frac{2}{\bar u - C}\,\frac{d\bar u}{d\bar y} - \frac{1}{\bar T}\,\frac{d\bar T}{d\bar y}\Big)\frac{d\pi_1}{d\bar y} + {}$$

$$+ \bar\alpha^2\Big(1 - \frac{\mathrm{M}_e^2(\bar u - C)^2}{\bar T}\Big)\pi_1.$$

Из того, что амплитуды $f, \varphi \to 0$ при $\bar y \to \infty$, следует, что $\pi_1(\infty) = 0$.

Легко видеть, что вне пограничного слоя существует два решения. Одно из них неограниченно растет с увеличением $\bar y$. Другое решение затухающее, его можно взять для расчета амплитуды давления внутри пограничного слоя. Следуя [14], из уравнений для невязких возмущений легко получить

$$\varphi_1 = i\,\frac{\bar T}{\gamma\,\mathrm{M}_e^2\alpha^2(\bar u - C)}\,\frac{d\pi_1}{d\bar y},$$

$$f_1 = -\frac{\bar T}{\gamma\,\mathrm{M}_e^2(\bar u - C)}\Big(\pi_1 + \frac{1}{\alpha^2(\bar u - C)}\,\frac{d\bar u}{d\bar y}\,\frac{d\pi_1}{d\bar y}\Big),$$

$$\vartheta_1 = \bar T\Big(\frac{\gamma - 1}{\gamma\bar c_p}\,\pi_1 - \frac{1}{\alpha^2(\bar u - C)}\,\frac{d\bar T}{d\bar y}\,\frac{d\pi_1}{d\bar y}\Big),$$

$$\varkappa_{i1} = -\Big(\frac{1}{\alpha^2(\bar u - C)}\,\frac{dc_i}{d\bar y}\,\frac{d\pi_1}{d\bar y}\Big).$$

Построенное невязкое решение используется в качестве одного из $N/2$ фундаментальных решений системы (4). Другие $N/2-1$ решений строятся на основе следующего (вязкого) приближения. Эти решения желательно построить таким образом, чтобы была возможность устранить особенности невязкого решения при $|\bar u - C| \ll 1$. С этой целью можно воспользоваться подходом Лиза — Линя [15] и построить вязкое решение с точностью до членов порядка $\varepsilon = (1/\bar\alpha\,\mathrm{Re})^{-2/3}$ в предположении, что

$$\frac{d}{d\bar y} \sim \frac{1}{\varepsilon}, \quad \bar u - C \sim \varepsilon, \quad f \sim 1,$$

$$\varphi \sim \varepsilon f, \quad \theta \sim f, \quad \varkappa_i \sim f.$$

В этом случае справедливы уравнения

$$\frac{d^3 f}{d^3 \bar y} = (u-C)\,\frac{ia\bar\rho\,\mathrm{Re}}{\bar\mu}\,\frac{df}{d\bar y}, \quad \frac{d\varphi}{d\bar y} + if = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{d^2\bar y} = (u-C)\,\frac{i\bar\alpha\bar\rho\,\overline{\mathrm{Pr}}\,\mathrm{Re}}{\bar\mu}\,\theta + \frac{\bar\alpha\bar\rho\,\overline{\mathrm{Pr}}\,\mathrm{Re}}{\bar\mu}\,\frac{d\bar T}{d\bar y}\,\varphi, \quad (6)$$

$$\frac{d^2\varkappa_i}{d^2\bar y} = (u-C)\,\frac{i\bar\alpha\bar\rho\,\overline{\mathrm{Sc}}\,\mathrm{Re}}{\bar\mu}\,\varkappa_i + \frac{\bar\alpha\bar\rho\,\overline{\mathrm{Sc}}\,\mathrm{Re}}{\bar\mu}\,\frac{dc_i}{d\bar y}\,\varphi,$$

$i = 1,\dots,n$.

Из структуры уравнений (6) видно, что можно построить $2+n$ независимых решений, затухающих в бесконечности. Пусть вектором решения, затухающего вне пограничного слоя, является $\boldsymbol z_k = \|f_k, \varphi_k, \theta_k, \varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n\|$ и пусть первое решение $\boldsymbol z_1$ удовлетворяет невязким уравнениям, а все остальные — системе (6). В частности, можно принять $\boldsymbol z_2 = \|f_2, \varphi_2, 0, \dots, 0\|$, $\boldsymbol z_3 = \|0, 0, \theta_3, \dots, 0\|$, $\boldsymbol z_{3+k} = \|0, \dots, \varkappa_k, \dots, 0\|$, линейная комбинация этих решений должна удовлетворять $3+n$ условиям на стенке (5). Можно показать, что в этом случае задача устойчивости сводится к нахождению условий равенства нулю характеристического уравнения

$$(f_{1w}\varphi_{2w} - f_{2w}\varphi_{1w})\Big(\theta_{3w} + a\,\frac{d\theta_{3w}}{d\bar y}\Big) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n}\Big(\varkappa_{iw} + b_i\,\frac{d\varkappa_{iw}}{d\bar y}\Big) = 0.$$

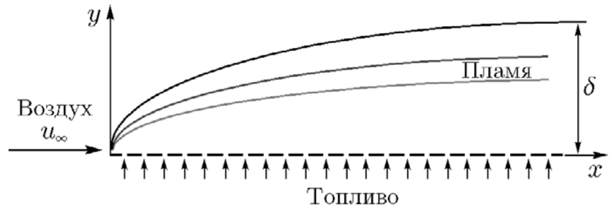

Рис. 1. Схема пограничного слоя с пламенем

Достаточным условием выполнения этого уравнения является обращение в нуль первого сомножителя $(f_{1w}\varphi_{2w} - f_{2w}\varphi_{1w})$, который не зависит от возмущений концентраций.

Из того факта, что оба решения не зависят от возмущений концентраций, следует, что в приближенной постановке задачи об устойчивости диффузионного пламени можно считать выполненным соотношение $\pi = r/\bar\rho + \theta/\bar T$. Первые четыре уравнения системы (4) решаются независимо от последних. Задача устойчивости сводится к обычной задаче однокомпонентного газа с учетом внутреннего подогрева, влияющего на параметры основного течения, прежде всего на температуру в пограничном слое. При подаче топлива через пористую поверхность скорость и температура, кроме этого, зависят от расхода газа через пористую стенку.

## ПРИМЕР РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРОВ

В качестве примера рассматривается одно из диффузионных пламен из работы [8], схема которого показана на рис. 1. Через пористую пластину вдувается смесь водорода и азота с массовой концентрацией водорода 3 %, удельным массовым потоком через пористую пластину $j = \dfrac{\rho(0)v(0)}{\rho_e u_e(0)} = 0.004$. Вне пограничного слоя скорость потока $u_e = 5$ м/с, температура $T_e = 293$ К. При этом стенка нагревалась до температуры $T_w \approx 630$ К.

На рис. 2 точками показаны результаты измерения температуры по пограничному слою на расстоянии $x_b = 100$ мм ($\mathrm{Re}_b = \sqrt{u_e x_b/\nu_e} = 180$). Сплошная линия получена путем решения уравнений пограничного слоя [16] с внутренним подводом тепла:

$$\frac{d}{dY}\Big(C\,\frac{d^2\Phi}{dY^2}\Big) + \frac{\Phi}{2}\,\frac{d^2\Phi}{dY^2} = 0,$$

$$\frac{d}{dY}\Big(\frac{D}{\mathrm{Pr}}\,\frac{dg}{dY}\Big) + \frac{\Phi}{2}\,\frac{dg}{dY} = \qquad (7)$$

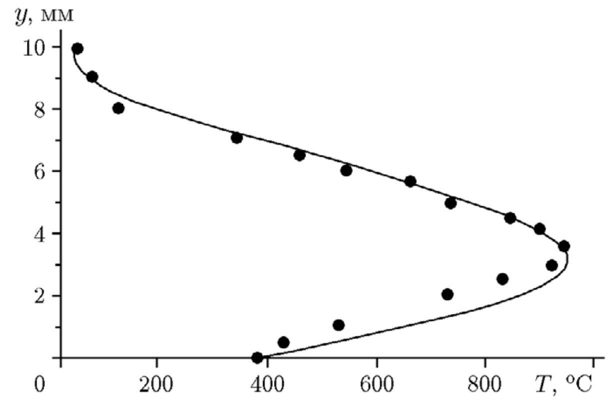


Рис. 2. Распределение температуры в пограничном слое:

линия — расчет с подогревом (7), значки — экспериментальные данные [8]

$$= \frac{u_e^2}{I_e}\,\frac{d}{dY}\Big[\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\Big)D\,\frac{d\Phi}{dY}\,\frac{d^2\Phi}{dY^2}\Big] - \bar{Q}\Big(\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}_b}\Big)^2,$$

граничные условия:

$$\Phi = j\,\mathrm{Re}, \quad \frac{d\Phi}{dY} = \bar{u} = 0, \quad \bar{T} = \bar{T}_w \quad (Y = 0);$$

$$\bar{u} \to 1, \quad g \to 1 \quad (Y \to \infty).$$

Здесь

$$Y = \int\limits_0^{\bar{y}} \bar{\rho}(\bar{y})\,d\bar{y}, \quad \frac{d\Phi}{dY} = \bar{u}, \quad g = \frac{I}{I_e},$$

$$I = c_pT + \frac{u^2}{2},\ D = \bar{\rho}\,\bar{\mu},\ \bar{\rho} = \frac{1}{\bar{T}},\ \mathrm{Re} = \frac{u_e\delta}{\nu_e},$$

$\nu_e$ — коэффициент кинематической вязкости,

$$\delta = \sqrt{\frac{x\nu_e}{u_e}}, \quad \bar{\mu} = \bar{T}^{3/2}\,\frac{1+\bar{T}_s}{\bar{T}+\bar{T}_s}, \quad T_s = 110\ \mathrm{K}.$$

Удовлетворительное соответствие распределения температуры по пограничному слою, рассчитанное на основе уравнений (7) (линия на рис. 2) и экспериментальных данных [8], было получено при

$$\bar{Q} = 15.25\bar{u}(1-\bar{u}) \times$$
$$\times \exp\Big(-\Big(\frac{\bar{u}-0.15}{0.158}\,\frac{T_{\max}(\mathrm{Re})}{T_{\max}(\mathrm{Re}_b)}\,\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}_b}\Big)^2\Big). \quad (8)$$

Подробная процедура получения зависимости (8) изложена в [17].

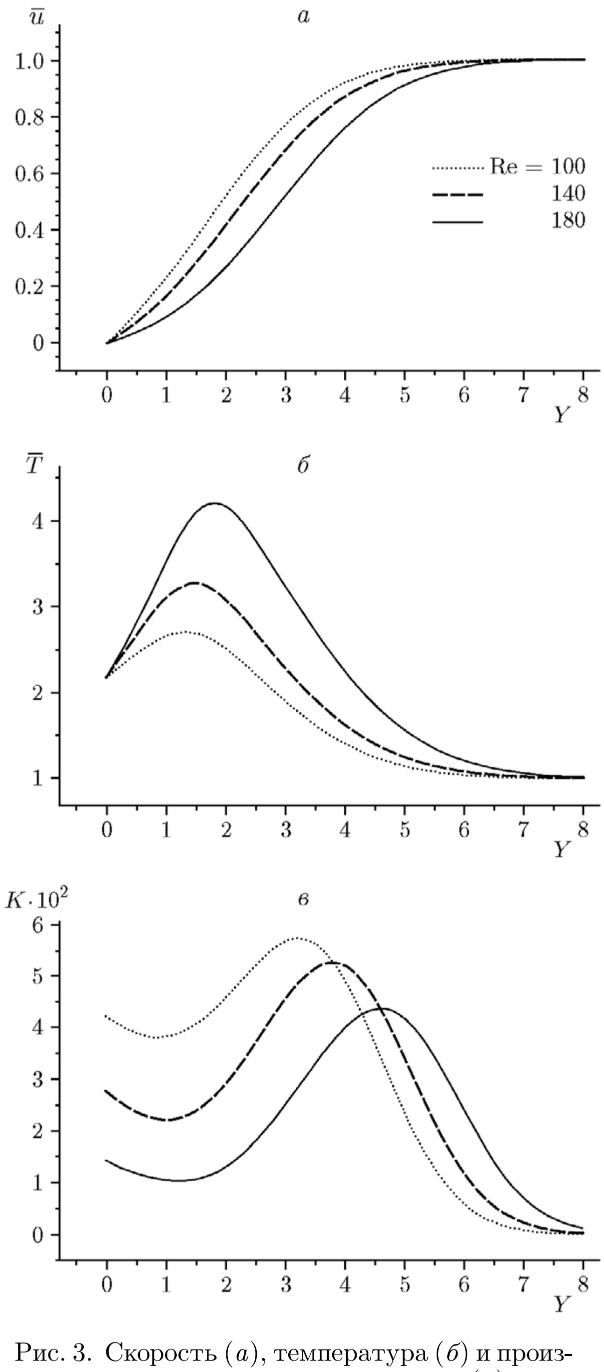


Рис. 3. Скорость (*а*), температура (*б*) и произведение плотности на завихренность (*в*) в пограничном слое при разных числах Рейнольдса

Влияние числа Рейнольдса на распределения стационарных параметров пограничного слоя по пограничному слою иллюстрирует рис. 3. На рис. 3,*а,б* представлены зависимости безразмерных скорости и температуры от автомодельной координаты пограничного слоя. Максимум температуры, отнесенный к температуре набегающего потока, существенно растет с увеличением числа Рейнольдса. При этом расстояние от стенки до максимума, как и до точки перегиба профиля скорости, увеличивается.

В задачах «невязкой» неустойчивости особую роль играет наличие обобщенной точки перегиба, которая соответствует экстремуму зависимости произведения завихренности на плотность

$$K = \bar{\rho}\,\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} = \bar{\rho}^2\,\frac{d(\bar{u})}{dY},$$

результаты расчета этой точки показаны на рис. 3,*в*. Видно, что положение первого экстремума (минимум зависимости), соответствующего минимуму плотности, слабо зависит от числа Рейнольдса, в то время как второй экстремум (максимум), появление которого объясняется уменьшением $K$ до нуля вне пограничного слоя после его нарастания в области увеличения плотности внутри пограничного слоя, приближается к внешней границе пограничного слоя с увеличением Re. При этом важно обратить внимание на второе необходимое условие невязкой неустойчивости [6]

$$(\bar{u} - \bar{u}_s)\,\frac{dK}{dY} < 0,$$

которое является обобщением критерия Фьёртофта [18]. Здесь $\bar{u}_s$ — скорость в положении экстремума.

Можно заметить, что для скорости $\bar{u}_{s1}$, соответствующей минимуму функции $K$, это условие выполняется вблизи внешней границы пограничного слоя $\bar{u} - \bar{u}_{s2} > 0$, $\bar{u}_{s2}$ — скорость в положении максимума $K$. Для второй обобщенной точки перегиба, соответствующей максимуму $K$, условие Фьёртофта выполняется при $\bar{u} - \bar{u}_{s1} > 0$.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ПО НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Расчеты устойчивости пограничного слоя проводились относительно как двумерных, так и трехмерных возмущений:

$$\hat{q} = q(\bar{y})\exp\{i[\alpha\xi + \beta\zeta - \omega t]\},$$

где $(\xi,\zeta) = (x,z)u_e/\nu_e$, $\omega = F + i\omega_i$, $F = 2\pi f\nu_e/u_e^2$, $f$ — частота, Гц, $\alpha = \bar{\alpha}/\mathrm{Re}$. При

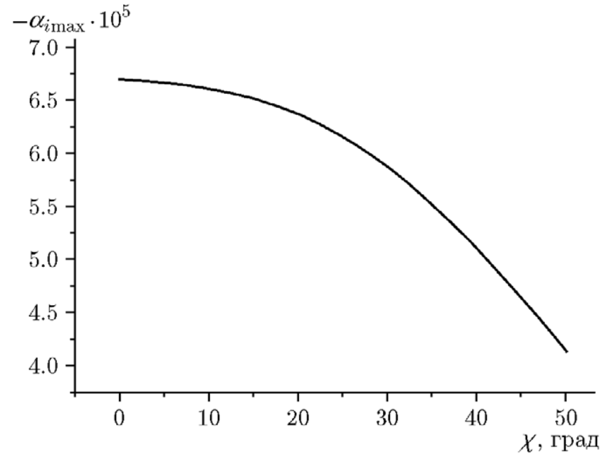


Рис. 4. Зависимость максимальных по частоте степеней роста от угла скольжения волны $\chi = \mathrm{arctg}\ (\beta/\alpha_r)$, $\mathrm{Re} = 180$

расчетах использовались уравнения устойчивости параллельных течений, подробно описанные в [12]. В случае пространственного усиления параметры волны $\beta$ и $\omega$ принимались реальными, а параметр $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ — комплексным. Отрицательные значения $\alpha_i$ соответствуют неустойчивости пограничного слоя. При реальных $\alpha$ и $\beta$, но комплексном частотном параметре $\omega = F + i\omega_i$ имеет место временная неустойчивость при $F_i > 0$.

В результате расчетов устойчивости относительно трехмерных возмущений установлено, что наиболее интенсивно нарастают вниз по потоку двумерные волны, $\beta = 0$. Этот факт отражен на рис. 4, где показана зависимость максимальных по частоте степеней пространственного нарастания от угла наклона волны $\chi = \mathrm{arctg}\ (\beta/\alpha_r)$.

Все приведенные ниже результаты получены для двумерных возмущений.

На рис. 5 приведены зависимости степени пространственного нарастания от частотного параметра при разных числах Рейнольдса. Из этих данных следует, что в области низких частот, $10^{-4} < F < 5\cdot 10^{-4}$, степень роста возмущений растет с увеличением числа Рейнольдса. В области высоких частот, $12\cdot 10^{-4} < F < 16\cdot 10^{-4}$, зависимость более сложная. При увеличении числа Рейнольдса примерно до 120 можно говорить о небольшом увеличении роста возмущений, а при $\mathrm{Re} > 120$ наблюдается обратное его влияние.

Максимальные по частоте степени нарастания волн в зависимости от числа Рейнольдса

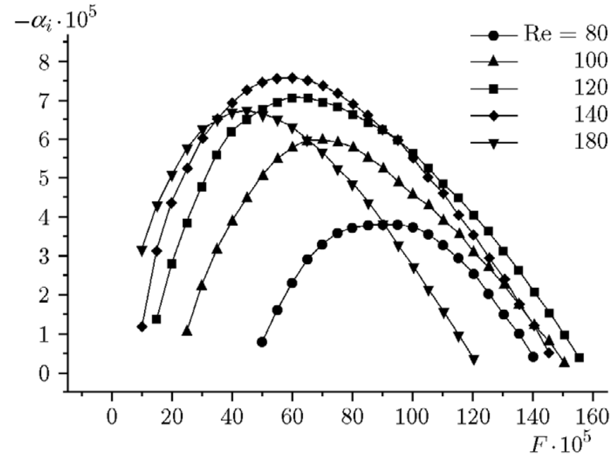


Рис. 5. Степень усиления двумерных волн в зависимости от частоты при разных числах Рейнольдса [17]

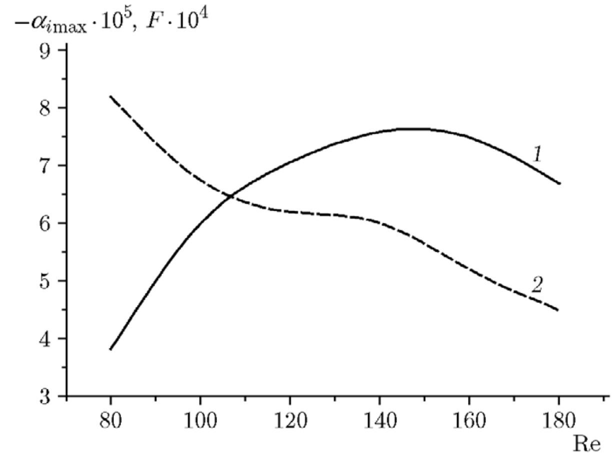


Рис. 6. Зависимость максимальных по частоте степеней усиления двумерных волн (*1*) и соответствующей частоты (*2*) от числа Рейнольдса

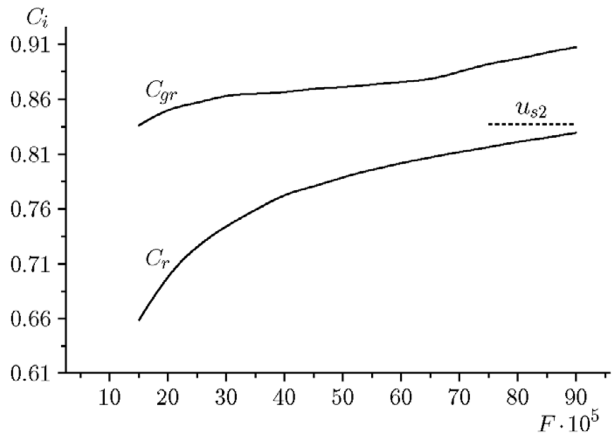


Рис. 7. Фазовая ($C_r$) и групповая ($C_{gr}$) скорости в зависимости от частоты, Re = 180:

$u_{s2}$ — скорость потока во второй обобщенной точке перегиба

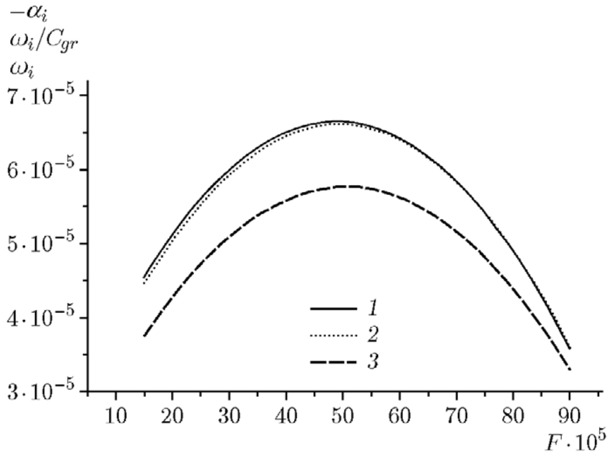


Рис. 8. Зависимость пространственной степени усиления $-\alpha_i$ (*1*), ее приближенного значения $F_i/C_{gr}$ (*2*) и временной степени усиления $F_i$ (*3*) от частоты при Re = 180

приведены на рис. 6. Как и в области высоких частот (см. рис. 5), зависимость степени усиления от числа Рейнольдса носит немонотонный характер. Здесь же приведено изменение частотного параметра в зависимости от числа Рейнольдса. Видно, что с увеличением расстояния ($x = \mathrm{Re}^2\nu_e/u_e$) от начала пластины частота наиболее усиливающихся волн уменьшается, что связано с ростом толщины $\delta$ и температуры в пограничном слое (см. рис. 3).

На рис. 7 показаны зависимости фазовой и групповой скоростей от частоты при Re = 180. Штриховая линия соответствует скорости потока во второй точке перегиба (максимум функции $K(Y)$). Прежде всего, видно, что групповая скорость превышает фазовую — более чем на 10 %. Особенно большая разница, достигающая 25 %, имеет место при низких частотах. Здесь важно заметить, что полученные значения фазовой скорости находятся в пределах скорости течения между первой и второй точками перегиба и удовлетворяют необходимому условию Фьёртофта при $\bar{u}_s = \bar{u}_{s2}$. В данных исследованиях не удалось обнаружить неустойчивость, связанную с условием Фьёртофта при $\bar{u}_s > \bar{u}_{s2}$.

На рис. 8 показаны зависимости пространственной ($-\alpha_i$ — линия *1*) и временной ($\omega_i$ — линия *3*) степеней роста возмущений. Кривая *2* соответствует расчету пространственной скорости усиления по значению временной скорости роста и групповой скорости $\omega_i/C_{gr}$. Несмотря на достаточно большие значения степени нарастания волн, составляющие около 10 % волнового числа или частоты, приближенные значения степени пространственного роста $-\alpha_i = \omega_i/C_{gr}$ практически не отличаются от точных значений.

## ВЫВОДЫ

В общем случае в уравнения устойчивости пограничного слоя с химическими реакциями входят возмущения источников отдельных веществ и соответствующих источников тепла. В работе показано, что влияние этих возмущений имеет порядок не учтенных в теории параллельного приближения членов, характеризующих непараллельность потока. Поэтому в приближении параллельного течения этими возмущениями можно пренебречь.

Проведенные исследования показали, что при постоянной молекулярной массе смеси газов уравнения «невязкой» неустойчивости не зависят от концентраций, а определяются только распределением плотности $\bar{\rho} = 1/\bar{T}$ и скорости основного течения. В этом случае задача об устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением сводится к аналогичной задаче однокомпонентного газа с внутренним подогревом.

Этот результат справедлив, кроме того, в приближении Дана — Линя при одинаковых числах Шмидта всех газов. В случае разных чисел Шмидта возможно приближенное моделирование задачи устойчивости пограничного слоя с диффузионным пламенем соответствующей задачей однокомпонентного газа с подогревом. Ошибка такого моделирования порядка $(\alpha\,\mathrm{Re})^{-2/3}$.

Конкретные расчеты проведены для пограничного слоя однокомпонентного газа с источником тепла (8) и нормой вдува газа $j = 0.004$, соответствующей ее значению в экспериментах [8]. Полученное распределение стационарной температуры удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

Расчеты параметров стационарного пограничного слоя показывают, что с увеличением числа Рейнольдса всё отчетливее заметна точка перегиба в профиле скорости, которая удаляется от стенки. При этом температура внутри слоя возрастает, а ее максимум смещается в сторону внешней границы. Известно, что в теории «невязкой» неустойчивости важную роль играет обобщенная точка перегиба, обращение в нуль производной от произведения завихренности на плотность. Расчетами установлено наличие двух таких точек, одна из которых соответствует минимуму произведения завихренности на плотность, а вторая максимуму. Положение первой из них слабо зависит от числа Рейнольдса, в то время как вторая заметно смещается к внешней границе пограничного слоя с увеличением Re. Необходимое условие неустойчивости Фьёртофта для второй точки выполняется для фазовых скоростей, превышающих скорость течения в первой обобщенной точке перегиба.

Наряду с расчетами стационарных параметров пограничного слоя с внутренним подогревом и вдувом газа через пористую пластину, решена задача его неустойчивости. Основные ее результаты заключаются в следующем. Наиболее сильно растут двумерные возмущения. Их максимальные по частоте степени нарастания зависят от числа Рейнольдса немонотонно, а частота наиболее усиливающейся волны уменьшается с ростом Re. Фазовые скорости нарастающих волн находятся в промежутке между скоростями в обобщенных точках перегиба и удовлетворяют условию Фьёртофта. Групповая скорость превышает фазовую более чем на 10 %. Приближенное значение пространственной степени усиления, определенное отношением временной степени усиления к групповой скорости, практически совпадает с его точной величиной.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Emmons H. W.** The film combustion of liquid fuel // Z. Math. Mech. — 1956. — Bd 36, N 1-2. — S. 60–71. — DOI: 10.1002/zamm.19560360105.
2. **Лукашов В. В., Терехов В. В., Терехов В. И.** Пристенные течения химически реагирующих веществ. Обзор современного состояния проблемы // Физика горения и взрыва. — 2015. — Т. 51, № 2. — С. 23–36.
3. **Jackson T. L.** Stability of laminar diffusion flames in compressible mixing layers // Major Research Topics in Combustion / M. Y. Hussaini, A. Kumar, R. G. Voigt (Eds). — New York: Springer, 1992. — (ICASE/NASA LaRC Series). — DOI: 10.1007/978-1-4612-2884-4_8.
4. **See Y. C., Ihme M.** Effects of finite-rate chemistry and detailed transport on the instability of jet diffusion flames // J. Fluid Mech. — 2014. — V. 745. — P. 647–681. — DOI: 10.1017/jfm.2014.95.

5. **Петров Г. В.** Влияние диссоциации на устойчивость пограничного слоя // Развитие возмущений в пограничном слое. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979. — С. 104–117.
6. **Shin D. S., Ferziger J. H.** Linear stability of the reacting mixing layer // AIAA J. — 1991. — V. 29, N 10. — P. 1634–1642. — DOI: 10.2514/3.10785.
7. **Гапонов С. А., Петров Г. В.** Устойчивость пограничного слоя неравновесно диссоциирующего газа. — Новосибирск: Наука, 2013.
8. **Volchkov E. P., Lukashov V. V., Terekhov V. V., Hanjalic K.** Characterization of the flame blow-off conditions in a laminar boundary layer with hydrogen injection // Combust. Flame. — 2013. — V. 160. — P. 1999–2008. — DOI: 10.1016/j.combustflame.2013.04.004.
9. **Dunn D. W., Lin C. C.** On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid // J. Aeronaut. Sci. — 1955. — V. 22, N 7. — P. 455–477. — DOI: 10.2514/8.3374.
10. **Алексеев М. А.** Об асимптотических приближениях в задаче устойчивости ламинарного пограничного слоя при сверхзвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. — 1972. — Вып. 1420.
11. **Агафонов В. П., Вертушкин В. К., Гладков А. А., Полянский О. Ю.** Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. — М.: Машиностроение, 1972.
12. **Гапонов С. А.** Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя при подводе тепла в его узкую полосу // Теплофизика и аэромеханика. — 2021. — № 3. — С. 351–360.
13. **Ha J. S., Shim S. H., Shin H. D.** Boundary layer diffusion flame over a flat plate in the presence and absence of flow separation // Combust. Sci. Technol. — 1991. — V. 75, N 4-6. — P. 241–260. — DOI: 10.1080/00102209108924091.
14. **Lees L., Reshotko E.** Stability of the compressible laminar boundary layer // J. Fluid Mech. — 1962. — V. 12, N 4. — P. 555–590. — DOI: 10.1017/s0022112062000403.
15. **Lees L., Lin C. C.** Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid // NACA TN No. 1115. — 1946. — https://authors.library.caltech.edu/457/1/LEEnacatn1115.pdf.
16. **Гапонов С. А.** Влияние подвода тепла в узкую полосу пограничного слоя на его устойчивость // ПМТФ. — 2020. — Т. 61, № 5. — С. 5–13.
17. **Гапонов С. А.** Устойчивость пограничного слоя при внутреннем выделении тепла и подаче газа через пористую стенку // Изв. РАН. МЖГ. — 2022. — № 5. — С. 41–50. — DOI: 10.31857/S0568528122050048.
18. **Fjørtoft R.** Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. Publ. Oslo. — 1950. — V. 17, N 6. — P. 1–52.

*Поступила в редакцию 30.05.2022.*
*После доработки 07.07.2022.*
*Принята к публикации 07.09.2022.*