

УДК 532.517.4

DOI: 10.15372/PMTF202215204

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ В ДАЛЬНОМ ПЛОСКОМ БЕЗЫМПУЛЬСНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ СЛЕДЕ

А. В. Шмидт

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

E-mail: schmidt@icm.krasn.ru

С использованием математической модели, полученной из алгебраической модели Роди рейнольдсовых напряжений, описано течение в дальнем плоском безымпурсном турбулентном следе. Модель аналогична двухпараметрической $(k-\varepsilon)$ -модели турбулентности в приближении дальнего следа с измененной эмпирической постоянной в диффузионных слагаемых уравнений. Выполнены теоретико-групповой анализ математической модели следа и автомодельная редукция уравнений модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. С использованием асимптотического разложения решения в окрестности особой точки построено приближенное решение соответствующей краевой задачи.

Ключевые слова: дальний плоский безымпурсный турбулентный след, теоретико-групповой анализ, приближенное решение

Введение. Экспериментальному исследованию плоских безымпурсных турбулентных следов посвящены работы [1–3]. Особенностью таких следов является то, что на расстоянии, равном нескольким десяткам диаметров тела, они становятся практически бессдвиговыми, поэтому влиянием дефекта продольной осредненной компоненты скорости на характер течения в дальних областях безымпурсных турбулентных следов можно пренебречь.

Теоретическое моделирование и численные расчеты безымпурсных турбулентных следов проведены в работах [1, 3–12]. Основанное на модели Роди [13] исследование динамики плоского безымпурсного турбулентного следа выполнено в [7, 10, 11]. Полученные результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными [2]. В [8] аналогичные расчеты проводились на основе математической модели, включающей уравнение переноса коэффициента перемежаемости; получены результаты, удовлетворительно согласующиеся с экспериментальными данными [2]. Теоретический и численный анализ автомодельности вырождения плоского безымпурсного турбулентного следа выполнен в [1, 4–6, 9–11].

Следует отметить работу [12], в которой установлено, что локально-равновесное приближение в задаче о плоском безымпурсном турбулентном следе является дифференциальной связью для модели замыкания третьего порядка.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 0287-2021-0002 и при поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Министерством науки и высшего образования РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2023-912).

В данной работе, являющейся продолжением работы [11], на основе асимптотического разложения решения в окрестности особой точки проводится построение приближенного решения рассматриваемой задачи.

1. Автомодельная редукция. Для описания течения в дальнем плоском безимпульсном турбулентном следе используется следующая математическая модель:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial y}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} - \varepsilon; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (3)$$

Здесь $U_1 = U_0 - U$ — дефект продольной осредненной компоненты скорости U ; U_0 — скорость невозмущенного потока; k, ε — кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации соответственно; $C_\mu = 0,25$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ — эмпирические постоянные модели. Заметим, что в данном случае значение эмпирической постоянной C_μ отличается от ее значения, принятого для двухпараметрической $(k-\varepsilon)$ -модели турбулентности, так как модель (1)–(3) получена в результате упрощения [11] более сложной алгебраической модели рейнольдсовых напряжений [13]. Ось Ox системы координат направлена вниз по течению и совпадает с осью симметрии тела, начало системы координат находится на задней кромке тела. Переменные задачи обезразмерены с использованием масштабов скорости U_0 и длины D (диаметр тела).

Для выполнения автомодельной редукции уравнений системы (1)–(3) проведем теоретико-групповой анализ [14]. Базис алгебры Ли модели (1)–(3) составляют следующие операторы:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial U_1}, & X_4 &= U_1 \frac{\partial}{\partial U_1}, \\ X_5 &= x \frac{\partial}{\partial x} - 2k \frac{\partial}{\partial k} - 3\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}, & X_6 &= y \frac{\partial}{\partial y} + 2k \frac{\partial}{\partial k} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}. \end{aligned}$$

Используя операторы растяжения X_4, X_5, X_6 , несложно получить автомодельное представление для решений уравнений модели (1)–(3)

$$U_1(x, y) = x^\beta U_2(t), \quad k(x, y) = x^{2\alpha-2} K(t), \quad \varepsilon(x, y) = x^{2\alpha-3} E(t), \quad t = y/x^\alpha, \quad (4)$$

позволяющее свести их к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$C_\mu \frac{K^2}{E} U_2'' + 2C_\mu \frac{K}{E} U_2' K' - C_\mu \frac{K^2}{E^2} U_2' E' + \alpha t U_2' - \beta U_2 = 0; \quad (5)$$

$$C_\mu \frac{K^2}{E} K'' + 2C_\mu \frac{K}{E} K'^2 - C_\mu \frac{K^2}{E^2} K' E' + \alpha t K' + 2(1 - \alpha) K - E = 0; \quad (6)$$

$$\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{K^2}{E} E'' + 2 \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{K}{E} K' E' - \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{K^2}{E^2} E'^2 + \alpha t E' + (3 - 2\alpha) E - C_{\varepsilon 2} \frac{E^2}{K} = 0. \quad (7)$$

Интегрируя уравнение (5) по независимой переменной в пределах от $-\infty$ до ∞ , получаем закон сохранения

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_2 dt = 0, \quad (8)$$

справедливый при условии $K^2 U_2' / E \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Для системы (5)–(7) ставятся следующие краевые условия:

$$U_2'(0) = K'(0) = E'(0) = 0; \quad (9)$$

$$U_2(a) = K(a) = E(a) = 0. \quad (10)$$

Условия (9) следуют из симметрии течения относительно оси Ox , условия (10) означают равенство нулю искомых функций в области вне турбулентного следа. Поскольку система (5)–(7) допускает операторы растяжения, координата точки a может быть выбрана произвольным образом. Далее полагается $a = 1$.

В работе [11] редуцированная система (5)–(7), удовлетворяющая условиям (9), (10), решалась численно с помощью метода стрельбы. Заметим, что в данной задаче имеет место автомодельность второго рода [15]. Для определения значения показателя автомодельности α в [9] решалась соответствующая нелинейная задача на собственные значения. В данной работе значения α и β определяются в ходе построения приближенного решения.

2. Приближенное решение. Для построения приближенного решения краевой задачи (5)–(7), (9), (10) при $t = 0$ будем соединять асимптотическое разложение решения системы (5)–(7) в окрестности особой точки $a = 1$

$$U_2 = u_1(1-t)^{10/7} + u_2(1-t)^{17/7} + u_3(1-t)^{20/7} + u_4(1-t)^{24/7} + \\ + u_5(1-t)^{27/7} + o(|1-t|^{27/7}); \quad (11)$$

$$K = k_1(1-t)^{10/7} + k_2(1-t)^{17/7} + k_3(1-t)^{20/7} + k_4(1-t)^{24/7} + \\ + k_5(1-t)^{27/7} + o(|1-t|^{27/7}); \quad (12)$$

$$E = e_1(1-t)^{13/7} + e_2(1-t)^{20/7} + e_3(1-t)^{23/7} + e_4(1-t)^{27/7} + \\ + e_5(1-t)^{30/7} + o(|1-t|^{30/7}) \quad (13)$$

с разложением решения системы уравнений (5)–(7) в точке $t = 0$ в степенной ряд, который с учетом условий (9) имеет следующий вид:

$$U_2 = U_0 + \alpha_2 t^2 + \alpha_4 t^4 + \alpha_6 t^6 + o(t^6); \quad (14)$$

$$K = K_0 + \beta_2 t^2 + \beta_4 t^4 + \beta_6 t^6 + o(t^6); \quad (15)$$

$$E = E_0 + \gamma_2 t^2 + \gamma_4 t^4 + \gamma_6 t^6 + o(t^6) \quad (16)$$

(выражения для коэффициентов степенных рядов (14)–(16) приведены в приложении).

Первые слагаемые асимптотического разложения (11)–(13) на границе турбулентного следа за буксируемым телом (в данном случае уравнения (2), (3) включают дополнительное слагаемое, порождающее энергию турбулентности)

$$U_2 = u_1(1-t)^{1/(2-\sigma_\varepsilon)} + o(|1-t|^{1/(2-\sigma_\varepsilon)}), \quad K = k_1(1-t)^{1/(2-\sigma_\varepsilon)} + o(|1-t|^{1/(2-\sigma_\varepsilon)}), \\ E = e_1(1-t)^{\sigma_\varepsilon/(2-\sigma_\varepsilon)} + o(|1-t|^{\sigma_\varepsilon/(2-\sigma_\varepsilon)})$$

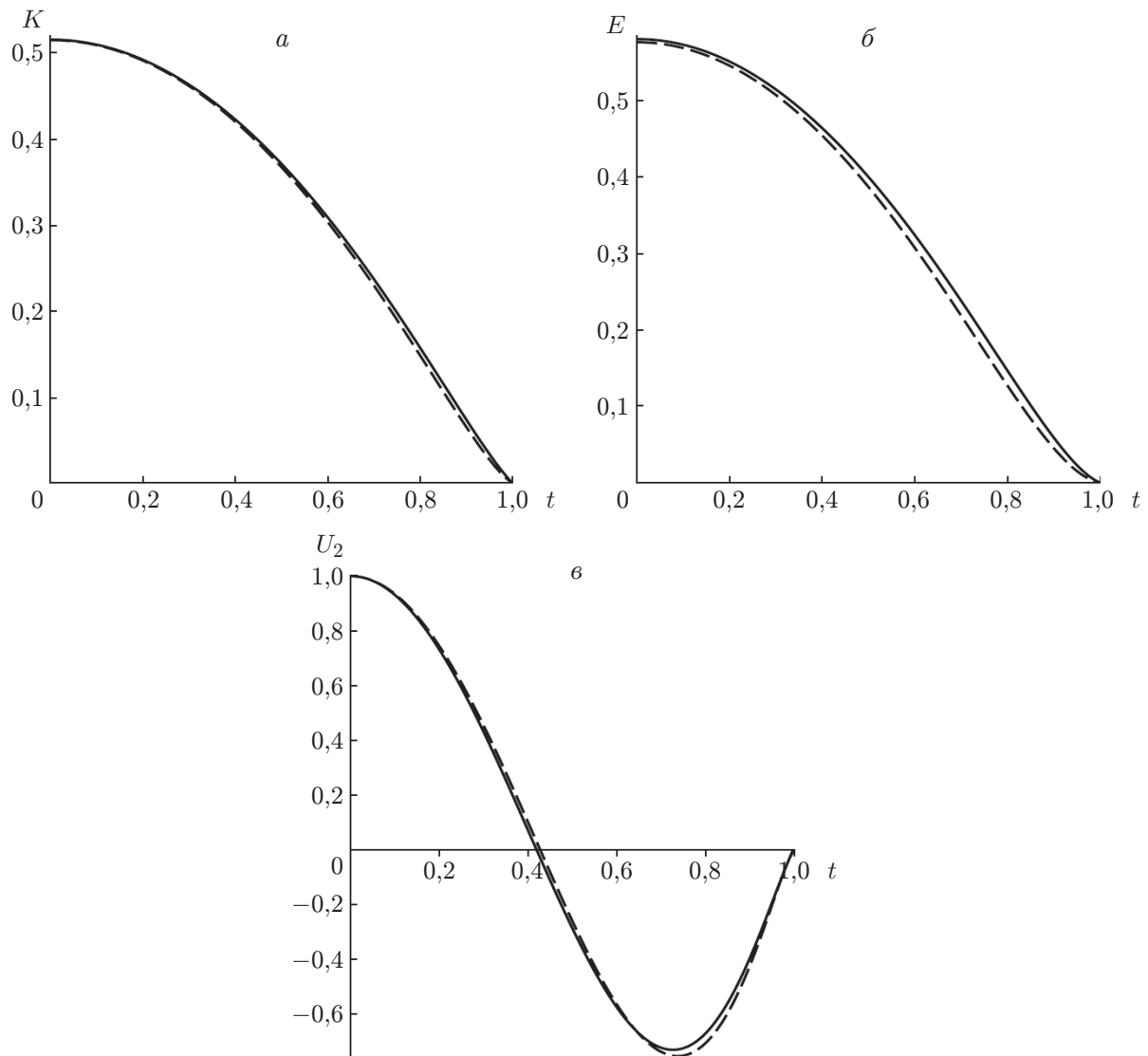
представлены в работах [16, 17]. В [17] полученное асимптотическое разложение использовалось для построения автомодельного решения с помощью модифицированного метода стрельбы.

Представляя (11)–(13) в виде степенного ряда (выражения для коэффициентов приведены в приложении) в окрестности точки $t = 0$:

$$U_2 = \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 t + \bar{\alpha}_2 t^2 + \bar{\alpha}_3 t^3 + \bar{\alpha}_4 t^4 + \bar{\alpha}_5 t^5 + \bar{\alpha}_6 t^6 + o(t^6); \quad (17)$$

$$K = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 t + \bar{\beta}_2 t^2 + \bar{\beta}_3 t^3 + \bar{\beta}_4 t^4 + \bar{\beta}_5 t^5 + \bar{\beta}_6 t^6 + o(t^6); \quad (18)$$

$$E = \bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_1 t + \bar{\gamma}_2 t^2 + \bar{\gamma}_3 t^3 + \bar{\gamma}_4 t^4 + \bar{\gamma}_5 t^5 + \bar{\gamma}_6 t^6 + o(t^6) \quad (19)$$



Приближенное (штриховые линии) и численное (сплошные линии) решения:
a — кинетическая энергия турбулентности K , *б* — скорость диссипации кинетической энергии E , *в* — дефект продольной осредненной компоненты скорости U_2

и требуя равенства коэффициентов при соответствующих степенях переменной t в (14)–(16) и в (17)–(19), получаем систему, включающую 21 алгебраическое уравнение для 20 неизвестных величин α , β , U_0 , K_0 , E_0 , u_i , k_i , e_i , $i = 1, 2, \dots, 5$. В дальнейших расчетах было отброшено уравнение, полученное для функции E при t^6 . Система алгебраических уравнений решалась численно.

Описанная процедура применялась к уравнениям (6), (7) для вычисления значений показателя автомодельности $\alpha = 0,306\,879\,037\,8$, коэффициентов рядов (15), (16) $K_0 = 0,515\,429\,302\,0$, $E_0 = 0,576\,496\,969\,8$, коэффициентов асимптотического разложения (12), (13) $k_1 = 2,031\,304\,888$, $k_2 = -5,188\,164\,727$, $k_3 = 5,536\,417\,877$, $k_4 = -2,496\,289\,945$, $k_5 = 0,632\,161\,209\,1$, $e_1 = 4,017\,491\,301$, $e_2 = -15,770\,272\,83$, $e_3 = 19,236\,160\,81$, $e_4 = -9,317\,613\,445$, $e_5 = 2,410\,731\,134$. Указанные значения определялись однозначно с учетом (9), (10) и условий

$$\alpha > 0, \quad K_0 > 0, \quad E_0 > 0, \quad K'(t) < 0, \quad E'(t) < 0, \quad t \in (0, 1).$$

Аналогичным образом рассматривалось уравнение (5) и определялись значения $\beta = -1,773\,761\,627$, $u_1 = -17,817\,144\,31$, $u_2 = 107,158\,013\,3$, $u_3 = -116,779\,035\,7$, $u_4 = 25,254\,856\,71$, $u_5 = 3,183\,310\,011$. Значение U_0 может быть задано произвольным образом, так как уравнение (5) допускает оператор растяжения по U_2 . Далее полагалось $U_0 = 1$.

Полученные значения α , K_0 , E_0 использовались в качестве данных для пристрелки при решении краевой задачи (5)–(7), (9), (10) методом стрельбы. В результате численных расчетов найдены значения $K_0 = 0,515\,922\,586\,0$, $E_0 = 0,580\,539\,510\,7$, $\beta = -1,623$. Сопоставление приближенного и численного решений показало, что их разность не превышает 4 % (см. рисунок). При построении приближенного решения для дефекта продольной осредненной компоненты скорости U_1 с целью повышения точности алгебраическое уравнение (11) для определения коэффициентов асимптотического разложения было заменено на интегральное соотношение (8).

Таким образом, на больших расстояниях от тела течение в дальнем плоском безимпульсном турбулентном следе характеризуется следующими законами вырождения: $U_1(x, 0) \sim x^{-1,623}$, $k(x, 0) \sim x^{-1,386}$, $\varepsilon(x, 0) \sim x^{-2,386}$, $l \sim x^{0,307}$. Полученные законы согласуются с представленными в работах [3, 9, 11].

Заключение. В работе с использованием асимптотического разложения решения в окрестности особой точки построено приближенное решение для полуэмпирической модели дальнего плоского безимпульсного турбулентного следа и получено значение показателя автомодельности. Полученные законы атомодельного вырождения согласуются с известными экспериментальными данными.

Приложение. Выражения для коэффициентов разложения в формулах (14)–(16) имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{2\beta U_0 E_0}{K_0^2}, & \alpha_4 &= \frac{\beta U_0 E_0^2}{5K_0^4} \left(\frac{124E_0}{25K_0} - \frac{62\alpha - 10\beta}{3} + 1 \right), \\ \alpha_6 &= -\frac{2\beta U_0 E_0^3}{75K_0^6} + \left(\frac{13\,004E_0^3}{125K_0^2} + \frac{2E_0}{75K_0} (14\,786\alpha - 806\beta - 14\,119) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1302\alpha^2 - 242\beta\alpha + 10\beta^2 + 419\alpha + 13\beta - 718}{3} \right), \\ \beta_2 &= \frac{2E_0}{K_0^2} (2K_0(\alpha - 1) + E_0), \\ \beta_4 &= \frac{2E_0^2}{K_0^3} \left(\frac{166E_0^2}{125K_0^2} + \frac{4E_0}{375K_0} (43\alpha - 268) - (42\alpha + 17)(\alpha - 1) \right), \\ \beta_6 &= \frac{2E_0^3}{25K_0^5} \left(-\frac{10\,732E_0^3}{1875K_0^3} - \frac{4E_0^2}{125K_0^2} (6718\alpha - 3867) - \frac{E_0}{225K_0} (44\,376\alpha^2 - 140\,654\alpha + 63\,143) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(\alpha - 1)}{9} (858\alpha^2 + 849\alpha - 704) \right), \\ \gamma_2 &= \frac{13E_0^2}{5K_0^2} \left(\frac{48E_0}{25K_0} + 2\alpha - 3 \right), \\ \gamma_4 &= \frac{13E_0^3}{25K_0^4} \left(\frac{2192E_0^2}{125K_0^2} + \frac{2E_0}{25K_0} (22\alpha - 469) - (7\alpha + 6)(2\alpha - 3) \right),\end{aligned}$$

$$\gamma_6 = \frac{13E_0^4}{1875K_0^6} \left(\frac{12\,695\,488E_0^3}{15\,625K_0^3} - \frac{4E_0^2}{625K_0^2} (885\,246\alpha - 60\,805) - \right. \\ \left. - \frac{4E_0}{75K_0} (52\,076\alpha^2 - 279\,200\alpha + 81\,417) + \frac{2\alpha - 3}{3} (4416\alpha^2 + 6272\alpha - 3083) \right),$$

выражения для коэффициентов степенных рядов в формулах (17)–(19) — вид

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5, \\ \bar{\alpha}_1 &= -(10u_1 + 17u_2 + 20u_3 + 24u_4 + 27u_5)/7, \\ \bar{\alpha}_2 &= (15u_1 + 85u_2 + 130u_3 + 204u_4 + 270u_5)/49, \\ \bar{\alpha}_3 &= (20u_1 - 85u_2 - 260u_3 - 680u_4 - 1170u_5)/343, \\ \bar{\alpha}_4 &= (55u_1 - 85u_2 - 65u_3 + 510u_4 + 1755u_5)/2401, \\ \bar{\alpha}_5 &= (198u_1 - 187u_2 - 104u_3 + 408u_4 + 351u_5)/16\,807, \\ \bar{\alpha}_6 &= (825u_1 - 561u_2 - 260u_3 + 748u_4 + 468u_5)/117\,649, \\ \bar{\beta}_0 &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5, \\ \bar{\beta}_1 &= -(10k_1 + 17k_2 + 20k_3 + 24k_4 + 27k_5)/7, \\ \bar{\beta}_2 &= (15k_1 + 85k_2 + 130k_3 + 204k_4 + 270k_5)/49, \\ \bar{\beta}_3 &= (20k_1 - 85k_2 - 260k_3 - 680k_4 - 1170k_5)/343, \\ \bar{\beta}_4 &= (55k_1 - 85k_2 - 65k_3 + 510k_4 + 1755k_5)/2401, \\ \bar{\beta}_5 &= (198k_1 - 187k_2 - 104k_3 + 408k_4 + 351k_5)/16\,807, \\ \bar{\beta}_6 &= (825k_1 - 561k_2 - 260k_3 + 748k_4 + 468k_5)/117\,649, \\ \bar{\gamma}_0 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, \\ \bar{\gamma}_1 &= -(13e_1 + 20e_2 + 23e_3 + 27e_4 + 30e_5)/7, \\ \bar{\gamma}_2 &= (39e_1 + 130e_2 + 184e_3 + 270e_4 + 345e_5)/49, \\ \bar{\gamma}_3 &= (13e_1 - 260e_2 - 552e_3 - 1170e_4 - 1840e_5)/343, \\ \bar{\gamma}_4 &= (26e_1 - 65e_2 + 276e_3 + 1755e_4 + 4140e_5)/2401, \\ \bar{\gamma}_5 &= (78e_1 - 104e_2 + 276e_3 + 351e_4 + 1656e_5)/16\,807, \\ \bar{\gamma}_6 &= (286e_1 - 260e_2 + 552e_3 + 468e_4 - 1380e_5)/117\,649. \end{aligned}$$

Автор выражает благодарность О. В. Капцову и Г. Г. Черных за внимание к работе и ценные замечания, способствовавшие ее улучшению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969.
2. Cimbala J., Park W. An experimental investigation of the turbulent structure in a two-dimensional momentumless wake // J. Fluid Mech. 1990. V. 213. P. 479–509.
3. Cherepanov P. Y., Babenko V. A. Experimental and numerical study of flat momentumless wake // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1998. V. 19. P. 608–622.
4. Биркгоф Г. Струи, следы, каверны / Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло. М.: Мир, 1964.

5. **Сабельников В. А.** О некоторых особенностях турбулентных течений с нулевым избыточным импульсом // Учен. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та. 1975. Т. 6, № 4. С. 71–74.
6. **Городцов В. А.** Автомодельность и слабые замыкающие соотношения для симметричной свободной турбулентности // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 1. С. 43–50.
7. **Федорова Н. Н., Черных Г. Г.** О численном моделировании плоских турбулентных следов // Мат. моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 24–34.
8. **Ahn J. W., Sung H. J.** Prediction of two-dimensional momentumless wake by $k-\varepsilon-\gamma$ model // AIAA J. 1995. V. 33, N 4. P. 611–617.
9. **Maderich V., Konstantinov S.** Asymptotic and numerical analysis of momentumless turbulent wakes // Fluid Dynamics Res. 2010. V. 42, N 42. 045503.
10. **Деменков А. Г., Черных Г. Г.** Математическое моделирование турбулентных следов с варьируемым суммарным избыточным импульсом // Вычисл. технологии. 2015. Т. 20, № 4. С. 29–44.
11. **Chernykh G. G., Demenkov A. G., Kaptsov O. V., Schmidt A. V.** On self-similar decay of a plane momentumless turbulent wake // J. Engng Thermophys. 2021. V. 30, N 3. P. 672–678.
12. **Гребенев В. Н., Деменков А. Г., Черных Г. Г.** Метод дифференциальных связей: локально-равновесное приближение в безимпульсном плоском турбулентном следе // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 3. С. 38–47.
13. **Rodi W.** Turbulence models and their application in hydraulics: A state of the art review. Karlsruhe: Univ. of Karlsruhe, 1980.
14. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
15. **Баренблатт Г. И.** Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометеиздат, 1982.
16. **Wilcox D. C.** Turbulence modeling for CFD. La Cafiada: DCW Industr. Inc., 1993.
17. **Капцов О. В., Шанько Ю. В.** Семейство автомодельных решений одной модели дальнего турбулентного следа // Тр. междунар. конф. “Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании”, Павлодар (Казахстан), 20–22 сент. 2006 г. Павлодар: Б. и., 2006. Т. 1. С. 576–579.

*Поступила в редакцию 8/IX 2022 г.,
после доработки — 4/V 2023 г.
Принята к публикации 29/V 2023 г.*
