

УДК 539.3:534.26

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ПОКРЫТИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА С ЗАДАНЫМИ ЗВУКООТРАЖАЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ

Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин, С. А. Скобельцын

Тульский государственный университет, 300012 Тула, Россия
E-mails: tolokonnikovla@mail.ru, larinaelen@mail.ru, skbl@rambler.ru

Рассматривается обратная задача об определении законов неоднородности покрытия упругого цилиндра, обеспечивающих наименьшее отражение плоской звуковой волны в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. На основе решения прямой задачи построен функционал, выражающий интенсивность отражения, и предложен алгоритм его минимизации. Получены аналитические выражения, описывающие механические параметры неоднородного покрытия.

Ключевые слова: отражение звука, упругий цилиндр, неоднородный упругий слой, законы неоднородности.

DOI: 10.15372/PMTF20170419

Введение. Звукоотражающие характеристики тел можно изменять с помощью покрытия в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя. Рассеяние звуковых волн плоскими, цилиндрическими и сферическими упругими телами с неоднородными по толщине покрытиями исследовалось в работах [1–5]. Неоднородное покрытие можно реализовать с помощью многослойной системы тонких однородных упругих слоев, имеющих разные значения механических параметров (плотности и упругих постоянных) [6].

Возникает проблема определения законов неоднородности материала покрытия по известному рассеянному акустическому полю. В настоящее время решен ряд обратных задач по реконструкции неоднородных упругих свойств непрерывно-слоистых сред (см., например, [7–12]). Актуальность задач восстановления свойств неоднородных материалов обусловлена широким использованием новых функционально-градиентных материалов, свойства которых непрерывны или кусочно-непрерывны по толщине. В известных работах, посвященных решению обратных задач, для нахождения параметров или функций, характеризующих неоднородность, проводится сравнение теоретических и измеряемых величин в некоторой области. Задача идентификации сводится к процедуре минимизации функционала невязки, который характеризует отклонение расчетных (теоретических) значений, полученных на основе решений прямых задач, от экспериментальных данных. В работах [13, 14] линейные законы неоднородности плоского и цилиндрического упругих слоев

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Тульской области (код проекта 16-41-710083) и Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 1.1333.2014К).

определяются при выполнении заданных условий, а именно условия наименьшего звукоотражения в определенном направлении.

В настоящей работе определяются параболические законы неоднородности покрытия упругого цилиндра, обеспечивающие минимальное звукоотражение в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный однородный упругий цилиндр радиусом r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя, внешний радиус которого равен r_1 . Цилиндрическая система координат (r, φ, z) выбрана таким образом, что координатная ось z является осью вращения цилиндра. Полагаем, что плотность ρ материала покрытия описывается непрерывной функцией радиальной координаты r , а модули упругости λ и μ — дифференцируемыми функциями координаты r : $\rho = \rho(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$. Окружающая цилиндр жидкость является идеальной, ее плотность и скорость распространения звука в ней соответственно равны ρ_1 и c .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_0 = A \exp \{ ik[r \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + z \cos \theta_0] - i\omega t \}.$$

Здесь A — амплитуда волны; $k = \omega/c$ — волновое число во внешней области; ω — круговая частота; θ_0, φ_0 — полярный и азимутальный углы падения волны; t — время. Далее временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Потенциал скоростей рассеянной волны Ψ_s записывается в виде [3]

$$\Psi_s(r, \varphi, z) = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(\beta r) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \quad (1.1)$$

где $H_n(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $\alpha = k \cos \theta_0$; $\beta = k \sin \theta_0$.

Вектор смещения частиц упругого изотропного однородного цилиндра $\mathbf{u}^{(0)}$ представляется в виде [3]

$$\mathbf{u}^{(0)} = \text{grad } \Psi^{(0)} + \text{rot } \Phi, \quad \Phi = \text{rot}(L\mathbf{e}_z) + k_\tau M\mathbf{e}_z,$$

где

$$\Psi^{(0)}(r, \varphi, z) = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_1 r) e^{in(\varphi - \varphi_0)},$$

$$L(r, \varphi, z) = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(k_2 r) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \quad M(r, \varphi, z) = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n J_n(k_2 r) e^{in(\varphi - \varphi_0)},$$

$\Psi^{(0)}$, Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения; L , M — скалярные функции пространственных координат r, φ, z ; \mathbf{e}_z — единичный вектор оси z ; $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $k_1 = \sqrt{k_l^2 - \alpha^2}$; $k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - \alpha^2}$; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Выражения для компонент вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом покрытии записываются в виде [3]

$$u_r(r, \varphi, z) = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{1n}(r) e^{in(\varphi - \varphi_0)},$$

$$u_\varphi(r, \varphi, z) = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{2n}(r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad u_z(r, \varphi, z) = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{3n}(r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}.$$

Функции $u_{jn}(r)$ ($j = 1, 2, 3$) являются решением системы линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [3]:

$$\hat{A}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{B}_n \mathbf{U}_n' + \hat{C}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad \mathbf{U}_n = (u_{1n}, u_{2n}, u_{3n})^T. \quad (1.2)$$

Выражения для элементов матриц третьего порядка $\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_n$ имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n11} &= (\lambda + 2\mu)r^2, & \hat{a}_{n22} &= \hat{a}_{n33} = \mu r^2, & \hat{a}_{nij} &= 0 \quad (i \neq j), \\ \hat{b}_{n11} &= (\lambda' + 2\mu')r^2 + (\lambda + 2\mu)r, & \hat{b}_{n12} &= in(\lambda + \mu)r, & \hat{b}_{n13} &= i\alpha(\lambda + \mu)r^2, \\ \hat{b}_{n21} &= in(\lambda + \mu)r, & \hat{b}_{n22} &= \mu' r^2 + \mu r, & \hat{b}_{n23} &= 0, \\ \hat{b}_{n31} &= i\alpha(\lambda + \mu)r^2, & \hat{b}_{n32} &= 0, & \hat{b}_{n33} &= \mu' r^2 + \mu r, \\ \hat{c}_{n11} &= \lambda' r - \lambda - (n^2 + 2 + \alpha^2 r^2)\mu + \omega^2 \rho r^2, \\ \hat{c}_{n12} &= in(\lambda' r - \lambda - 3\mu), & \hat{c}_{n13} &= i\alpha \lambda' r^2, & \hat{c}_{n21} &= in(\mu' r + \lambda + 3\mu), \\ \hat{c}_{n22} &= -\mu' r - n^2 \lambda - (2n^2 + \alpha^2 r^2 + 1)\mu + \omega^2 \rho r^2, & \hat{c}_{n23} &= -n\alpha(\lambda + \mu)r, \\ \hat{c}_{n31} &= i\alpha[\mu' r^2 + (\lambda + \mu)r], & \hat{c}_{n32} &= -n\alpha(\lambda + \mu)r, \\ \hat{c}_{n33} &= -(n^2 + 2\alpha^2 r^2)\mu - \alpha^2 \lambda r^2 + \omega^2 \rho r^2. \end{aligned}$$

Граничными условиями на внешней поверхности покрытия являются равенство нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенство на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствие касательных напряжений. При переходе через границу раздела упругих сред компоненты вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения должны быть непрерывны.

Из граничных условий находятся выражения для коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n [3]:

$$A_n = -\frac{Ai^n \beta J_n'(\beta r_1) + i\omega u_{1n}(r_1)}{\beta H_n'(\beta r_1)}, \quad B_n = [b_{1n} u_{1n}(r_0) + b_{2n} u_{2n}(r_0) + b_{3n} u_{3n}(r_0)] q_n^{-1},$$

$C_n = [c_{1n} u_{1n}(r_0) + c_{2n} u_{2n}(r_0) + c_{3n} u_{3n}(r_0)] q_n^{-1}$, $D_n = [d_{1n} u_{1n}(r_0) + d_{2n} u_{2n}(r_0) + d_{3n} u_{3n}(r_0)] q_n^{-1}$ и краевые условия для системы (1.2)

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{A}_n \mathbf{U}_n' + \hat{E}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_1} = \hat{D}_n, \quad \left(\frac{1}{r^2} \hat{A}_n \mathbf{U}_n' + \hat{G}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (1.3)$$

Выражения для элементов матриц \hat{E}_n, \hat{G}_n и вектор-столбца \hat{D}_n имеют вид

$$\hat{e}_{n11} = \frac{\lambda}{r} + \frac{\omega^2 \rho_1 H_n(\beta r)}{\beta H_n'(\beta r)}, \quad \hat{e}_{n12} = \frac{in\lambda}{r}, \quad \hat{e}_{n13} = i\alpha\lambda,$$

$$\hat{e}_{n21} = \frac{in\mu}{r}, \quad \hat{e}_{n22} = -\frac{\mu}{r}, \quad \hat{e}_{n31} = i\alpha\mu, \quad \hat{e}_{n23} = \hat{e}_{n32} = \hat{e}_{n33} = 0,$$

$$\hat{g}_{n11} = \frac{\lambda}{r} - (\gamma_{1n} b_{1n} + \gamma_{2n} c_{1n} + \gamma_{3n} d_{1n}) q_n^{-1}, \quad \hat{g}_{n12} = \frac{in\lambda}{r} - (\gamma_{1n} b_{2n} + \gamma_{2n} c_{2n} + \gamma_{3n} d_{2n}) q_n^{-1},$$

$$\hat{g}_{n13} = i\alpha\lambda - (\gamma_{1n} b_{3n} + \gamma_{2n} c_{3n} + \gamma_{3n} d_{3n}) q_n^{-1}, \quad \hat{g}_{n21} = \frac{in\mu}{r} - (\gamma_{4n} b_{1n} + \gamma_{5n} c_{1n} + \gamma_{6n} d_{1n}) q_n^{-1},$$

$$\hat{g}_{n22} = -\frac{\mu}{r} - (\gamma_{4n} b_{2n} + \gamma_{5n} c_{2n} + \gamma_{6n} d_{2n}) q_n^{-1}, \quad \hat{g}_{n23} = -(\gamma_{4n} b_{3n} + \gamma_{5n} c_{3n} + \gamma_{6n} d_{3n}) q_n^{-1},$$

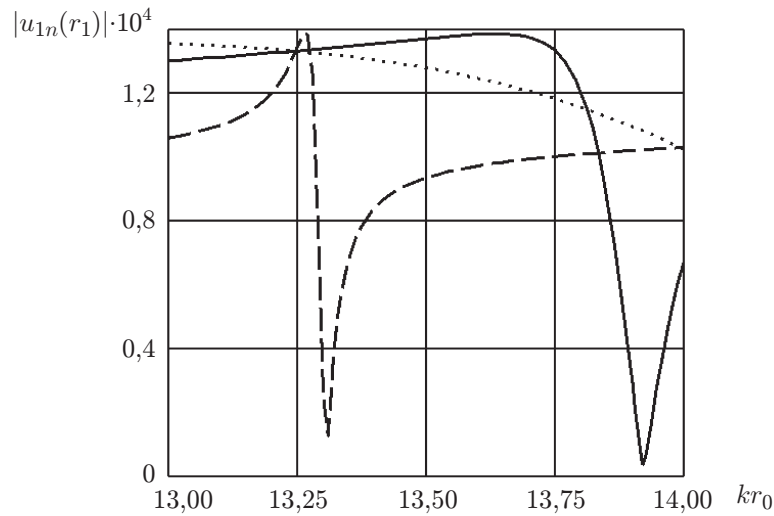


Рис. 1. Зависимость $|u_{1n}(r_1)|$ от kr_0 :
сплошная линия — $n = 1$, штриховая — $n = 3$, пунктирная — $n = 6$

$$\begin{aligned}\hat{g}_{n31} &= i\alpha\mu - (\gamma_{7n}b_{1n} + \gamma_{8n}c_{1n} + \gamma_{9n}d_{1n})q_n^{-1}, & \hat{g}_{n32} &= -(\gamma_{7n}b_{2n} + \gamma_{8n}c_{2n} + \gamma_{9n}d_{2n})q_n^{-1}, \\ \hat{g}_{n33} &= -(\gamma_{7n}b_{3n} + \gamma_{8n}c_{3n} + \gamma_{9n}d_{3n})q_n^{-1}, \\ \hat{d}_{n1} &= \frac{2i^n A\omega\rho_1}{\pi\beta r H'_n(\beta r)}, & \hat{d}_{n2} &= \hat{d}_{n3} = 0.\end{aligned}$$

Выражения для величин b_{in} , c_{in} , d_{in} ($i = 1, 2, 3$), q_n и γ_{jn} ($j = 1, 2, \dots, 9$) приведены в [3].

Линейная краевая задача (1.2), (1.3) решена методом сплайн-коллокации. На отрезке $[r_0, r_1]$ введена равномерная сетка. Решение краевой задачи ищется в виде трех кубических сплайнов дефекта 1 с узлами на введенной сетке, приближающих функции $u_{1n}(r)$, $u_{2n}(r)$, $u_{3n}(r)$ соответственно. Сплайны представляются в виде разложений по базису из нормализованных кубических B -сплайнов. Полагалось, что искомые сплайны удовлетворяют системе (1.2) и краевым условиям (1.3) в узлах коллокации, совпадающих с узлами сетки. Для контроля точности приближенного решения краевой задачи (для каждого значения n) расчеты проводились на сгущающихся сетках, причем каждая следующая сетка была в два раза мельче предыдущей. Вычисления заканчивались, когда значения $|u_{jn}(r_m)|$ ($j = 1, 2, 3$, $m = 0, 1$) на последней паре сеток различались по абсолютной величине не более чем на 10^{-7} .

На рис. 1 представлены зависимости $|u_{1n}(r_1)|$ от волнового размера цилиндра в интервале $13 \leq kr_0 \leq 14$ при различных значениях n . Физико-механические параметры материалов, используемые в расчетах, приведены в п. 3.

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическую формулу для цилиндрической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента ($\beta r \gg 1$)

$$H_n(\beta r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}} \exp \left[i \left(\beta r - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

из (1.1) находим

$$\Psi_s = A \sqrt{\frac{r_0}{2r}} \exp \left[i \left(\alpha z + \beta r - \frac{\pi}{4} \right) \right] F,$$

где

$$F = \frac{2}{A\sqrt{\pi}\beta r_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (1.4)$$

На основе решения прямой задачи определим законы неоднородности материала покрытия, для которых осредненное значение интенсивности рассеяния в заданном диапазоне частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ при фиксированном угле наблюдения φ , равном φ_* , а также в заданном угловом секторе наблюдения $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ при фиксированной частоте ω_* будет наименьшим.

2. Определение законов неоднородности покрытия. Будем считать, что функции $\rho(r)$, $\lambda(r)$ и $\mu(r)$ аппроксимированы многочленами второй степени относительно переменной r , т. е. будем рассматривать следующие параболические законы неоднородности материала покрытия:

$$\rho(r) = \rho^0 \rho^*(r), \quad \lambda(r) = \lambda^0 \lambda^*(r), \quad \mu(r) = \mu^0 \mu^*(r). \quad (2.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \rho^*(r) &= \rho^{(0)} + \rho^{(1)}r + \rho^{(2)}r^2, & \lambda^*(r) &= \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}r + \lambda^{(2)}r^2, \\ \mu^*(r) &= \mu^{(0)} + \mu^{(1)}r + \mu^{(2)}r^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

ρ^0 , λ^0 , μ^0 — характерные величины, определяющие механические свойства материала покрытия.

Построим функционалы Φ_1 и Φ_2 вида

$$\Phi_1[\rho, \lambda, \mu] = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega, \varphi_*)|^2 d\omega; \quad (2.3)$$

$$\Phi_2[\rho, \lambda, \mu] = \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |F(\omega_*, \varphi)|^2 d\varphi, \quad (2.4)$$

определенные на классе параболических функций $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$ и представляющие собой осредненные интенсивности рассеяния звука в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения соответственно.

Для каждого функционала найдем значения коэффициентов $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$) функций (2.1), при которых он достигает минимального значения.

Для функций (2.2), определенных на отрезке $[r_0, r_1]$, введем ограничения

$$\alpha_0 \leq \rho^*(r) \leq \alpha_1, \quad \beta_0 \leq \lambda^*(r) \leq \beta_1, \quad \gamma_0 \leq \mu^*(r) \leq \gamma_1, \quad (2.5)$$

где α_j , β_j , γ_j ($j = 0, 1$) — некоторые положительные константы.

Каждое неравенство в (2.5) вида $b_0 \leq f(r) \leq b_1$, где

$$f(r) = a^{(0)} + a^{(1)}r + a^{(2)}r^2, \quad (2.6)$$

задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс r и осью ординат f бесконечное множество кривых, лежащих в прямоугольной области

$$\Omega(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}) = \{(r, f): r_0 \leq r \leq r_1, b_0 \leq f \leq b_1\},$$

показанной на рис. 2. Под тройкой коэффициентов $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)})$ понимается каждая из троек $(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$; b_0 , b_1 — соответствующие границы.

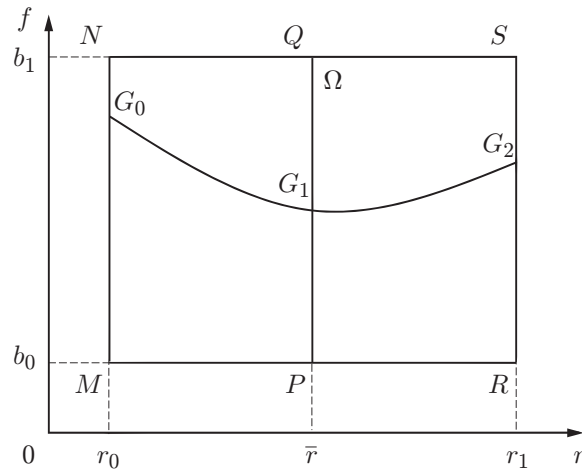


Рис. 2. Область $\Omega(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}) = \{(r, f): r_0 \leq r \leq r_1, b_0 \leq f \leq b_1\}$

В области Ω каждая парабола $f(r)$ единственным образом определяется тремя точками $G_0(r_0, f_0)$, $G_1(\bar{r}, f_1)$, $G_2(r_1, f_2)$, где $\bar{r} = (r_0 + r_1)/2$; $f_q \in [b_0, b_1]$ ($q = 0, 1, 2$).

Подставляя координаты точек G_0 , G_1 , G_2 в выражение (2.6), получаем систему трех линейных уравнений. Решая полученную систему относительно коэффициентов $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, находим

$$\mathbf{a} = R^{-1} \mathbf{f}, \quad (2.7)$$

где

$$\mathbf{a} = (a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)})^T, \quad \mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2)^T, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & r_0 & r_0^2 \\ 1 & \bar{r} & \bar{r}^2 \\ 1 & r_1 & r_1^2 \end{pmatrix}.$$

Выбирая на отрезке $[b_0, b_1]$ значения ординат f_0 , f_1 , f_2 и вычисляя с помощью соотношений (2.7) значения коэффициентов $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, получаем параболические (линейные при $a^{(2)} = 0$) законы неоднородности материала покрытия. Если выполняется условие

$$r_0 \leq -\frac{a^{(1)}}{2a^{(2)}} \leq r_1, \quad (2.8)$$

то абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку $[r_0, r_1]$. В этом случае параболу следует рассматривать в качестве закона неоднородности материала покрытия только тогда, когда ордината ее вершины принадлежит отрезку $[b_0, b_1]$, т. е. когда выполняется условие

$$b_0 \leq a^{(0)} - \frac{a^{(1)2}}{4a^{(2)}} \leq b_1. \quad (2.9)$$

Неизвестные значения параметров $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$) функций (2.2), удовлетворяющих условиям (2.5) и минимизирующих функцию девяти переменных:

$$\Phi_m(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}) \rightarrow \min \quad (m = 1, 2), \quad (2.10)$$

найдем с помощью следующего алгоритма.

Разобьем отрезки MN , PQ и RS в области Ω соответственно на n_0 , n_1 и n_2 равных частей, т. е. на отрезке $[b_0, b_1]$ построим три равномерные сетки с узлами

$$f_q^{(lq)} = b_0 + l_q h_q \quad (q = 0, 1, 2). \quad (2.11)$$

Здесь $l_q = 0, 1, \dots, n_q$ — номер узла; $h_q = (b_1 - b_0)/n_q$ — шаг q -й сетки.

Используя выражения для коэффициентов $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ (2.7) и условия (2.8), (2.9), вычислим коэффициенты $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, которые определяют зависимости (2.6) для законов неоднородности материала покрытия.

Введем сетки (2.11) для каждой из трех областей $\Omega(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $\Omega(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $\Omega(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$. На этих сетках получаем наборы значений коэффициентов $(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$.

Оптимальный набор параметров $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$) определяется с помощью процедуры поиска минимума функции многих переменных (2.10). Вычислительный алгоритм представляет собой комбинацию методов случайного поиска и покоординатного спуска [15] и включает два этапа. При этом в качестве девяти искомым координат используются не сами параметры $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$, а соответствующие им наборы величин f_0 , f_1 , f_2 в выражениях (2.7).

На первом этапе из множества допустимых дискретных сочетаний на введенной сетке случайным образом выбирается начальная точка — совокупность девяти значений

$$\mathbf{f}^0 = (f_{0\rho}, f_{1\rho}, f_{2\rho}, f_{0\lambda}, f_{1\lambda}, f_{2\lambda}, f_{0\mu}, f_{1\mu}, f_{2\mu}).$$

На втором этапе случайным образом выбирается одна из координат и осуществляется поиск минимума Φ_m ($m = 1, 2$) при изменении значений этой координаты во всех возможных узлах с номерами l_q . При этом значения восьми других координат не меняются. Интегралы (2.3), (2.4) вычисляются численно. Процедура случайного выбора координат повторяется до тех пор, пока не будут осуществлен поиск по всем координатам. По окончании второго этапа получаем значение локального минимума функции Φ_m и соответствующий набор координат \mathbf{f}^0 , по которому с помощью формул (2.7) вычисляются искомые параметры $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$.

Поскольку в общем случае функция Φ_m не является унимодальной, ее локальный минимум и соответствующий ему набор материальных параметров зависят и от выбора начальной точки, и от порядка перебора координат при покоординатном спуске. Поэтому процедура поиска локального минимума повторяется N раз. В качестве конечного решения выбирается набор параметров $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$, обеспечивающий наименьшее значение Φ_m среди локальных решений. Получаемое таким образом оптимальное решение является приближенным, точность которого зависит от выбора шага сетки h_q и числа N .

3. Результаты расчетов. Проведены расчеты параметров в законах неоднородности покрытия цилиндра (2.1), обеспечивающих наименьшее рассеяние звука. При реализации предложенного алгоритма рассматривался однородный цилиндр радиусом $r_0 = 1$ м с плотностью $\rho_0 = 2700$ кг/м³ и модулями упругости $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м² (алюминий). Полагалось, что неоднородное покрытие имеет внешний радиус $r_1 = 1,1$ м, характерную плотность $\rho^0 = 1070$ кг/м³, характерные модули упругости $\lambda^0 = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль). Цилиндр с покрытием находится в воде ($\rho_1 = 1000$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Плоская звуковая волна единичной амплитуды падает перпендикулярно оси цилиндра ($\theta_0 = \pi/2$) в направлении $\varphi_0 = 0$.

В расчетах полагалось, что $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0,5$, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1,5$. Такие значения соответствуют широкому диапазону значений функций $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$, в котором максимально допустимые значения функций в три раза больше минимально допустимых значений.

При суммировании ряда (1.4) индекс n изменялся от $-N_0$ до N_0 , где $N_0 = 2[kr_0]$; $[\cdot]$ — целая часть числа. При этом достигалась заданная точность (при $|n| \geq N_0$ $|A_n| < 10^{-5}$).

Значения оптимальных параметров $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$), обеспечивающие наименьшую интенсивность рассеяния звука цилиндром с покрытием при отражении ($\varphi_* = \pi$) в частотном диапазоне, который определяется изменением волнового размера цилиндра

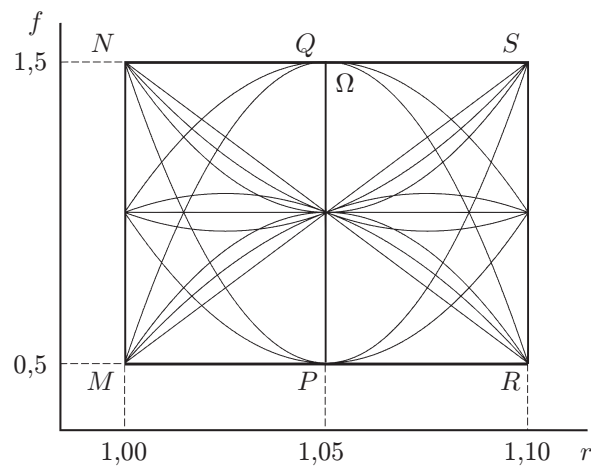


Рис. 3. Допустимые параболические зависимости $f(r)$

в интервале $13 \leq kr_0 \leq 14$, равны $(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}) = (11,5, -10, 0)$, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = (0,5, 0, 0)$, $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}) = (441,5, -840, 400)$, $\Phi_1 = 0,655$. При этом в каждой из трех областей $\Omega(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $\Omega(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $\Omega(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$ введены сетки (2.11) с одинаковыми шагами $h_0 = h_1 = h_2 = 0,5$. Рассчитанные на этих сетках тройки коэффициентов определяют в каждой из областей все допустимые функции (2.2) для законов неоднородности материала покрытия (рис. 3). В соответствии с изложенным выше алгоритмом из этих законов выбираются такие законы, которым соответствует минимальное значение Φ_1 . Минимальному значению $\Phi_1 = 0,655$, найденному при $N = 63$, соответствует покрытие со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 1070(11,5 - 10r), & \lambda(r) &= 3,9 \cdot 10^9 \cdot 0,5, \\ \mu(r) &= 9,8 \cdot 10^8(441,5 - 840r + 400r^2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для случая фиксированной частоты ω_* , которой соответствует волновой размер цилиндра $kr_0 = 13$, получены следующие результаты: $(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}) = (-9,5, 10, 0)$, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = (-114,5, 215, -100)$, $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}) = (1,5, 0, 0)$, $\Phi_2 = 0,715$. При этом угол наблюдения изменялся в интервале $3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi$. Зависимости (2.2), для которых осуществлялся поиск минимума функционала Φ_2 , приведены на рис. 3. Наименьшая интенсивность рассеяния звука при $\Phi_2 = 0,715$ достигается при следующих законах неоднородности:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 1070(-9,5 + 10r), & \lambda(r) &= 3,9 \cdot 10^9(-114,5 + 215r - 100r^2), \\ \mu(r) &= 9,8 \cdot 10^8 \cdot 1,5. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для оценки влияния неоднородного покрытия на рассеяние звука цилиндром вычислены значения Φ_1 и Φ_2 для цилиндра без покрытия, которые оказались равными 0,908 и 0,880 соответственно. Результаты сравнения значений интегральных характеристик рассеяния в дальней зоне поля, рассчитанных для цилиндров с покрытием и без покрытия, показывают, что в рассматриваемых диапазоне частот и секторе наблюдений наличие неоднородного покрытия, механические свойства которого определяются соотношениями (3.1), (3.2), приводит к уменьшению среднего значения интенсивности звукоотражения на 28 и 19 % соответственно.

Расчеты показали, что с использованием неоднородного покрытия с характеристиками, распределенными по соответствующим законам неоднородности, можно существенно

Значения kr_0 для собственных волн

(n , m)	Тип покрытия			
	Без покрытия	Тип 1	Тип 2	Тип 3
(1, 3)	12,459	13,666	—	13,697
(2, 3)	—	11,068	12,115	—
(3, 2)	11,597	—	—	—
(3, 3)	—	13,268	—	13,196
(5, 2)	—	11,341	11,822	11,271
(6, 1)	12,891	—	11,981	—
(6, 2)	—	13,054	13,317	13,037
(7, 1)	—	11,612	12,865	—
(8, 1)	—	12,291	13,722	—
(9, 1)	—	12,966	—	11,113
(10, 1)	—	13,623	—	11,738
(11, 1)	—	—	—	12,360
(12, 1)	—	—	—	12,972
(13, 1)	—	—	—	13,561

уменьшить интенсивность рассеянного цилиндром акустического поля в заданном диапазоне частот и в определенном направлении.

Для оценки влияния частотного диапазона на оптимальные звукоотражающие свойства покрытия проведена минимизация функционала Φ_1 в интервале $11 \leq kr_0 \leq 12$. Наименьшей интенсивности рассеяния звука при отражении при $\Phi_1 = 0,891$ соответствует покрытие с параметрами

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 1070(-9,5 + 10r), & \lambda(r) &= 3,9 \cdot 10^9(116,5 - 215r + 100r^2), \\ \mu(r) &= 9,8 \cdot 10^8(-219,5 + 420r - 200r^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, оптимальные законы неоднородности покрытия для различных частотных интервалов существенно различаются.

Для сравнения в интервале $11 \leq kr_0 \leq 12$ для цилиндров без покрытия и с покрытием, характеристики материалов которых распределены по закону (3.1), рассчитаны значения величины Φ_1 , равные 1,241 и 1,177 соответственно.

На акустические свойства упругого цилиндра значительное влияние оказывают его собственные колебания (волны). Частоты собственных волн каждой гармонике (моды) являются корнями дисперсионного уравнения, полученного при решении задачи о радиальных колебаниях упругого тела со свободной поверхностью. Собственные волны будем обозначать (n, m) , где n — номер моды; m — номер резонансной частоты моды.

В исследуемом диапазоне частот, соответствующем интервалу $11 \leq kr_0 \leq 14$, определены собственные волны в цилиндрах без покрытия и с неоднородными покрытиями типов 1, 2, 3, характеристики материалов которых распределены по законам (3.1), (3.2) и (3.3) соответственно. Значения kr_0 , соответствующие собственным волнам, приведены в таблице.

Для цилиндра без покрытия в рассматриваемом диапазоне частот наблюдаются только три собственные волны: (1, 3), (3, 2) и (6, 1). При наличии покрытия число собственных волн значительно увеличивается. При этом для цилиндров с покрытиями, имеющими различные свойства, характер собственных волн различается.

Технология изготовления градиентных покрытий с непрерывно меняющимися механическими свойствами является достаточно сложной. Для оценки возможности моделирования непрерывно-неоднородного покрытия покрытием, состоящим из системы однородных слоев, проведены расчеты частотных зависимостей величины $|F(\pi)|^2$ в интервале

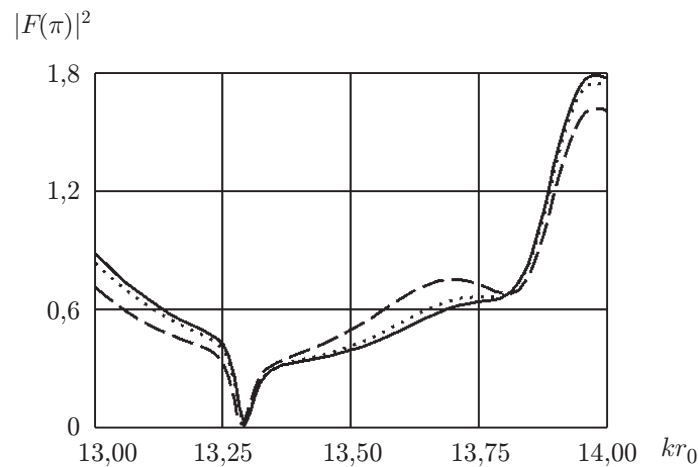


Рис. 4. Зависимости величины $|F(\pi)|^2$ от частоты для непрерывно-неоднородного и дискретно-слоистого покрытий:

сплошная линия — непрерывно-неоднородное покрытие, штриховая и пунктирная — дискретно-слоистое покрытие (штриховая — 6 слоев, пунктирная — 12 слоев)

$13 \leq kr_0 \leq 14$ для непрерывно-неоднородного и дискретно-слоистых покрытий с различным числом слоев. Полагалось, что законы неоднородности имеют вид (3.1). При этом непрерывные функции $\rho(r)$, $\lambda(r)$ и $\mu(r)$ были аппроксимированы кусочно-постоянными функциями [6]. Частотные зависимости величины $|F(\pi)|^2$ представлены на рис. 4. Расчеты показывают, что с увеличением количества однородных слоев в покрытии различие частотных зависимостей величины $|F(\pi)|^2$ в случаях непрерывно-неоднородного и дискретно-неоднородного покрытий уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Толоконников Л. А., Юдачев В. В.** Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. 2015. Вып. 3. С. 219–226.
2. **Романов А. Г., Толоконников Л. А.** Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, вып. 5. С. 850–857.
3. **Толоконников Л. А.** Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. 2013. Вып. 2, ч. 2. С. 265–274.
4. **Толоконников Л. А.** Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // Прикл. математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 4. С. 519–526.
5. **Толоконников Л. А.** Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием // Прикл. математика и механика. 2015. Т. 79, вып. 5. С. 663–673.
6. **Ларин Н. В., Толоконников Л. А.** Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикл. математика и механика. 2015. Т. 79, вып. 2. С. 242–250.
7. **McLaughlin J., Yoon J.-R.** Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement // Inverse Probl. 2004. V. 20. P. 25–45.

8. **Ватульян А. О., Сатуновский П. С.** Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 1. С. 36–38.
9. **Jadamba В., Khan А. А., Raciti F.** On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity // J. Comput. Math. Appl. 2008. V. 56. P. 431–443.
10. **Бочарова О. В., Ватульян А. О.** О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 3. С. 275–282.
11. **Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В.** Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акуст. журн. 2011. Т. 57, № 6. С. 723–730.
12. **Ватульян А. О., Углич П. С.** Реконструкция неоднородных характеристик поперечно-неоднородного слоя при антиплоских колебаниях // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 3. С. 146–153.
13. **Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А.** Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 5. С. 552–558.
14. **Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А.** Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. 2014. Вып. 4. С. 54–62.
15. **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

*Поступила в редакцию 25/V 2016 г.,
в окончательном варианте — 22/VIII 2016 г.*
