

Рис. 5

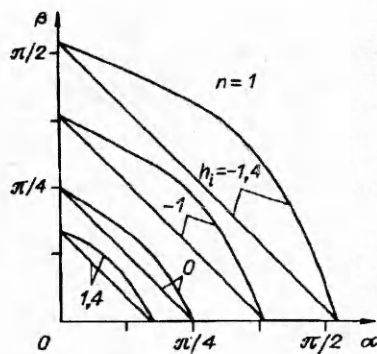


Рис. 6

уравнениях (2.11), (2.12) $m = 1$ и экспоненциальный закон неоднородности (1.14) при $|h_i| < 2$, приходим к трансцендентному уравнению

$$(2.13) \quad \frac{4 \operatorname{tg}(\alpha \sqrt{4 - h_1^2})}{\sqrt{4 - h_1^2} - h_1 \operatorname{tg}(\alpha \sqrt{4 - h_1^2})} - \gamma \sqrt{4 - h_2^2} \operatorname{ctg}(\beta \sqrt{4 - h_2^2}) + \gamma h_2 = 0.$$

Для однородного составного линейно-упругого клина, принимая $h_i = 0$, из (2.13) получаем соответствующее уравнение работы [3], если в нем положить коэффициенты Пуассона материалов равными $1/2$.

На рис. 6 показаны следы поверхности, определяющиеся уравнением (2.13), в плоскости $\alpha\beta$ (прямые линии отвечают $\gamma = 1$, а кривые $\gamma = 2$).

В рассмотренной задаче, если для сплошного однородного клина с углом раствора больше $\pi/4$ всегда имеется концентрация напряжений в вершине, а с углом раствора меньше $\pi/4$ отсутствует, то для сплошного неоднородного клина, как показывают графики рис. 5 и 6, эта закономерность нарушается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. — М.: Наука, 1992.
2. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987.
3. Аксентян О.К., Лущик О.Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 5. — С. 102—108.
4. Акопян А.Г., Задоян М.А. Малонапряженность неоднородно-составных клиньев // Изв. РАН. МТТ. — 1992. — № 5. — С. 88—96.

г. Ереван

Поступила 23/VI 1993 г.

УДК 621.929

А.Ф. Ревуженко

О САМОМ ЭФФЕКТИВНОМ ПРОЦЕССЕ СМЕШЕНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

1. Введение. Эволюция всех систем, которые наблюдаются в природе, имеет две тенденции: 1) увеличение в системе хаоса, беспорядка; 2) возникновение порядка, самоорганизация. В самом обычном проявлении увеличение хаоса приводит к тому, что система «забывает» свою историю и в

© А.Ф. Ревуженко, 1994

конце концов приходит к такому состоянию, которое от начальных данных и истории развития (а точнее, истории деградации) вообще не зависит. Это состояние является стационарным. На нем эволюция прекращается. Один из примеров всем хорошо известен по собственному опыту: если не принимать специальные меры, то беспорядок в квартире будет только нарастать. Специальные же меры по восстановлению порядка всегда связаны с затратами энергии и каких-то интеллектуальных усилий.

В некоторых случаях ставится противоположная задача: осуществить меры, которые ускорили бы эволюцию системы и перевели ее в стационарное состояние как можно быстрее. Такое вмешательство также требует затрат усилий и энергии, хотя цель здесь не «наведение порядка», а напротив — быстрое достижение максимального беспорядка. Иногда подобные задачи имеют практический смысл. Одной из них является задача о смешении порошковых материалов [1].

Рассмотрим ее в следующей постановке. Пусть имеются два порошковых материала (компонента) A и B . Они заранее отдозированы в нужном рецептурном отношении. Через A обозначен ключевой компонент. По определению его объем не больше, чем компонент B . Оба компонента представляют собой сухие порошковые материалы, состоящие из отдельных твердых частиц. Частицы A и B могут отличаться между собой формой, размерами и, главное, могут иметь существенно различные удельные веса. Предположим, однако, что если какая-то смесь A и B создана, то самопроизвольно она уже не разделяется. Исходная задача состоит в том, чтобы поместить материалы A и B в заданную емкость V так, чтобы они были равномерно распределены один в другом. Таким образом, речь идет о дискретном процессе смешивания.

Возможны два пути решения поставленной задачи. Первый состоит в следующем. В емкость V укладывается необходимое число частиц компонента B . Затем между ними помещается частица A и т.д. В результате получается однородная упаковка. Как правило, непосредственное осуществление этого способа нереально ввиду громадного числа частиц и малости их размеров. Можно искать технически приемлемые способы «укладчика» частиц. Этот путь является детерминистским.

Второй путь отличается от первого принципиально. Он связан с тем, что реализуются определенные случайные перемещения частиц, которые и приводят к перемешиванию. Для случайного процесса исходную задачу необходимо уточнить. Во-первых, надо уточнить конечную цель — получение однородной смеси. Здесь необходимо предположить, что существует какой-то минимальный объем ω , в пределах которого распределение компонентов значения не имеет. Тогда требование однородности означает, что в любой области ω , выделенной из V , соотношение компонентов A и B должно быть таким же, как и во всем объеме V . Или, точнее, для любой области объема ω вероятность отклонения от рецептурного соотношения на величину, большую допустимой ϵ , должна быть меньше наперед заданного значения Δ .

Последнее требование ставит теоретический предел для возможностей стохастических способов перемешивания. Этот предел можно рассчитать точно. Например, найти нижнюю оценку величины ω как функции объема V , отклонения ϵ и вероятности Δ при заданном числе и относительных размерах частиц A и B . С другой стороны, ω определяется технологическими требованиями. Фактически объем ω равен объему пробы, который берется для контроля качества смеси. Если по рецептурному требованию количество частиц A и B в объеме ω достаточно велико, то вероятность недопустимых флуктуаций становится пренебрежимо малой. В большинстве случаев имеет место именно такая ситуация. Ниже ограничимся только этим вариантом. Последнее означает, что для приготовления однородной смеси использование стохастических процессов допустимо. В противном случае, например, когда концентрация ключевого компонента очень низка, возможен только детерминистский путь.

Таким образом, препятствием для реализации детерминистского способа смешения является большое количество частиц. В то же время именно это обстоятельство делает реальным стохастический путь. На этом пути можно реализовать множество различных процессов, которые будут отличаться эффективностью, качеством, заложенными принципами и т.д.

Поставим следующий вопрос. Существует ли среди всех мыслимых процессов смешения такой, который является самым лучшим по качеству и эффективности? Одним словом, существует ли здесь некоторый идеал, т.е. что-то, что нельзя превзойти в принципе? Попытаемся отыскать этот процесс [2].

2. Идеальный процесс смешивания. Вначале обратимся к следующему факту. Хорошо известно, что если в закрытой комнате разлить духи, то через определенное время их запах распределится по всей комнате. Причем если весом можно пренебречь, то это распределение будет равномерным. Как известно, причина явления в том, что газы состоят из отдельных молекул, которые совершают беспорядочные случайные пробеги. Их многократная реализация и приводит к равномерному перемешиванию. Таким образом, в природе есть процесс, который приводит к идеальному качеству смеси. Попробуем его использовать для решения поставленной задачи.

Ясно, что конечный результат от размеров молекул не зависит. Поэтому если случайные свободные пробеги реализовать и для частиц порошков, то точно так же, как и для газов, получим однородную смесь.

Однако в поведении порошков и газов есть существенное различие. Молекулы газа получают импульсы от колеблющихся атомов стенок емкости. Для того чтобы дать сопоставимые импульсы частицам порошков, необходимо сообщить вибрацию стенкам емкости. Однако такое непосредственное использование аналогии наталкивается на ряд технических и принципиальных трудностей. Во-первых, требуется значительная энергия колебаний, во-вторых, возникает проблема взаимодействия частиц при столкновениях. Кинетика процесса будет зависеть от свойств частиц, и в общем случае гарантировать качество смеси здесь нельзя. В исходной же постановке требуется найти идеальный процесс, где гарантируется качество для любых физических свойств частиц. Далее, для порошков несравнимо большую роль, чем для газов, играет сила тяжести. Так, при отсутствии вибраций частицы порошков контактируют друг с другом и образуют определенную упаковку. Эта упаковка плотна, так что пространство для свободных пробегов частиц отсутствует.

Поэтому поступим следующим образом. Пересыплем компоненты A и B в емкость V произвольным способом. Начальное их распределение будет неоднородным. Обозначим через t время. Пусть начальному состоянию отвечает $t = t_0$. Идентифицируем каждую частицу параметром ρ , введем декартову систему координат x, y, z и отметим радиусом-вектором \mathbf{r} положение каждой частицы: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, t)$. Затем проведем некоторые операции перемешивания. Например, отправим всю массу из V в отдельный смеситель. Обработаем ее там в течение времени τ и затем опять вернем в V . Таким образом, после указанных манипуляций все частицы окажутся в емкости V , будут покоиться и снова образуют определенную упаковку. При этом каждая частица ρ займет новое положение. Собственно, в этом и выражается весь результат обработки смеси от t_0 до $t_0 + \tau$. Поэтому, если не интересоваться преобразованиями смеси внутри промежутка $t_0, t_0 + \tau$, то можно сказать, что за время τ все частицы, оставаясь внутри объема V , сместились на вектор

$$(2.1) \quad \mathbf{l}(\rho, t_0) = \mathbf{r}(\rho, t_0 + \tau) - \mathbf{r}(\rho, t_0),$$

который можно назвать пробегом частицы ρ . Он вполне может играть роль свободного пробега молекулы газа.

Дальше опять проведем обработку смеси в течение времени от $t_0 + \tau$ до $t_0 + 2\tau$. Снова вернем образец в емкость V и в состоянии покоя зафиксируем положение частицы ρ в новой упаковке: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, t_0 + 2\tau)$. Этому положению

соответствует новый пробег частицы и т.д. Таким образом, можно говорить о последовательности преобразований области V в себя. Здесь удобно ввести безразмерное время $N = (t - t_0)/\tau$ и целые значения N назвать номером цикла. За N циклов каждая частица получает результирующее смещение

$$(2.2) \quad L(\rho, N) = \sum_{i=0}^{N-1} l(\rho, i) = r(\rho, N) - r(\rho, 0).$$

Качество будет обеспечено, если хотя бы при $N \rightarrow \infty$ смесь станет стремиться к однородному состоянию. Однако одного только факта, что l является величиной случайной, для этого недостаточно. Например, если тяжелые частицы имеют большую вероятность смещаться вниз, чем легкие, то в пределе будет достигнуто неоднородное состояние. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Вначале введем характеристики стохастического процесса. Пусть F — плотность вероятности случайной величины l . По определению вероятность того, что вектор l имеет длину от s до $s + ds$ и лежит внутри конуса с телесным углом $2d\Omega$ и осью, направленной вдоль заданного единичного вектора e , равна произведению F на соответствующий элемент объема: $\pi s^2 F ds (d\Omega)^2$.

Одной функции F для характеристики процесса недостаточно. Это связано с тем, что пробеги частиц являются не просто случайными величинами, но образуют случайное векторное поле. Например, если известно, что некоторая частица сместилась в определенную точку пространства, то условная вероятность смещения в эту точку любой другой частицы должна равняться нулю. В то же время вероятность того, что найдутся частицы, которые сместятся в близкую окрестность данной точки, должна равняться единице. Иными словами, после любой реализации случайного поля l у каждой частицы должно оказаться достаточное число контактов с соседями. При этом для частиц на свободной поверхности упаковка должна быть такой, чтобы максимальный угол ската α не превышал предельного значения φ (φ — угол естественного откоса материала). Следовательно, область V преобразуется в себя с точностью до очертания свободной поверхности, которая от цикла к циклу может меняться. Это обстоятельство, а также полевые свойства смещений осложняют все теоретические построения.

Для описания l как случайного поля необходимо введение многомерных плотностей вероятностей [3]. Сформулированные выше требования к случайному полю будем называть условием совместности. Для функции F и многомерных плотностей вероятности условие совместности означает, что любая конкретная реализация случайного поля «пробегов» l должна быть такой, чтобы упаковка частиц переходила в упаковку. Дать аналитическую формулировку этого условия, по-видимому, сложно (ниже эта трудность будет преодолена по-другому). Сейчас достаточно ограничиться только его констатацией.

Коллективное поведение частиц может выражаться не только в выполнении условия совместности. Возможны и более тесные связи. Основная из них выражается в том, что близкие частицы имеют тенденцию оставаться близкими и после реализации случайных смещений. Например, пусть операция перемешивания сводится к однократному встряхиванию емкости V . Ясно, что здесь частицы хотя и займут новые положения, но близкие частицы, как правило, останутся близкими. При этом условие совместности будет выполнено.

Теперь исходную задачу можно сформулировать более определенно: свести ее к решению трех вопросов. 1. Каким условиям должны удовлетворять функция F и многомерные плотности вероятности, чтобы с увеличением времени смесь стремилась к однородному состоянию? 2. При каких условиях переход в однородное состояние совершается за меньшее время? 3. Каким образом можно реализовать процесс, которому отвечали бы плотности вероятности с нужными свойствами? Строгое исследование этих вопросов связано

с рядом математических трудностей. Поэтому вначале рассмотрим интуитивные соображения.

Прежде всего выясним, от каких аргументов может зависеть плотность распределения F . Во-первых, в общем случае F может зависеть от типа частиц (их удельного веса и других физических свойств), затем от координат частиц $\mathbf{r}(\rho, N)$. Естественна зависимость от случайного смещения s и его направления e . В принципе не исключена и явная зависимость от времени N (это будет в случае, если способ обработки смеси от цикла к циклу меняется). Возможна зависимость F и от каких-то иных факторов. Таким образом, в общем случае

$$F = F(\rho, \mathbf{r}, s, e, N, \dots).$$

Кажется очевидным, что если функция F зависит от типа частиц, то в пределе смесь будет получаться не однородной, а разделенной по тому признаку, который влияет на плотность вероятности. Поэтому в качестве первого условия примем, что в идеальном процессе смешивания все плотности вероятности от типа частиц зависеть не должны.

Теперь обратимся к понятию результирующего смещения (2.2). Пусть N^* — момент времени, когда смесь достигла однородного состояния. Тогда $L(\rho, N^*)$ — это итоговое смещение частицы из начального положения в конечном. В качестве идентификатора частицы ρ можно использовать ее начальный радиус-вектор \mathbf{r}^0 . Нетрудно понять, что функция L от \mathbf{r}^0 никакими априорными условиями гладкости не обладает. Более того, в общем случае она будет «всюду» разрывной. Например, пусть в начальный момент все частицы ключевого компонента собраны вместе в какой-то части V , т.е. в начальный момент каждая частица A (кроме граничных) контактирует только с частицами типа A . В конечном же состоянии, если концентрация A незначительна, каждая частица A должна быть окружена только частицами типа B . Это означает, что первоначально близким частицам должны соответствовать неблизкие значения L . Или, иными словами, в процессе перемешивания близкие частицы рано или поздно должны расстаться. Однако если в поведении различных частиц ансамбля есть тесные связи, то для такого расставания потребуется значительное время. С другой стороны, определенная коллективность, связанная с совместностью, должна быть всегда. Отсюда можно заключить, что в идеальном процессе поле случайных смещений должно удовлетворять только условиям совместности, во всех остальных отношениях поведение различных частиц должно быть независимым друг от друга.

Вернемся к аналогии с газами. Если в емкости V заключен газ нормальной плотности, то величина свободных пробегов весьма ограничена. Например, пробеги, сравнимые с размером всей емкости, практически невероятны. И это обстоятельство является главным ограничением эффективности перемешивания. Для порошков ситуация противоположная. Здесь частицы заполняют объем полностью, и свободного пространства для пробегов нет. Однако весь процесс и понятие пробега (2.1) определены так, что L может быть практически любой. Например, если частица была у одной стенки емкости, то после одного цикла смещения она вполне может оказаться около другой стенки.

Далее, однородность смеси означает, что ее свойства во всех точках и по всем направлениям одинаковы. Иными словами, есть инвариантность свойств по отношению к переносу и повороту системы координат. Можно предположить, что функции, управляющие эффективным переходом к такому состоянию, должны быть инвариантными. Для функции F это означает независимость от аргументов s и e . Однако в связи с тем, что смешивание ведется в ограниченном объеме, для всех частиц должно выполняться условие непроникания сквозь стенки. Отсюда следует, что функция F от аргументов e и s зависеть все же должна. Поэтому требование инвариантности необходимо уточнить: в идеальном процессе смешивания плотность вероятности случайного смещения L должна зависеть от положения частицы \mathbf{r} , значения s и направления случайного смещения e только в той мере, в какой этого

требует условие непроникания сквозь стенки, а также ограничение на конфигурацию свободной поверхности материала. Это условие допускает простую аналитическую формулировку

$$(2.3) \quad \begin{aligned} F(\rho, r, s, e, \dots) &\equiv \text{const} && \text{при } r + se \in V, \\ F(\rho, r, s, e, \dots) &\equiv 0 && \text{при } r + se \notin V. \end{aligned}$$

Условие (2.3) фактически равносильно следующей процедуре для сплошной среды. Пусть объем V заполнен произвольной смесью двух сред плотности γ . Разобьем его на V/ω частей и каждую из них равномерно растянем до V . Плотность будет равна $\gamma\omega/V$. Затем все эти части вложим друг в друга. Плотность вернется к прежнему значению γ . Ясно, что при $\omega \rightarrow 0$ такая процедура даст гомогенное распределение для любых начальных состояний. Равенства (2.3) как раз представляют собой вероятностный аналог такой процедуры для среды, состоящей из дискретных частиц.

Итак, для того чтобы процесс смешивания был предельно эффективным по качеству и скорости, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий: а) все плотности вероятностей случайных смещений частиц от их свойств зависеть не должны; б) многомерные плотности вероятностей должны быть такими, чтобы выполнялось только условие совместности смещений, в остальных отношениях поведение различных частиц, включая соседние, должно быть независимым друг от друга; в) одномерная плотность вероятностей должна зависеть от положения частицы, величины и направления ее случайного пробега только в той мере, в какой этого требует условие непроникания частиц сквозь стенки и ограничение на конфигурацию свободной поверхности.

Условия а—в дают описание идеального процесса на формальном языке плотностей вероятностей. Попробуем на их основе найти конструктивные признаки идеального процесса.

3. Принципы реализации идеального процесса смешивания. Выше рассматривали положения частиц в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots$, т.е. фактически анализировали только результаты обработки материала после каждого цикла перемешивания. Для конструктивного описания необходимо исследовать поведение материала и внутри каждого цикла. Обозначим через l величину смещения частицы, идентифицированной параметром ρ :

$$(3.1) \quad l = r(\rho, 0) - r(\rho, t).$$

Для $0 < t < 1$ это будет смещение внутри первого цикла. Аналогично определяем смещения для второго цикла и т.д. При $t \neq 0, 1, \dots$ материал может находиться вне емкости V , так что в общем случае $r(\rho, t) \notin V$. Теперь задачу можно поставить таким образом: какими должны быть смещения (3.1), чтобы результат каждого цикла соответствовал условиям а—в?

Здесь вступает в силу одно очевидное соображение. Предположим, что смещения (3.1) внутри цикла удовлетворяют каким-то ограничениям. Ясно, что и результат цикла также будет удовлетворять этим ограничениям. Будем использовать только указанное достаточное условие. Иными словами, наложим ограничения а—в не только на смещения (2.1), но и на (3.1). Это позволяет выделить некоторые конструктивные признаки процесса.

Согласно условию а, смещения частиц не должны зависеть от их типа. В природе есть единственный нетривиальный процесс, при котором кинематика движения не зависит ни от веса, ни от размеров, ни от каких-либо других характеристик частиц, — свободное падение в поле тяжести. Отсюда следует, что частицам смеси необходимо дать возможность свободно падать вниз (это центральное место всех построений). Из условия а также вытекает, что для легких частиц или больших скоростей процесс смешивания должен осуществляться в вакууме.

Рассмотрим теперь коллективное поведение частиц. Условие б требует, чтобы в пределах совместности были независимыми смещения любых частиц. Связанность в поведении далеких частиц — это экзотика. Практически связанность осуществляется только через непосредственные контакты между

частицами. Поэтому речь должна идти о процессе, в котором осуществлялись бы независимые смещения соседних частиц. Однако если между ними есть контакт, то поведение будет обязательно зависимым. Поэтому в идеальном процессе смесь необходимо разредить в пространстве так, чтобы контакты исчезли и появилась возможность независимых относительных смещений между частицами.

Таким образом, теоретическое описание идеального случая предопределяет следующие основные черты реального процесса: 1) частицам смеси необходимо дать возможность свободно падать вниз; 2) смесь необходимо разредить в пространстве, чтобы контакты между соседними частицами исчезли; 3) в процессе падения частицам необходимо придавать случайные компоненты скорости; 4) любое транспортирование материала вверх, если в нем есть необходимость, должно сводиться только к смещению образца как жесткого целого (это тривиальный случай, когда кинематика от свойств частиц также не зависит).

Следующий естественный вопрос — как подобный процесс реализовать? В принципе возможно множество технических решений, которые в той или иной степени приближаются к идеальному. Рассмотрим один из них.

4. Пример технической реализации. Хорошо известно, что любое пересыпание смеси порошков приводит к их разделению вследствие сегрегации. Поэтому операцию пересыпания лучше исключить. Это означает, что емкость V (накопитель), в которой необходимо расположить однородную смесь, является частью смесителя. Выше показано, что собственно смешивание должно осуществляться в условиях свободного падения частиц. Это накладывает ограничение на форму накопителя, а именно: его боковая поверхность должна быть получена движением вертикальной образующей. Предположим для определенности, что V представляет собой прямой круговой цилиндр. Для того чтобы иметь возможность разредить смесь в пространстве, дополним накопитель до цилиндрического контейнера (рис. 1). Будем считать, что вертикальный размер контейнера ограничен, так что времени однократного падения частиц по его высоте недостаточно для полного смешивания. В этом случае необходимо организовать периодический процесс, включающий в себя транспортирование материала вверх. Так как условию a можно удовлетворить только при движении смеси вниз, то во время транспортирования ее вверх необходимо вообще отказаться от создания каких-либо относительных смещений частиц. Такое транспортирование можно осуществить путем резкого поворота контейнера вокруг горизонтальной оси. Скорость поворота должна быть такой, чтобы центробежная сила удерживала смесь от преждевременного пересыпания. Эту скорость легко рассчитать. Труднее дать строгий расчет режима торможения в верхней точке. При торможении появляются силы инерции, которые могут привести к потере устойчивости материала. Поэтому торможение не должно быть очень резким (указанное ограничение можно снять, если материал сверху закрывать заслонкой).

Итак, после поворота контейнера смесь находится в его верхней точке и затем свободно падает вниз. На рис. 1 стрелками отмечено направление силы тяжести (a — исходное состояние, b — состояние после поворота). Ясно, что свободное падение к перемешиванию еще не приведет. Если из положения b образец предоставить самому себе, то он будет смещаться вниз как жесткое целое. Конечно, практически за счет взаимодействия со стенками и, может быть, каких-то привходящих факторов относительные смещения частиц все же будут. Но рассчитывать на них было бы принципиально неверно. Подобные смещения должны рассматриваться только как возмущения идеального процесса. Поэтому смещения частицам должны задаваться некоторым принудительным образом, чтобы была определенная «гарантия» их случайности.

Остановимся на варианте, когда горизонтальная компонента задается одним устройством, а вертикальная — другим. Причем во время падения задается только горизонтальная компонента. Соответствующее устройство обозначим символически буквой G (см. рис. 1). Пусть оно занимает слой $z_1 \leq z \leq z_2$. Если частица поступает в устройство G в точке с горизонтальными

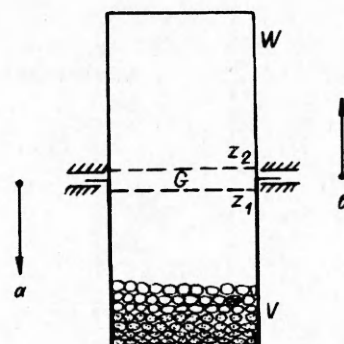
координатами (x, y) , то покидает G , имея другие координаты ξ, η (ξ и η — случайные величины). В пространстве это соответствует переходу частицы из точки (x, y, z_1) в точку (ξ, η, z_2) ; причем порядок следования частиц по вертикали не меняется: если на G приходят последовательно две частицы с каким-то определенным расстоянием по вертикали, то покидают G они с новыми горизонтальными координатами и прежним расстоянием по вертикали.

Результат работы такого смесителя очевиден. При первом повороте контейнера частицы пройдут через устройство G и попадут в часть контейнера W . Затем при втором повороте частицы пройдут еще раз через G и снова окажутся в емкости V . В итоге каждая частица получит только горизонтальное смещение. Поэтому любые неоднородности смеси по вертикали таким смесителем сглаживаться не будут. Причина здесь ясна и заложена в самой конструкции устройства G . Однако если на нее посмотреть немного по-другому, то можно предположить способ осреднения смеси и по вертикали.

Действительно, причину отсутствия вертикальной компоненты можно интерпретировать таким образом: частицы, которые приходят в часть контейнера W раньше, после его переворота возвращаются на устройство G позже. Причем этот порядок строгий и от факта случайности смещений в горизонтальной плоскости не зависит. Отсюда следует, что для получения вертикальной случайной компоненты указанный порядок необходимо искусственно изменить. В такой постановке естественно следующее решение. Разобьем емкость W вертикальными стенками на ячейки различной глубины (рис. 2). Тогда частицы, поступившие в набор ячеек первыми, при последующем перевороте возвратятся на устройство G не обязательно последними. Все будет зависеть от глубины ячейки, в которую они попадут. Но поскольку глубина ячейки, в свою очередь, зависит от положения в горизонтальном сечении, которое для частицы является случайным, то появится и вертикальная случайная компонента смещения.

Введение разноглубинных ячеек позволяет решить и проблему разрезания смеси в пространстве. При повороте контейнера в положение b (рис. 2) вначале на устройство G приходит материал из самой мелкой ячейки, затем из более глубокой и т.д.

Таким образом, принципиальная схема технического решения ясна. Рассмотрим теперь его подробнее. Выше было показано, что частицам независимо от их типа должны задаваться именно скорости, а не импульсы или энергии. Поэтому рабочие органы устройства G должны выполняться так, чтобы кинематика их движения не зависела от количества и свойств частиц, с которыми они взаимодействуют. Можно рассмотреть ряд вариантов, предусматривающих введение привода внутрь контейнера, например колеблющихся или вращающихся в различных направлениях вертикальных пластин, в качестве привода использовать также корпус самого смесителя. Действительно, во время падения частица не связана с корпусом. Поэтому ее относительное смещение получается, если дать ускоренное движение не частице, а корпусу (например, дать крутильные колебания средней части смесителя). Таких колебаний вполне достаточно, чтобы привести в движение рабочие органы устройства G . Их можно выполнить в виде упругих элементов, закрепленных на обоих концах. Тогда они будут колебаться так же, как и корпус. Если элементы закрепить на одном конце, то получим большую амплитуду и частоту. При этом параметры колебаний будут зависеть от упругих характеристик элементов, односторонних ограничителей амплитуды и др.



Р и с. 1

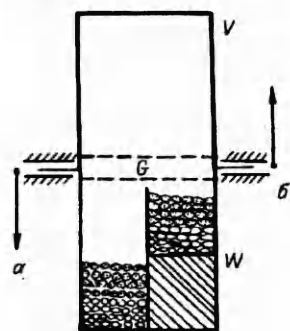


Рис. 2

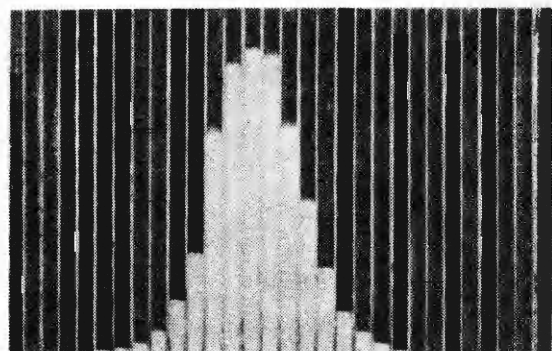


Рис. 3

В одном из вариантов устройство G выполнялось в виде пакета хаотически уложенной проволоки или металлических стружек. В этом случае колебания корпуса служили стимулом для прохождения порошков сквозь лабиринт. Следует отметить, что вибрационное воздействие на частицы допускается только во время их движения вниз. В момент, когда частицы ложатся друг на друга, воздействия должны прекращаться, так как вибрация упаковки приведет к ухудшению однородности смеси. Поэтому части контейнера V и W , в которых материал накапливается, подвергаться колебаниям не должны.

Итак, узел горизонтального перемешивания характеризуется большим числом параметров. Каким образом их оптимизировать? Прямое экспериментальное исследование весьма трудоемко в связи со сложностью анализа качества смеси и зависимостью конечного результата от множества факторов. Поэтому необходимо найти отдельную для узла G оценку эффективности его работы и проводить оптимизацию, исходя из нее.

Это можно сделать таким образом. Обозначим через P плотность вероятности координат ξ, η — вероятность того, что частица, поступившая на устройство G в точке с горизонтальными координатами x, y , покинет его в окрестности $d\xi \times d\eta$ точки ξ, η , равна $P(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta$. Функцию P можно определить экспериментально. Для этого поместим под устройство G плоский набор ячеек, разделенных вертикальными стенками (индикатор) (рис. 3). В точку (x, y) подадим тонкую струю исследуемого материала (δ -функцию). Тогда частицы, перемещенные устройством G в окрестности точки (ξ, η) , попадут в соответствующую ячейку индикатора и будут накапливаться в ней. Кривую распределения уровней материала по различным ячейкам можно наблюдать визуально (передняя стенка индикатора стеклянная). Эта кривая будет сечением поверхности $P(x, y, \xi, \eta)$ при фиксированных x, y . Здесь следует отметить простой факт. Непосредственно в опытах получается график в осях с линейным масштабом. Крутизна графика пропорциональна времени подачи струи материала. Поэтому время подачи всегда можно выбрать так, чтобы функция P определялась достаточно точно. Для того чтобы экспериментальную кривую считать сечением поверхности P , масштаб по вертикальной оси необходимо нормировать. Располагая информацией о плотности распределения P , можно оперативно проследить, как меняется эффективность работы устройства при варьировании его различных параметров, конструктивных элементов и т.д. Зависимость от координат x, y позволяет оценить влияние боковых стенок. Из сравнения плотностей P для различных материалов видно, насколько работа устройства чувствительна к типу частиц.

Для теории большое значение имеет вопрос о взаимодействии частиц внутри устройства G (вопрос о линейности). Проведем следующие опыты. Подадим поочередно струю материала в точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Получим соответствующие графики P_1, P_2 . Затем осуществим одновременную подачу материала в эти же точки. Результат обозначим через P_{12} . Если $P_{12} = P_1 + P_2$ (для кривых без нормировки), то взаимодействием можно

пренебречь (линейность). Если же равенство нарушается, то взаимодействие есть и процесс становится нелинейным. Прodelывая аналогичные опыты для трех и более точек, можно полностью выяснить характер нелинейности.

Каким критерием руководствоваться при оценке работы устройства G ? Из условий а, б следует, что идеальное устройство работает так, что плотность вероятности P не зависит от типа частиц и координат, т.е. $\varphi \equiv \text{const}$. Это значит, что во всех опытах ячейки индикатора должны выполняться равномерно. Поэтому эффективность реального устройства необходимо оценить по отклонению функции P от постоянной.

Можно поставить задачу теоретического определения всех плотностей вероятности по известной конструкции устройства и его параметрам. Например, если устройство представляет собой пакет хаотически уложенной проволоки, то плотности определяются методами теории случайных блужданий [4].

Рассмотрим теперь работу устройства горизонтального смешивания с несколько иной точки зрения. Предположим, что на вход подается распределение частиц, которое характеризуется функцией $\varphi_0(x, y)$. На выходе получится новое распределение частиц $\varphi_1(\xi, \eta)$. Работу устройства можно рассмотреть как действие оператора G на функцию φ_0 : $G\varphi_0 = \varphi_1$. Задание оператора G равносильно полному описанию всех плотностей вероятностей P_1, P_2, \dots . Из закона сохранения массы следует

$$(4.1) \quad \int_S G\varphi dS = \int_S \varphi dS$$

(S — горизонтальное сечение). Идеальному устройству соответствует оператор, который любую функцию переводит в постоянную: $G\varphi \equiv C$. Значение постоянной определяется равенством (4.1). Для неидеального устройства $G\varphi \neq C$. Однако если сделать последовательность преобразований $G \dots G = G^n$, то с увеличением n распределение должно стремиться к равномерному $G^n\varphi \rightarrow C$. Этот факт можно использовать для оценки эффективности устройства G . Например, принять за норму эффективности величину $0 < 1/n \leq \leq 1$, где n — наименьшее из чисел, при которых $G^n\varphi$ можно считать постоянной. Из равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} G^n\varphi = C$ вытекает, что равномерный поток частиц после прохождения через устройство G должен переходить в равномерный же (условие однородности):

$$(4.2) \quad GC = C.$$

Определенный интерес представляют смешанные постановки, когда оператор G известен для некоторой высоты устройства ($z_2 - z_1$) (например, высоты пакета хаотически уложенной проволоки) и требуется определить высоту (не обязательно кратную ($z_2 - z_1$)), обеспечивающую выполнение условия $G\varphi \approx \text{const}$.

Отметим, что эффективной работы устройства G можно добиться всегда. Если оно работает неэффективно, то необходимо последовательно по вертикали расположить n устройств. Таким образом, вопрос об эффективности работы устройства случайных горизонтальных смещений эквивалентен вопросу о его высоте. В дальнейшем предположим, что все характеристики устройства G заранее известны из опытов с индикаторными ячейками.

Остановимся на некоторых экспериментальных результатах*. На рис. 3 — показано распределение частиц при подаче струи сухого кварцевого песка. В качестве устройства G использовался пакет хаотически уложенной медной проволоки $\varnothing 0,5$ мм, высотой 30 мм и относительной плотностью 6%. Распределение является практически нормальным. Интересно отметить, что крутизна нормированного профиля зависит от скорости подлета частиц: —большие скорости приводят к несколько более пологой кривой. Эксперименты

* Все опыты проводились совместно с А.П. Бобряковым.

показывают, что взаимодействие частиц большой роли не играет даже при подаче не слишком разреженного потока. Это означает, что соответствующий оператор G является практически линейным.

Рассмотрим теперь подробнее блок W , который обеспечивает вертикальное перемешивание. Все его параметры носят геометрический характер. К ним относятся форма и поперечные размеры ячеек, их глубина и порядок размещения. Блок W работает вполне детерминированно. Случайность вертикальной компоненты пробега частицы целиком определяется тем фактом, что случайной является его горизонтальная компонента. В связи с этим можно ожидать, что оптимальные параметры W связаны с вероятностными характеристиками устройства горизонтального смещения. Например, почти очевидно, что если устройство G работает идеально ($G\varphi = \text{const } \forall \varphi$), то порядок размещения ячеек в пространстве значения не имеет. Подобные обстоятельства затрудняют строгое исследование задачи оптимизации W . Поэтому ограничимся только приближенными критериями.

Одно из назначений узла вертикального перемешивания состоит в том, чтобы «разносить» первоначально близкие частицы. Всегда есть шанс, что частицы, которые были близкими после выхода из устройства горизонтального смещения, попадут в соседние ячейки с различной глубиной. Это приведет к тому, что их дальнейшие пути существенно разойдутся. Поэтому чем длиннее граница между ячейками (а значит, и меньше их размеры), тем эффективнее устройство. С другой стороны, поперечные размеры ячеек ограничены условием свободного высыпания материала из них. Эти два обстоятельства позволяют легко определить поперечные размеры ячеек.

Далее, выбор формы ячеек сводится к задаче разбиения данной области (круга) на подобласти. Имея в виду технологические трудности при реализации экзотических разбиений, остановимся на частных случаях, когда некоторые простые разбиения заранее заданы (квадратные, треугольные и шестиугольные). Обозначим через k общее число ячеек и перенумеруем их в порядке возрастания глубины: $1 = h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq \dots \leq h_k = h_{\max}$. Здесь глубина самой мелкой ячейки принята за единицу (ее абсолютное значение должно быть таким, чтобы не было переполнения).

Спектр глубин ячеек можно выбирать, исходя из условия наиболее равномерного разрежения смеси в пространстве. Если некоторые ячейки имеют одинаковые глубины, то материал из них на устройство G придет одновременно. Следовательно, большое разрежение будет в случае равномерного спектра: $h_{i+1} - h_i = \text{const}$. Ограничимся только этим вариантом.

Теперь основной вопрос — каким образом разместить ячейки в пространстве, т.е. куда следует поместить самую глубокую ячейку, какой глубины ячейку необходимо поставить рядом с ней и т.д.? Очевидно, что у близких частиц гораздо больше шансов попасть в разные ячейки, соприкасающиеся по грани, чем в ячейки, соприкасающиеся по ребру. Поэтому естественно предположить, что размещение ячеек должно быть таким, чтобы средняя величина ступеньки между ячейками была наибольшей:

$$(4.3) \quad R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |h_i^+ - h_i^-| \rightarrow \max.$$

Здесь M — общее число внутренних граней; h_i^+ , h_i^- — глубины ячеек, имеющих общую грань с номером i . Анализ показывает, что невозможно добиться существенного различия в глубинах всех ячеек, окружающих некоторую фиксированную. Поэтому (не располагая общим доказательством) примем, что большего значения R можно добиться за счет уменьшения разницы в глубинах ячеек, контактирующих по ребру. Оставшийся произвольным уменьшим следующим образом. Выясним, каким наименьшим числом красок можно раскрасить разбиение, чтобы соседние ячейки были разных цветов. Для разбиений, показанных на рис. 4, 5, достаточно, очевидно, двух цветов. Разобьем спектр глубин ячеек на две части. Ячейки белого цвета будем относить к первой части спектра (группа мелких ячеек), а черного цвета —

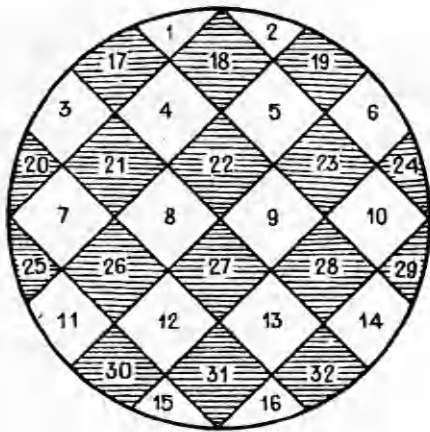


Рис. 4

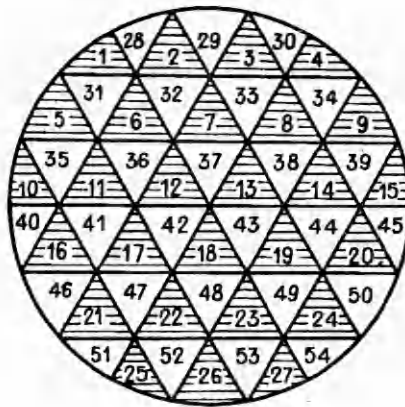


Рис. 5

ко второй части спектра (группа глубоких ячеек). Указанных выше условий достаточно для выбора конкретных размещений.

Вопрос о размещении шестиугольных ячеек (рис. 6) решается аналогично. Для раскраски шестиугольного разбиения достаточно трех цветов. Разделим спектр глубин ячеек на три группы. Ячейки одного цвета всегда должны иметь номера из одной группы. На рис. 4—6 приведены примеры конкретного размещения, удовлетворяющего перечисленным требованиям (числа означают номера соответствующих ячеек).

Следующий вопрос — абсолютное различие глубины ячеек, h_{max} . Предположим, что устройство горизонтального смешивания однородно, т.е. имеет место равенство (4.2). Тогда после прихода материала из всех ячеек его свободная поверхность будет горизонтальной. Однако в промежуточные моменты времени поверхность материала горизонтальной не будет. Например, если одна из ячеек расположена гораздо ближе других, то на устройство горизонтального смешивания придет материал вначале только из нее и может образоваться профиль типа, изображенного на рис. 3. В таком профиле текущее значение угла наибольшего ската $\alpha(t)$ может превысить угол естественного откоса материала φ . Это приведет к растеканию материала, а следовательно, и к сегрегации. Для исключения сегрегации наложим на параметры смесителя следующее ограничение:

$$(4.4) \quad \alpha(t) < \varphi.$$

Если зафиксированы параметры устройства горизонтального смешивания и размещение ячеек, то неравенство (4.4) однозначно определит верхнюю оценку h_{max} .

Итак, в целом принципы создания конструкций «идеальных» смесителей ясны. Однако этого еще не достаточно для реализации действующих устройств. В реальном смесителе всегда будут малые конечные отклонения от любых заранее сформулированных условий типа равенств. Для условий типа неравенств ситуация проще — таким условиям всегда можно точно удовлетворить. Возникает вопрос, к каким последствиям приведут указанные малые отклонения, будут ли основные показатели смесителя (факт перехода смеси к однородному состоянию и время перехода) устойчивы к возмущениям или нет. Численное исследование

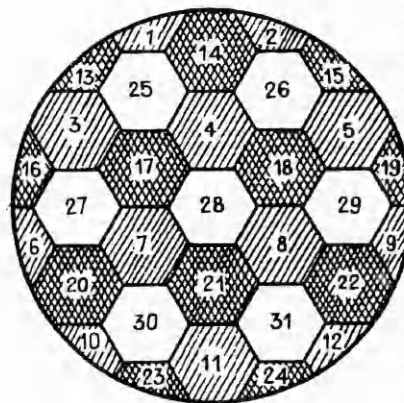


Рис. 6

кинетики процесса показывает, что принятые выше принципы действительно обеспечивают полное перемешивание и, самое главное, показывают, что процесс к возмущениям устойчив [5]. Это означает, что полученные результаты можно использовать для создания действующих эффективных смесителей порошковых материалов [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров Ю.И. Аппараты для смешения сыпучих материалов. — М.: Машиностроение, 1973.
2. Ревуженко А.Ф. Принципы создания идеальных смесителей порошковых материалов // Порошковая металлургия. — 1989. — № 4.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Стохастическая гидромеханика. Механика турбулентности. — М.: Наука, 1965. — Ч. 1.
4. Сципер Ф. Принципы случайного блуждания. — М.: Мир, 1969.
5. Bobryakov A.P., Kramarenko V.I., Revuehenko A.F., Shemyakin E.I. Theoretical models of powder mining // Intern. Conference on Powder Metallurgy, London, 1990. — S. 1: Inst. of Metals, 1990. — V. 3.
6. А.с. 1172582 СССР. Способ смешивания сыпучих материалов и устройство для его осуществления / В.Г. Безродный, А.П. Бобряков, Б.В. Назаров и др. // Открытия. Изобретения. — 1985. — № 30.

г. Новосибирск

Поступила 14/VII 1993 г.

УДК 539.3

Ю.А. Боган

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОМ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ

В данной работе рассмотрены две известные задачи в теории упругости (о распределении напряжений в эллиптической области, контактная задача для полуплоскости) с точки зрения влияния сильной анизотропии. Напомним, что материал называется сильно анизотропным, если модуль Юнга в заданном направлении значительно больше, чем в ортогональном. В частности, изучен предельный случай, когда материал в пределе нерастяжим. Обнаружено, что задача расчета упомянутых выше конструкций имеет ряд специфических особенностей.

1. Распределение напряжений в эллиптической области. В [1, 2] предложен метод расчета ортотропных пластин, основанный на том, что для многих материалов отношение комплексных параметров является малым. Этот метод основан также на разложении комплексных потенциалов $\Phi_k (k = 1, 2)$ в ряд по неотрицательным степеням малого параметра. Ниже на примере явного решения краевой задачи для эллиптической области показано, что разложение в ряд одного из комплексных потенциалов начинается с отрицательной степени малого параметра, а также, что решение предельной задачи имеет особенность типа квадратного корня в точках касания характеристики предельного уравнения и границы.

Примем обобщенный закон Гука для ортотропного материала в виде

$$\sigma_{11} = c_{11}u_{1x_1} + c_{12}u_{2x_2}, \quad \sigma_{22} = c_{12}u_{1x_1} + c_{22}u_{2x_2}, \quad \sigma_{12} = c_{66}(u_{1x_2} + u_{2x_1}),$$

где u_1, u_2 — перемещения; c_{ij} — коэффициенты упругости. Введем безразмерные напряжения и жесткости, положив

$$d_{ij} = c_{ij}c_{66}^{-1}, \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}c_{66}^{-1}, \quad i, j = 1, 2$$

© Ю.А. Боган, 1994