

УДК 539.3

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПЬЕЗОАКТУАТОРА МЕЖДУ БЕГУЩИМИ ВОЛНАМИ, ВОЗБУЖДАЕМЫМИ В УПРУГОМ СЛОЕ

Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, А. А. Евдокимов

Кубанский государственный университет, 350040 Краснодар, Россия  
E-mails: evg@math.kubsu.ru, nvg@math.kubsu.ru, evdokimovmail27@gmail.com

На основе решения динамической контактной задачи о взаимодействии гибкой пьезонакладки с упругой подложкой и явных представлений для возбуждаемых бегущих волн исследуются закономерности распределения энергии пьезоактуатора между нормальными модами (волнами Лэмба) в зависимости от параметров источника и частоты. На плоскости частота колебаний — ширина пьезонакладки определены зоны с максимальной и минимальной энергией фундаментальных мод.

Ключевые слова: упругий волновод, пьезоактуатор, контактная задача, волновая энергия.

DOI: 10.15372/PMTF20150610

**Введение.** Вибрационная нагрузка, приложенная к поверхности упругого слоистого волновода, возбуждает в нем бегущие волны, уносящие энергию вибровоздействия от источника на бесконечность. Оценка количества энергии, приносимой упругими волнами от удаленного источника, используется в таких областях науки и техники, как сейсмология и сейсмостойкое строительство, виброзащита, а также в микроэлектронных устройствах на поверхностных акустических волнах и в системах прецизионного позиционирования. В работе [1] проведен анализ распределения энергии точечного источника (тангенциальная периодическая нагрузка) между бегущими волнами, возбуждаемыми в упругом слое, лежащем на недеформируемом основании. В настоящей работе исследуются классические волны Лэмба, распространяющиеся в изотропном упругом слое со свободными от напряжений поверхностями. Результаты этих исследований могут быть использованы при решении задач волнового мониторинга протяженных элементов конструкций (трубопроводы, стенки реакторов и химических емкостей, обшивка авиационных изделий).

Волны, возбуждаемые в стальных, алюминиевых или композитных пластинах с помощью активных пьезосенсоров, выполненных в виде гибких и тонких накладок, распространяются на большие расстояния, взаимодействуя с любыми неоднородностями, что позволяет выявлять скрытые дефекты. В последнее время такая технология волнового контроля выделяется в самостоятельное научно-техническое направление — мониторинг дефектов конструкций (Structural Health Monitoring (SHM)) [2–4]. При этом одной из актуальных

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13-01-96520, 14-08-00370).

задач является выбор параметров проектируемых систем диагностики (тип, размер и расположение активных пьезоэлементов, несущие частоты и т. п.), обеспечивающих максимальную эффективность зондирования элементов конструкций с конкретными физико-механическими свойствами (модули упругости, плотность, толщина пластины и др.). Простейшей (классической) моделью, используемой при изучении амплитудно-частотных характеристик волн Лэмба, является модель возбуждения установившихся гармонических колебаний упругого слоя точечной поверхностной нагрузкой. Анализ распределения суммарной энергии  $E_0$ , поступающей в слой от эталонных точечных источников, между возбуждаемыми в нем волнами Лэмба показывает, что энергия каждой моды существенно зависит от частоты [5].

При рассмотрении размерных источников, например в виде поверхностной нагрузки, заданной в полосе с полушириной  $a$  или в круговой области радиусом  $a$ , распределение энергии, обусловленное свойствами материала подложки, зависит не только от геометрии области, но и от частоты, вида нагрузки и закона ее распределения в области приложения. Известно, что при варьировании размера источника при определенных значениях частоты  $f$  происходит полное гашение колебаний или достигается максимальная амплитуда отдельных мод колебаний [3, 4, 6]. Аналогичное чередование минимумов и максимумов амплитуды имеет место в случае изменения частоты  $f$  при фиксированном значении  $a$ . Пары значений центральной частоты и размера пьезоактуатора, максимизирующих амплитуду зондирующего сигнала (фундаментальной симметричной  $S_0$  или антисимметричной  $A_0$  моды), называются зонами наилучшего возбуждения (sweet spots) [2]. При выборе рабочих параметров проектируемых систем волнового мониторинга следует учитывать эти зоны. Для этого требуются адекватные математические и компьютерные модели, описывающие процесс возбуждения бегущих волн пьезоактивными элементами.

В большинстве используемых моделей действие пьезоактуатора определяется нагрузкой, заданной в области контакта активного элемента с подложкой, или набором сосредоточенных сил, распределенных вдоль границы области контакта. Тем самым учитывается влияние размера источника, но не учитывается реальное распределение контактных напряжений. В низкочастотном диапазоне или при относительно малых размерах источника закон распределения контактных напряжений не оказывает существенного влияния на расчетные значения оптимальных параметров. Об этом, в частности, свидетельствуют результаты сравнения расчетных характеристик волнового поля, возбуждаемого круговым пьезоактуатором, и результатов экспериментов [6]. Однако с увеличением частоты и (или) относительного размера источника различие расчетных и экспериментальных данных становится значительным.

Для того чтобы учесть распределение контактных напряжений, необходимо решить связную контактную задачу о динамическом взаимодействии активного элемента пьезоактуатора (гибкой пьезонакладки) с упругой подложкой. Численное решение такой задачи, учитывающее наличие связанных электромеханических полей и упругое деформирование самой наклейки, может быть получено с использованием современных коммерческих конечно-элементных пакетов программ (ANSYS, Abacus, Comsol и др.). Однако их использование является трудоемким, при этом отсутствуют такие преимущества явных аналитических представлений, как физическая наглядность и возможность проведения быстрого параметрического анализа.

В работе [7] предложена математическая модель, в рамках которой характеристики бегущих волн, возбуждаемых пьезонакладкой, рассчитываются на основе решения интегрального уравнения, к которому сводится задача о ее контактном взаимодействии с упругим слоем. Это позволяет учесть распределение контактных напряжений и сохранить преимущества явного аналитического представления. Исследования, проведенные с использо-

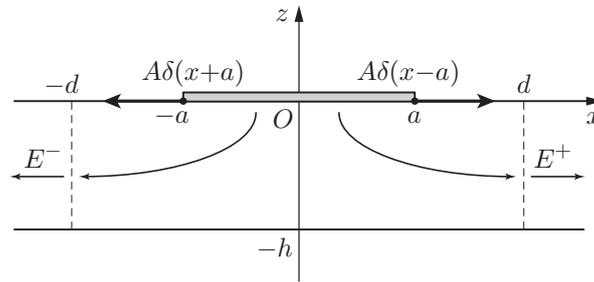


Рис. 1. Геометрия задачи (упругий слой с приклеенной пьезонакладкой)

ванием данной модели [8], позволили определить область применимости представлений для фундаментальных мод, возбуждаемых несвязными точечными нагрузками, и выявить резонансные эффекты, наблюдающиеся при определенных соотношениях полуширины  $a$  и длины одной из интерфейсных волн, формирующихся в зоне контакта. В настоящей работе, являющейся продолжением указанных исследований, анализируются энергетическая эффективность пьезоактуатора в виде полосы и распределение между модами энергии, поступающей от источника в упругий слой.

**1. Математическая модель.** Рассматривается упругий изотропный слой толщиной  $h$  с приклеенной к его поверхности тонкой гибкой пьезонакладкой шириной  $2a$  (рис. 1). Установившиеся гармонические колебания  $\mathbf{u} e^{-i\omega t}$  генерируются контактной касательной нагрузкой  $\tau_{xz} = q e^{-i\omega t}$ , приложенной к поверхности слоя  $z = 0$  в полосе  $|x| < a$ ,  $|y| < \infty$  (далее гармонический множитель  $e^{-i\omega t}$  опускается). Комплексная амплитуда вектора смещений  $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$  и компоненты тензоров напряжения и деформации упругой среды не зависят от горизонтальной координаты  $y$  (плоская двумерная постановка). Вне области приложения нагрузки поверхность  $z = 0$ , как и нижняя поверхность слоя  $z = -h$ , свободна от напряжений.

Поле смещений  $\mathbf{u}(x, z)$  описывается решением краевой задачи для уравнений Ламе

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}|_{z=-h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

и условиями излучения на бесконечности  $|x| \rightarrow \infty$ , следующими из принципа предельного поглощения [9]. В (1), (2)  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \sigma_z)^T$  — комплексная амплитуда вектора напряжений на горизонтальной площадке с нормалью  $\mathbf{n} = (0, 1)^T$ ;  $\lambda, \mu$  — константы Ламе;  $\rho$  — плотность;  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота;  $f$  — частота.

Отличная от нуля при  $|x| < a$  функция  $q(x)$  описывает распределение касательных напряжений под гибкой деформируемой пьезонакладкой. Напряжения возникают при продольном растяжении или сжатии наклейки под действием поперечного электрического поля  $\mathbf{E} = (0, E_z)^T$  (пьезоэффект). При этом центр наклейки  $x = 0$  остается неподвижным, а симметричные относительно центра точки смещаются в противоположных направлениях, поэтому описывающая горизонтальные смещения точек наклейки функция  $v(x)$ , как и функция напряжений  $q(x)$ , антисимметрична:  $v(-x) = -v(x)$  и  $q(-x) = -q(x)$ . Предполагается, что относительно тонкая наклейка не оказывает сопротивления изгибу, т. е. в зоне контакта  $\sigma_z = 0$ , а вызывающие продольную деформацию напряжения  $\sigma_x$  связаны с деформацией  $\varepsilon_x = v'(x)$  скалярным соотношением обобщенного закона Гука для среды с

пьезоэффектом [10]

$$\sigma_x = \frac{Y_0}{1 - \nu_0} [\varepsilon_x - d_{31}(1 + \nu_0)E_z], \quad (3)$$

где  $Y_0$ ,  $\nu_0$ ,  $d_{31}$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент электромеханической связи пьезоматериала накладки. Кроме того, предполагается, что компоненты перемещений и напряжений в накладке постоянны по толщине (не зависят от  $z$ ), а электрическое поле  $E_z$  постоянно и по ширине накладки.

С учетом данных предположений уравнения движения для накладки сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции  $v(x)$ :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varkappa_0^2 v = b_0 q, \quad |x| < a \quad (4)$$

с граничными условиями на ее торцах

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=\pm a} = e_0, \quad (5)$$

где  $\varkappa_0^2 = \rho_0 \omega^2 h_0 b_0$ ;  $b_0 = (1 - \nu_0^2)/(h_0 Y_0)$ ;  $e_0 = d_{31}(1 + \nu_0)E_z$ ;  $h_0$ ,  $\rho_0$  — толщина и плотность накладки. Подробный вывод уравнений и граничных условий (4), (5) из общих соотношений электроупругости в рамках принятых допущений содержится в работе [11].

Задачи (1), (2) и (4), (5) в общем случае не являются независимыми. Их связывает не только функция  $q(x)$ , входящая как в граничные условия (2), так и в правую часть уравнения (4), но и условие склейки между накладкой и поверхностью слоя

$$u_x(x, 0) = v(x), \quad |x| < a. \quad (6)$$

Тем не менее решение рассмотренной независимо задачи (1), (2) имеет явное интегральное представление в виде свертки матрицы Грина слоя  $k(x, z)$  и нагрузки  $\mathbf{q}$  или в форме обратного преобразования Фурье от произведения их фурье-символов  $K = F[k]$  и  $\mathbf{Q} = F[\mathbf{q}]$  [9]:

$$\mathbf{u}(x, z) = \int_{-a}^a k(x - \xi, z) \mathbf{q}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (7)$$

В рассматриваемом случае  $\mathbf{q} = (q, 0)^T$ . В явном виде элементы первого столбца  $\mathbf{K}_1 = F[\mathbf{k}_1]$  матрицы  $K$  для рассматриваемого свободного упругого слоя приведены в работе [7].

Контур интегрирования  $\Gamma$  расположен вдоль вещественной оси и обходит вещественные полюсы  $\pm \zeta_n$  элементов матрицы  $K$ . Направление обхода выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения. При  $|x| > a$  (вне области контакта) выполняются условия леммы Жордана, позволяющие замкнуть контур  $\Gamma$  в верхнюю ( $x < -a$ ) или нижнюю ( $x > a$ ) полуплоскость комплексной плоскости  $\alpha$ . Замена интеграла по замкнутому контуру суммой вычетов позволяет представить  $\mathbf{u}(x, z)$  в виде разложения по нормальным модам

$$\mathbf{u}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{u}_n(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n^{\pm}(z) e^{\pm i \zeta_n x}, \quad |x| > a, \quad (8)$$

$$\mathbf{a}_n^{\pm} = \mp i \operatorname{res} \mathbf{K}_1(\alpha, z) \Big|_{\alpha = \mp \zeta_n} \mathbf{Q}(\mp \zeta_n).$$

Здесь верхний знак используется при  $x > a$ , нижний — при  $x < -a$ . Считается, что полюсы  $\zeta_n$  расположены выше контура  $\Gamma$ , а  $-\zeta_n$  — ниже его в порядке возрастания мнимой части ( $\operatorname{Im} \zeta_{n+1} \geq \operatorname{Im} \zeta_n$ ). Вещественным полюсам в представлении (8) соответствуют

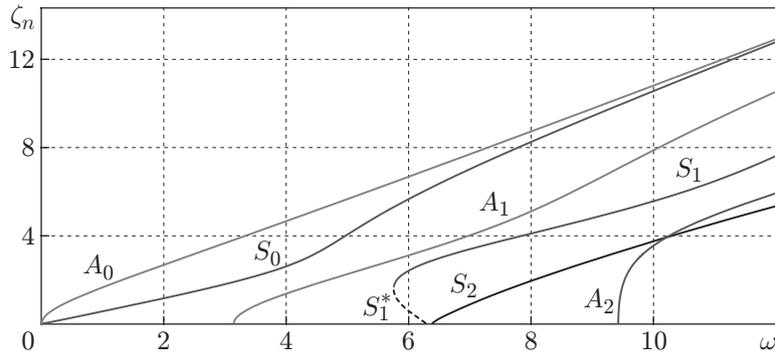


Рис. 2. Дисперсионные кривые (зависимость волновых чисел  $\zeta_n$  от круговой частоты  $\omega$ ):

$A_m$  — антисимметричные моды,  $S_m$  — симметричные моды

незатухающие волны Лэмба, бегущие вдоль слоя от источника на бесконечность с фазовыми и групповыми скоростями  $c_n = \omega/\zeta_n$  и  $v_n = d\omega/d\zeta_n$ . Полюсам  $\zeta_n$  соответствуют как симметричные  $S_m$ , так и антисимметричные  $A_m$  моды ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Типичные дисперсионные кривые для волновых чисел волн Лэмба  $\zeta_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_r(\omega)$  ( $N_r$  — число вещественных полюсов  $\zeta_n$  для текущей круговой частоты  $\omega$ ) показаны на рис. 2. При  $n \geq N_r + 1$  полюсы  $\zeta_n$  являются комплексными, им соответствуют неоднородные волны, экспоненциально убывающие по мере удаления от источника:  $|\mathbf{u}_n| \sim O(e^{-\text{Im} \zeta_n |x|})$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ .

В данной работе результаты численных расчетов приводятся в безразмерном виде. Для обезразмеривания используются величины  $l_0 = h$ ,  $\mu_0 = \mu$ ,  $\rho_0 = \rho$ . Все размерные величины отнесены к этим величинам или к величинам, выраженным через них. Скорости отнесены к величине  $v_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ , частоты — к величине  $f_0 = v_0/l_0$ . Кривые, приведенные на рис. 2 (коэффициент Пуассона  $\nu = 0,34$ ,  $\omega = 2\pi f h/v_s$ , где  $v_s$  — скорость  $S$ -волн), соответствуют дюралюминиевой пластине с модулем сдвига  $\mu = 26,5$  ГПа и плотностью  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup> ( $v_0 = v_s = 3132$  м/с). При толщине пластины  $h = 3$  мм ( $l_0 = 3 \cdot 10^{-3}$  м) частота равна  $f_0 = 1,044$  МГц, т. е. на рис. 2 диапазону безразмерных частот  $0 < \omega < 12$  соответствует диапазон размерных частот  $0 < f < 2$  МГц, где  $f = \omega f_0 / (2\pi)$ .

Вектор-функции  $\mathbf{a}_n^\pm(z)$  в представлении (8) определяют не зависящие от вида нагрузки собственные формы нормальных мод (закон распределения амплитуды колебаний в поперечном сечении слоя). Конкретные значения амплитуды (а следовательно, и количество переносимой энергии) контролируются коэффициентами  $Q(\mp \zeta_n)$ , зависящими от величины и вида приложенной нагрузки  $q$ . В задаче для слоя (1), (2), рассматриваемой независимо от задачи (4), (5), нагрузка  $q$  неизвестна. Для определения этой нагрузки необходимо решить связанную контактную задачу (1)–(6). С этой целью интегральное представление (7) для компоненты смещения  $u_x$  подставляется в условие склейки (6), что с учетом соотношений (4), (5) приводит к системе интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных  $q(x)$  и  $v(x)$ . Решение этой системы строится либо путем ее сведения к бесконечным системам [7, 8], либо с использованием метода Галеркина.

Решение контактной задачи имеет корневую особенность на границе области контакта:  $q(x) \sim c/\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $x \rightarrow \pm a$ , поэтому при решении инженерных задач действие актуатора обычно аппроксимируется противоположно направленными сосредоточенными силами, приложенными к поверхности слоя в граничных точках  $x = \pm a$  (см. рис. 1):

$$\tau_{xz}|_{z=0} = q_0(x) = A[\delta(x - a) - \delta(x + a)]. \quad (9)$$

Здесь  $\delta$  — дельта-функция Дирака;  $A$  — амплитудный множитель, задающий величину

приложенной силы. При выборе  $A$  из условия эквивалентности

$$\int_0^a q(x) dx = \int_0^a q_0(x) dx = A$$

значения амплитудных коэффициентов  $Q(\mp\zeta_n)$  в разложении (8), а следовательно, и амплитуды возбуждаемых волн Лэмба, хорошо аппроксимируются в диапазоне относительно низких частот ( $\omega a/v_0 \ll 1$ ) значениями  $Q_0(\mp\zeta_n)$ .

В тех случаях, когда представляют интерес только относительные амплитудные характеристики, достаточно зафиксировать одно значение  $A$  для всех  $\omega$ . В качестве этого значения величины  $A$ , учитывающей интенсивность электрического поля  $E_z$ , подаваемого на накладку, иногда используется величина  $e_0$ , входящая в граничные условия (5) [2]. При использовании точечно-силовой модели актуатора (9) с фиксированным коэффициентом  $A = e_0$  не требуется решать контактную задачу (несвязная модель), поэтому указанная модель широко используется в инженерных расчетах. Оценка области применимости данной несвязной модели является одной из целей настоящей работы.

**2. Энергетический баланс.** Осредненное за период колебаний  $T = 2\pi/\omega$  количество энергии  $E$ , переносимое упругими волнами в поле гармонических колебаний  $\mathbf{u} e^{-i\omega t}$  через некоторую поверхность  $S$ , определяется путем интегрирования нормальной компоненты  $e_s = (\mathbf{e}, \mathbf{n})$  вектора плотности энергии  $\mathbf{e}$  (вектора Умова [12]) по этой поверхности:

$$E = \int_S e_s(\mathbf{x}) dS, \quad e_s = -\frac{\omega}{2} \text{Im}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_s). \quad (10)$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}_s = \lambda \text{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + 2\mu \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} + \mu(\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{u})$  — вектор напряжений на поверхности  $S$ ;  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности в текущей точке  $\mathbf{x} \in S$ . В рассматриваемом случае поле гармонических колебаний  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , необходимое для вычисления  $e_s(\mathbf{x})$ , задается явными представлениями (7), (8).

Для энергии  $E_0$ , поступающей от актуатора в упругий слой через область контакта  $|x| < a$  в направлении внутренней нормали  $\mathbf{n} = (0, -1)^T$ , представление (10) принимает вид

$$E_0 = \frac{\omega}{2} \text{Im} \int_{-a}^a u_x(x, 0) q^*(x) dx = \frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \int_{\Gamma} K_{11}(\alpha, 0) Q(\alpha) Q^*(\alpha^*) d\alpha$$

(индекс “\*” соответствует комплексно-сопряженным величинам). При вещественных  $\alpha$  элементы матрицы  $K$  вещественнозначны, поэтому вклад в мнимую часть контурного интеграла дают только вычеты в вещественных полюсах  $\pm\zeta_n$ , а в силу четности подынтегральной функции величину  $E_0$  можно выразить через вклад только положительных вещественных полюсов  $\zeta_n$ :

$$E_0 = \sum_{n=1}^{N_r} E_n, \quad E_n = \frac{\omega}{2} j_n \text{res} K_{11}(\alpha, 0) \Big|_{\alpha=\zeta_n} |Q_n|^2, \quad Q_n = Q(\zeta_n). \quad (11)$$

Множитель  $j_n$  вводится для учета вклада нерегулярных полюсов с отрицательным тангенсом угла наклона касательной к дисперсионной кривой (см., например, участок  $S_1^*$  ветви дисперсионной кривой на рис. 2). Этим полюсам соответствуют так называемые обратные волны с противоположно направленными фазовыми и групповыми скоростями. Для нерегулярных полюсов  $j_n = -1$ , в остальных случаях  $j_n = 1$ .

В силу закона сохранения энергии количество энергии  $E^+$  и  $E^-$ , идущей от источника на бесконечность через поперечные сечения волновода  $x = \pm d, -h \leq z \leq 0$  (см.

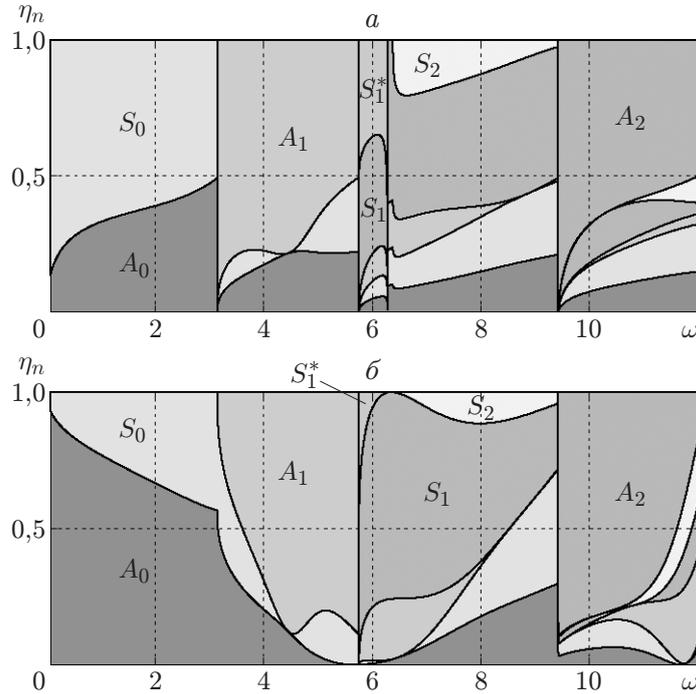


Рис. 3. Вклад энергии мод  $A_m$  и  $S_m$  в суммарную энергию источника, моделируемого касательной точечной (а) или двухточечной (б) нагрузкой

рис. 1), не зависит от  $d > a$  и равно количеству энергии, поступающей от источника:  $E_0 = E^+ + E^-$ . При вычислении  $E^\pm$  используется разложение по нормальным модам (8), приводящее к представлению горизонтальной компоненты вектора плотности энергии  $e_x$  в виде двойной суммы:

$$e_x^\pm = \sum_n \sum_m e_{nm}^\pm, \quad e_{nm}^\pm = -\frac{\omega}{2} \text{Im}(\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\tau}_m^\pm).$$

Вследствие ортогональности мод вклад в величину  $E^\pm$  дают только слагаемые при  $n = m \leq N_r$ :

$$E_0 = \sum_{n=1}^{N_r} E_n^\pm, \quad E_n^\pm = \int_{-h}^0 e_{nn}^\pm(z) dz$$

( $E_n^\pm$  — количество энергии, переносимой  $n$ -й модой вправо и влево от источника). В силу симметрии задачи  $E_n^+ = E_n^-$ , причем суммарная мощность каждой волны Лэмба совпадает с величиной  $E_n$  в представлении (11):  $E_n = E_n^+ + E_n^- = 2E_n^+$ .

Анализ зависимости энергии источника  $E_0(\omega, a)$  от частоты и размеров актуатора позволяет оценить эффективность его работы при различном сочетании этих параметров. Относительная эффективность возбуждения отдельных мод определяется коэффициентом распределения энергии источника  $\eta_m = E_m/E_0$ . Связанные с контактной нагрузкой коэффициенты  $Q_n$  оказывают влияние как на абсолютные значения энергии источника  $E_0$ , так и на ее распределение между модами.

На рис. 3 приведены зависимости  $\eta_m(\omega)$ , по которым можно оценить вклад симметричных и антисимметричных мод в общий поток энергии  $E_0$ , поступающей от точечной касательной нагрузки  $\tau_{xz}(x, 0) = \delta(x)$  и двухточечной нагрузки вида (9) при  $a = 0,5$ . В первом случае  $Q_n = 1$ , во втором  $Q_n = 2iA \sin(a\zeta_n)$ . Очевидно, что во втором случае мода  $\mathbf{u}_n$

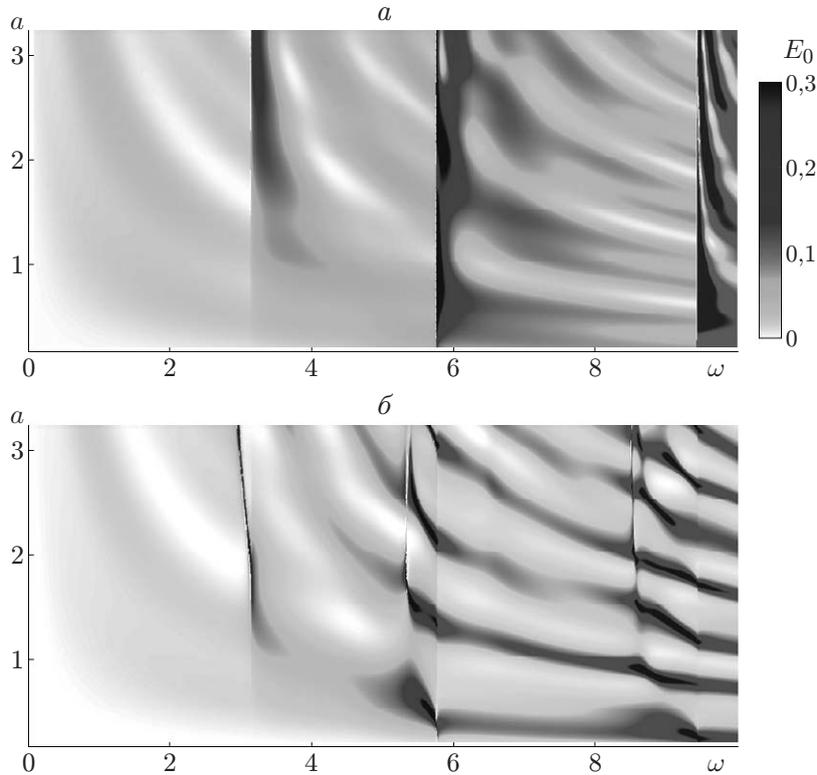


Рис. 4. Зависимость энергии пьезоактуатора  $E_0$  от частоты  $\omega$  и размера  $a$  области контакта при использовании несвязной модели с двухточечной нагрузкой (9) при  $A = e_0$  (а) и связанной модели (1)–(6) (б)

не возбуждается при тех парах значений  $\omega$ ,  $a$ , при которых  $a\zeta_n = \pi k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , так как  $Q_n = 0$  и соответственно  $\mathbf{a}_n = 0$ ,  $E_n = 0$ . При  $a\zeta_n = \pi(k - 1/2)$ , наоборот, значение  $Q_n = 2iA$  максимально по модулю, т. е. модой  $\mathbf{u}_n$  переносится максимально возможное при такой нагрузке количество энергии  $E_n$ . С увеличением частоты и (или) ширины накладки нулевые и максимальные значения амплитудного множителя  $Q_n$  периодически чередуются. В силу того что ветви дисперсионных кривых  $\zeta_n(\omega)$  выходят на асимптотику  $\zeta_n \sim c_n\omega$ , линии максимумов и минимумов  $Q_n$  с увеличением  $\omega$  располагаются на плоскости  $(\omega, a)$  вдоль гипербол  $a \sim \pi k / (c_n\omega)$ .

На рис. 4,а чередованию максимумов и минимумов  $Q_n(\omega, a)$  соответствует чередование темных и светлых полос, расположенных вдоль указанных гипербол для мод, дающих основной вклад в энергию  $E_0$ . Такой же характер зависимости  $E_0$  от  $\omega$  и  $a$  имеет место при вычислении контактных напряжений  $q(x)$  и соответственно коэффициентов  $Q_n$  при решении связанной контактной задачи (см. рис. 4,б). Из результатов, приведенных на рис. 4,б, следует, что для оценки эффективности генерации фундаментальных мод  $A_0$  и  $S_0$  в низкочастотном (двухмодовом) диапазоне  $\omega < 3$  можно использовать более простую несвязную модель с нагрузкой (9). При более высоких частотах картины чередования полос максимального и минимального излучения энергии  $E_0$  остаются качественно подобными, однако их положение на плоскости  $(\omega, a)$  различается, причем с ростом  $\omega$  это различие увеличивается. Использование упрощенной модели может привести к выбору рабочих частот, не обеспечивающих максимальную эффективность работы пьезоактуатора определенной ширины  $2a$ .

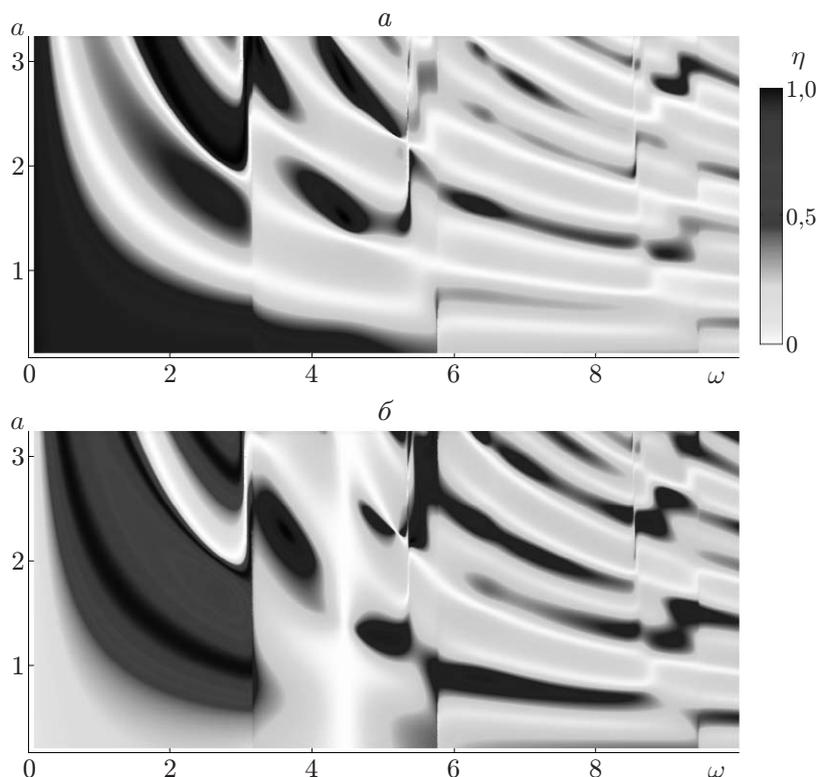


Рис. 5. Вклад энергии фундаментальных мод  $A_0$  (*a*) и  $S_0$  (*б*) в общее количество волновой энергии, поступающей от пьезоактуатора в упругий слой

При возбуждении нескольких мод возникает сложная для интерпретации волновая картина, поэтому при проведении волнового мониторинга предпочтительными являются такие параметры пьезоисточника, которые обеспечивают генерацию только одной доминирующей (чистой) моды. Как правило, используются фундаментальные моды Лэмба  $A_0$  или  $S_0$ . Изменение доли этих мод в общем потоке энергии  $E_0$  в зависимости от  $\omega$  и  $a$  показано на рис. 5. Данные результаты получены в рамках связанной модели (1)–(5). В двухмодовом диапазоне  $0 < \omega < \pi$  темные и светлые полосы, соответствующие максимальному и минимальному вкладам энергии одной из этих мод, представляют собой негативное изображение распределения энергии для другой моды. В многомодовом диапазоне большая часть энергии источника расходуется на возбуждение высших мод. Однако и при высоких частотах наблюдаются темные зоны, свидетельствующие о возможности возбуждения при соответствующих сочетаниях частоты и размера источника только одной доминирующей моды  $A_0$  или  $S_0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ерофеев В. И., Ключева Н. В., Солдатов И. Н. Волны в слое, возбуждаемые периодической тангенциальной нагрузкой // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 4. С. 109–115.
2. Giurgiutiu V. Structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensors. 2nd ed. Boston: Elsevier Acad. Press, 2014.
3. Giurgiutiu V. Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring // J. Intell. Material Systems Structures. 2005. V. 16. P. 291–305.

4. **Raghavan A., Cesnik C. E. S.** Review of guided wave structural health monitoring // *Shock Vibrat. Digest*. 2007. V. 39, N 2. P. 91–114.
5. **Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А., Фоменко С. И.** Распределение энергии поверхностного источника между волнами Лэмба // Тр. 17-й Междунар. конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”, г. Ростов-на-Дону, 14–17 окт. 2014 г. Ростов н/Д: Изд-во Южного федерал. ун-та, 2014. Т. 1. С. 137–141.
6. **Glushkov E. V., Glushkova N. V., Eremin A. A., et al.** Lamb wave excitation and propagation in elastic plates with surface obstacles: proper choice of central frequencies // *Smart Materials Structures*. 2011. V. 20, N 1. 015020.
7. **Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Зеemann В., Кваша О. В.** Возбуждение упругих волн в слое пьезокерамическими накладками // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52, № 4. С. 470–479.
8. **Glushkov E. V., Glushkova N. V., Kvasha O. V., Seemann W.** Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate // *Smart Materials Structures*. 2007. V. 16, N 3. P. 650–664.
9. **Ворович И. И.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1979.
10. **Партон В. З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. М.: Наука, 1988.
11. **Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Зеemann В., Кваша О. В.** Возбуждение волн пьезоэлектрическими накладками, симметрично расположенными на обеих поверхностях упругого слоя // *Прикл. математика и механика*. 2011. Т. 75, вып. 1. С. 83–94.
12. **Умов Н. А.** Избранные сочинения. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.

*Поступила в редакцию 8/VI 2015 г.*

---