

AMSC subject classification: 58D30

Численное решение задачи о гидроударе на основе метода наименьших квадратов с новой методикой адаптивного уточнения

М. Лашкарболок

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Golestan University, Aliabad Katoul, Iran

E-mail: m.lbolok@gu.ac.ir

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 17, 2024.

Лашкарболок М. Численное решение задачи о гидроударе на основе метода наименьших квадратов с новой методикой адаптивного уточнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 4. — С. 407–424.

Представлены результаты применения численного метода для решения одномерных гиперболических уравнений. Эти уравнения моделируют динамику жидкости в трубе с меняющимся поперечным сечением. Уравнения записаны в терминах напора и расхода. Для численного моделирования используются радиальные базисные функции и оптимизация методом наименьших квадратов. Этот численный метод предназначен для работы с произвольным распределением узлов в области задачи. Основы применения численного метода были изложены в нашей предыдущей работе. В данной работе мы скорректировали применяющиеся ранее методы, отказались от использования временно-маршевого подхода и использовали метод адаптивного уточнения. Описаны три случая моделирования системы резервуар–труба–клапан, показывающие, что модель воспроизводит четкий градиент времени.

DOI: 10.15372/SJNM20240404

EDN: BKRGYF

Ключевые слова: пространственно-временная формулировка, радиальные базисные функции, адаптивное уточнение, стратегия перемещения узлов, метод наименьших квадратов.

Lashkarbolok M. A numerical solution of the water-hammer problem based on the least-squares method with a new adaptive refinement technique // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 4. — P. 407–424.

The manuscript presents the results of an application of a numerical method to solve one-dimensional hyperbolic equations. These equations simulate the dynamics of a liquid in a pipe with varying cross-sections. The equations are written in terms of pressure-head and discharge. Radial-basis functions and least-squares optimization are used for the numerical simulation. This numerical method is specialized for working with arbitrary nodal distribution in the problem domain. The basics of the application of the numerical method were introduced in our previous work. In the current work, we updated previously applied methods by means of getting rid of the time-marching approach and applying another adaptive refinement technique. Three cases of the simulations of the reservoir-pipe-valve system are described, indicating that the sharp time-gradient phenomenon is reproduced by the model.

Keywords: space-time formulation, radial basis functions, adaptive refinement, node-movement strategy, least squares technique.

1. Введение

Любое быстрое изменение импульса потока жидкости под давлением вызывает бегущую волну давления, называемую гидроударом. Если это явление не учитывать долж-

ным образом, оно может вызвать повреждение гидравлического оборудования. Система гиперболических уравнений в частных производных описывает это явление математически, а метод характеристик (МХ) является общепринятым подходом для численного моделирования задачи [1]. Несмотря на эффективность и простоту, МХ не так легко использовать для решения задач с изменяющимися физическими свойствами, например при меняющихся свойствах материала стенок или поперечного сечения трубы. Также трудно применять метод адаптивного уточнения с использованием МХ или других подходов, основанных на временно-маршевых методах [2, 3], вследствие изменяющегося во времени положения волнового фронта или разрыва решения. Пространственно-временной подход, представленный в [4–6], применяется во многих научных задачах, в основном в контексте метода конечных элементов (МКЭ), а также для анализа адаптивного уточнения нестационарных задач. Халберт и Хьюз [7] использовали пространственно-временной МКЭ для решения задач эластодинамики, включающих резкие градиенты. Они доказали безусловную устойчивость и высокий порядок точности пространственно-временной конечно-элементной формулировки. Тедзуяр с соавторами [8, 9] представили конечно-элементную стратегию для течений со свободной поверхностью, основанную на пространственно-временной процедуре деформирования пространственной области. Бер [10] использовал этот же метод для трехмерных вычислений методом конечных элементов нестационарных несжимаемых течений со свободной поверхностью. Тедзуяр с соавторами [11] расширили этот метод для численного расчета взаимодействий жидкости со структурой. Некоторые недавние работы в области пространственно-временных конечно-элементных формулировок можно найти в [12–16]. Пространственно-временная формулировка также использовалась в других численных методах. Например, Цварт с соавторами [17] разработали интегрированный пространственно-временной метод конечных объемов для моделирования потока жидкости. Клайдж с соавторами [18] представили разрывный в пространстве–времени метод конечных элементов Галеркина для решения сжимаемых уравнений Навье–Стокса. Нетужилов и Зилиан [19] разработали пространственно-временной бессеточный метод коллокации для решения систем нелинейных обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных путем последовательной дискретизации как в пространственной, так и во временной областях. В данной статье метод радиальной точечной интерполяции используется для аппроксимации функции как во временной, так и в пространственной областях. Метод наименьших квадратов применяется для поиска тех решений, которые минимизируют сумму квадратов невязок, полученных в результате процедуры интерполяции. Метод радиальной точечной интерполяции и оптимизация методом наименьших квадратов [20] использовались для численного решения одномерных уравнений, описывающих неустановившееся течение в трубе. В [20] только пространственная область была дискретизирована с использованием рассеянных узлов, а во временной области использовался временно-маршевый метод. Метод наименьших квадратов широко использовался для решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) при помощи МКЭ [21–23]. Этот же метод был применен для минимизации квадратов невязок в результате использования метода наименьших квадратов [24, 25] и методов радиальной точечной интерполяции [26, 27]. В настоящем исследовании пространственно-временная область одномерных нестационарных задач дискретизируется с использованием узлов, рассеянных в двумерном вычислительном пространстве, для нахождения окончательного решения путем решения линейной системы уравнений. Предлагается точечный подход для дискретизации области. Элементы не используются, но узлы могут быть неравномерно распределены в пространственно-временной области. Этот подход позволяет выполнять эффективный

анализ аддитивного уточнения. Стратегия перемещения узлов основана на градиенте начальных результатов. Узлы смешены в соответствии с температурным анализом ферменной конструкции. Нелинейные граничные условия возникают, когда клапан в задачах гидравлического удара не закрывается мгновенно. В данной статье представлен простой итерационный метод получения граничных условий для гидроудара с немгновенным закрытием клапана. С помощью предложенной методики численно решаются три задачи. Аддитивное узловое распределение используется для дискретизации области и исследуется его влияние на решение.

2. Определяющие уравнения и дискретизация области

Определяющее уравнение одномерной задачи о гидроударе было выведено и подробно описано в [20]. Здесь оно кратко представлено. Рассмотрим течение без трения (в z -направлении) слабо сжимаемой жидкости в осесимметричной неоднородной горизонтальной круглой трубе радиуса $R(z)$. При предположении небольшого изменения площади поперечного сечения $\frac{dR(z)}{dz} \ll 1$ радиальной составляющей скорости можно пре-небречь, что приводит к одностороннему потоку. После интегрирования по радиусу трубы [20] уравнения неразрывности и импульса можно записать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где H , c , g , A , Q и t — напор, скорость звука в жидкости, ускорение силы тяжести, площадь поперечного сечения, расход и время соответственно. Граничные условия для уравнений (1) и (2) можно записать в виде

$$H = H_b \text{ в точках, где напор известен (в резервуаре),} \quad (3)$$

$$Q = Q_b \text{ в точках, где расход известен (в клапане),} \quad (4)$$

где H_b и Q_b — напор и расход на соответствующих границах соответственно. Уравнения (1) и (2) решаются одновременно с учетом граничных условий (3) и (4). По сравнению с другими коэффициентами в определяющих уравнениях коэффициент $\left(\frac{c^2}{g}\right)$ намного больше единицы (порядка 10^5 в водонаполненных стальных трубах) и таким образом влияет на число обусловленности окончательной матрицы коэффициентов. Эта задача решается путем обезразмеривания определяющих уравнений, так что все члены становятся членами первого порядка. Безразмерные напор H_* , расход Q_* , время t_* , координата z_* , скорость звука c_* , площадь поперечного сечения A_* и ускорение силы тяжести g_* определяются следующим образом:

$$H_* = H \frac{g_0 A_0}{Q_0 c_0}, \quad Q_* = \frac{Q}{Q_0}, \quad t_* = \frac{t c_0}{L_0}, \quad z_* = \frac{z}{L_0}, \quad c_* = \frac{c}{c_0}, \quad A_* = \frac{A}{A_0}, \quad g_* = \frac{g}{g_0},$$

где A_0 , Q_0 , c_0 , L_0 и g_0 — базовая площадь поперечного сечения, расход, скорость звука, длина трубы и ускорение силы тяжести соответственно. Вставив безразмерные переменные в определяющие уравнения и граничные условия (1)–(4), получим безразмерные определяющие уравнения и граничные условия:

$$\frac{\partial H_*}{\partial t_*} + \frac{c_*^2}{g_* A_*} \frac{\partial Q_*}{\partial z_*} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_*}{\partial t_*} + g_* A_* \frac{\partial H_*}{\partial z_*} = 0, \quad (6)$$

$$H_* = H_{b*} \text{ в точках, где напор известен (в резервуаре),} \quad (7)$$

$$Q_* = Q_{b*} \text{ в точках, где расход известен (в клапане),} \quad (8)$$

где $H_{b*} = H_b \frac{g_0 A_0}{Q_0 c_0}$, $Q_{b*} = \frac{Q_b}{Q_0}$. Все коэффициенты в определяющих уравнениях (5)–(8) будут близки к единице, если для базовых параметров будут выбраны правильные значения. В данной статье радиальные базисные функции (РБФ) используются для аппроксимации функций, а масштабированная вычислительная область повышает ее качество [28]. В качестве начальных условий рассматриваются $Q = Q_0$ и $H = H_b$. Заметим, что поскольку применяется пространственно-временная формулировка, начальные условия превращаются в граничные условия на границе $t_* = 0$. Лашкарболок и Тейсселинг [20] представили метод, основанный на РБФ и методе наименьших квадратов, для решения задачи о гидроударе. В данной статье используем те же методы, но в пространственно-временной области. Подробная формулировка методики представлена в приложении. Мы не используем каких-либо временно-маршевых методов, а пространство–время – это наша вычислительная двумерная область, которая дискретизируется с использованием рассеянных узлов. Пространственно-временная область $z_* - t_*$ дискретизируется с использованием N произвольно распределенных узлов, как показано на рисунке 1. На рис. 1 r_k определяется выбором числа опорных узлов k -й точки коллокации. Были выбраны 25 опорных узлов для каждой точки коллокации во всех тестовых задачах.

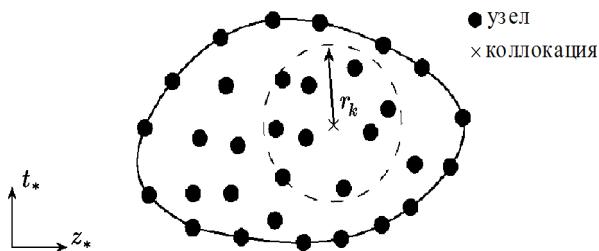


Рис. 1. Дискретизация выборочной области; сплошная и пунктирная линии показывают границу области и локальную область точки коллокации соответственно

3. Метод адаптивного уточнения

Процедура адаптивного уточнения используется для целенаправленной дискретизации области задачи. Здесь предлагается метод перемещения узлов, основанный на градиенте начального решения. В этом методе узлы смещаются в сторону положений, где требуется более высокая точность. Пошаговое описание процедуры следующее.

Шаг 1. Дискретизация пространственно-временной области с использованием равномерного распределения узлов, как показано на рис. 2 а.

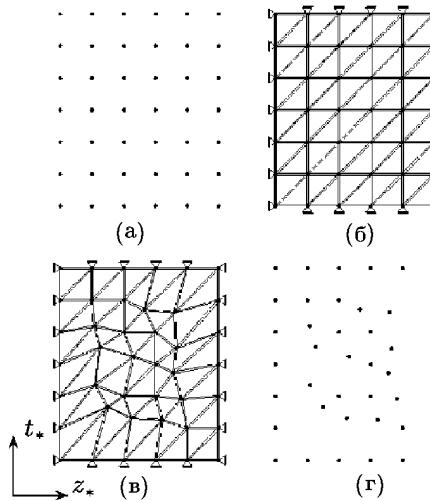


Рис. 2. Первичное равномерное узловое распределение (а), геометрия ферменной конструкции (б), новая конфигурация элементов фермы после температурной загрузки (в) и адаптивное узловое распределение (г)

Шаг 2. Решение уравнений (5)–(8) и получение результатов с использованием метода, предложенного в [20]. Модифицированный градиент напора E рассчитывается следующим образом:

$$E = \ln \left(1 + \sqrt{\left(\frac{\partial H_*}{\partial t_*} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_*}{\partial z_*} \right)^2} \right). \quad (9)$$

Шаг 3. Соединение всех узлов с использованием элементов фермы [29, с. 67–89] и [30, с. 103–119], как показано на рис. 2б. Несущие опоры рассматриваются для узлов на границах.

Шаг 4. Определение температуры для каждого элемента фермы. Температура m -го элемента фермы $\theta(m)$ (рис. 3) вычисляется следующим образом:

$$\theta(m) = -\frac{E_i + E_j}{2}. \quad (10)$$

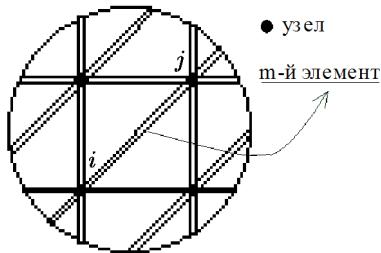


Рис. 3. m -й элемент с соединениями

Шаг 5. Новые положения стыков ферм определяются путем расчета вызванных температурой перемещений с использованием обычного МКЭ для анализа элементов фермы [30, с. 111–114]. Для получения перемещений узлов фермы необходима площадь поперечного сечения элементов фермы, умноженная на модуль упругости AE и коэффициент линейного расширения γ . AE и γ — настраиваемые параметры в

нашей стратегии перемещения узлов для корректировки относительных расстояний между узлами. Более высокое значение γ и меньшее значение AE приводят к более плотному распределению узлов. Новая конфигурация элементов фермы (рис. 2 в) дает новые положения узлов на рис. 2 г. Новое адаптивное распределение узлов используется для решения уравнений (5)–(8).

Блок-схема описанной выше пятишаговой процедуры показана на рис. 4.

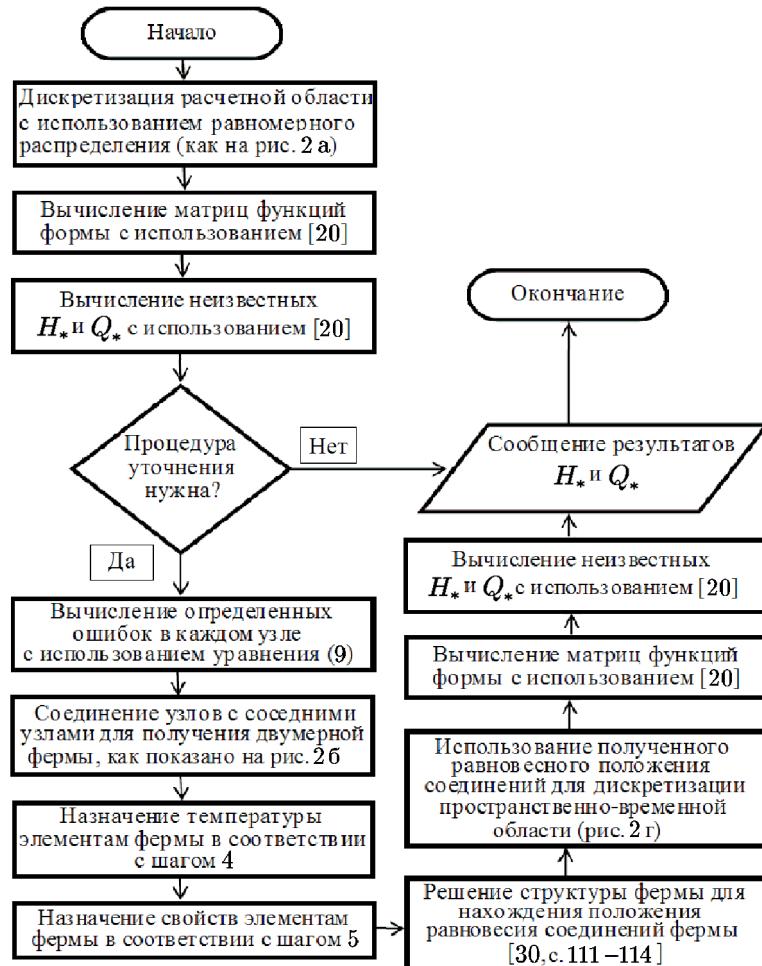


Рис. 4. Блок-схема процедуры адаптивного уточнения

4. Нелинейное немгновенное закрытие клапана

Рисунок 5 показывает систему резервуар–труба–клапан. Когда клапан закрывается постепенно, существует взаимосвязь между расходом, напором и временем закрытия T_c на границе клапана. Например, используя измерение расхода шарового клапана из [31] на клапане ($z_* = 1$ для $l = l_0$), мы имеем

$$Q_* = \tau \sqrt{\frac{H_*}{H_{b*}}}, \quad (11)$$

где τ — функция времени, определяемая как в [31]:

$$\tau = \begin{cases} \left(1 - \frac{t_*}{Tc_*}\right)^{3.53}, & t_* \leq 0.4Tc_*, \\ 0.394 \left(1 - \frac{t_*}{Tc_*}\right)^{1.7}, & 0.4Tc_* \leq t_* \leq Tc_*, \\ 0, & Tc_* \leq t_* \leq Tend, \end{cases} \quad (12)$$

где $Tend$ — безразмерное время окончания моделирования, Tc_* вычисляется следующим образом:

$$Tc_* = Tc \frac{c_0}{L_0}. \quad (13)$$

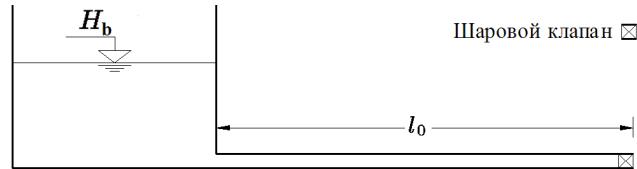


Рис. 5. Система резервуар–труба–клапан

Рисунок 6 показывает расчетную область системы резервуар–труба–клапан с нелинейным граничным условием на клапане.

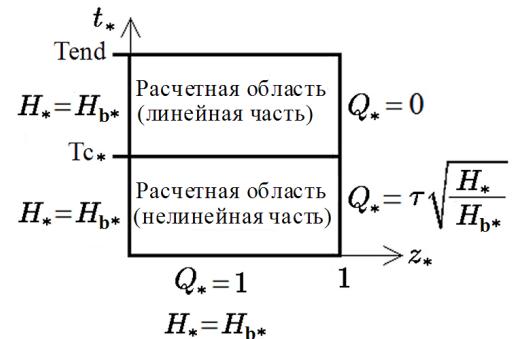


Рис. 6. Расчетная область с граничным условием нелинейного немгновенного закрытия клапана

На рис. 6 расчетная область разделена на две части. В нелинейной части выполняется нелинейное граничное условие, поскольку Q_* — нелинейная функция неизвестной H_* на границе. В линейной части выполняются линейные граничные условия и решаются определяющие уравнения с использованием процедуры, предложенной в пункте 3. Для решения таких задач предлагаются следующие шаги.

Шаг 1. Нелинейная часть рассматривается в качестве расчетной области. Другими словами, расчетная область ограничена $0 \leq t_* \leq Tc_*$ и $0 \leq z_* \leq 1$.

Шаг 2. H_* предполагается равным H_{b*} на границе клапана. Таким образом, Q_* на этой же границе — Q_{b*} , вычисляется как $Q_{b*} = \tau$. Этот шаг считается нулевой итерацией $iter = 0$.

Шаг 3. Теперь Q_{b*} известно на границе клапана. Используя известные граничные условия, уравнения (5)–(8) решаются для получения Q_* и H_* в расчетной области $0 \leq t_* \leq Tc_*$ и $0 \leq z_* \leq 1$.

Шаг 4. Скорректированное Q_{b*} рассчитывается с использованием скорректированного H_* на границе клапана ($z_* = 1$) следующим образом:

$$Q_{b*} = \tau \sqrt{\frac{H_*}{H_{b*}}}.$$

Шаг 5. Критерий сходимости $Cindex$ определяется следующим образом:

$$Cindex = \frac{\sum_{i=1}^{nb} (Q_{b*,i}^{iter-1} - Q_{b*,i}^{iter})^2}{nb}, \quad iter \geq 1, \quad (14)$$

где nb — число узлов в нелинейной части границы клапана, $Q_{b*,i}^{iter-1}$ и $Q_{b*,i}^{iter}$ — это Q_* на i -м граничном узле на $(iter - 1)$ -й итерации и Q_* на i -м граничном узле на $iter$ -й итерации соответственно. Если $Cindex \leq \varepsilon$, переходим на Шаг 6, в противном случае переходим на Шаг 3.

Шаг 6. С использованием Q_* в результате сходимости на границе клапана уравнения (5)–(8) решаются для получения Q_* и H_* во всей расчетной области $0 \leq t_* \leq Tend$ и $0 \leq z_* \leq 1$.

5. Примеры

В данном пункте мы решим три задачи для оценки эффективности предлагаемой схемы. Во всех задачах рассматривается большая система резервуар–труба–клапан для исследования истории напора на шаровом клапане во время и после закрытия клапана. Здесь и далее напор P_h определяется как

$$P_h = \frac{(H - H_b)g_0 A_0}{Q_0 c_0}. \quad (15)$$

Время закрытия клапана Tc предполагается с учетом граничных условий, определенных в уравнениях (12)–(14). Для равномерного узлового распределения $\Delta z_* = \Delta t_* = 0.02$, где Δz_* и Δt_* — равномерные расстояния между узлами вдоль направлений z_* и t_* соответственно. Общие характеристики всех задач приведены в таблице.

Таблица. Необходимые параметры для тестовых задач

c_0	Q_0	g и g_0	A_0	l и l_0	H_b	AE	γ	ε
$1025.7 \left(\frac{m}{s} \right)$	$0.5 \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$9.81 \left(\frac{m}{s^2} \right)$	$0.50(m^2)$	$20(m)$	$100(m)$	$10^6(N)$	$0.1 \left(\frac{1}{^{\circ}C} \right)$	10^{-8}

5.1. Задача 1

Рассмотрим систему резервуар–труба–клапан на рис. 5. Здесь $Tend$ равно 8 и $c = c_0$. Задача решается для трех различных времен закрытия клапана: 0.01, 0.03 и 0.07 с. Для каждого Tc задача сначала решается с использованием равномерного узлового распределения. Затем решение повторяется с использованием аддитивного узлового распределения. Чтобы показать сходимость Q_* в нелинейной части границы клапана, значения Q_* показаны на различных итерациях при $Tc = 0.03$ с или $Tc_* = 1.5386$ на рис. 7. Хорошо видно, что процедура нахождения граничного условия на нелинейной границе в этом случае быстро сходится. В соответствии с процедурой вычисления нелинейных гранич-

ных условий для клапана, описанной в п. 5, нелинейная часть просто учитывается в итерационном решении для нахождения Q_* на границе клапана.

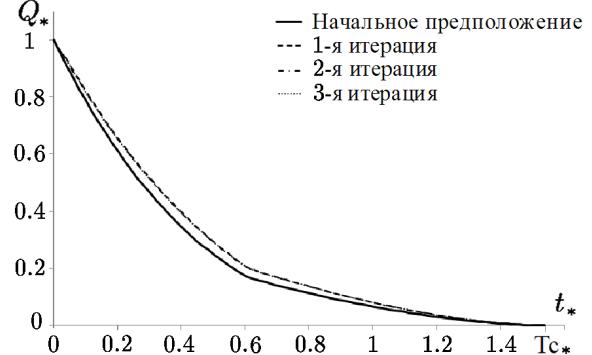


Рис. 7. Сходимость Q_* в нелинейной части расчетной области для задачи 1 при $T_c = 0.01$ с

Равномерное и соответствующее адаптивное узловые распределения (число узлов одинаково) для задачи 1 при $T_c = 0.01$ с показаны на рис. 8 а и 8 б соответственно. История напора на клапане для $T_c = 0.01$ с представлена на рис. 9. Видно, что адаптивное узловое распределение лучше, чем равномерное узловое распределение. Быстрое закрытие клапана создает давление Жуковского, или $P_h = 1$, только если время закрытия T_c меньше времени отражения волны $2l/c$ [31].

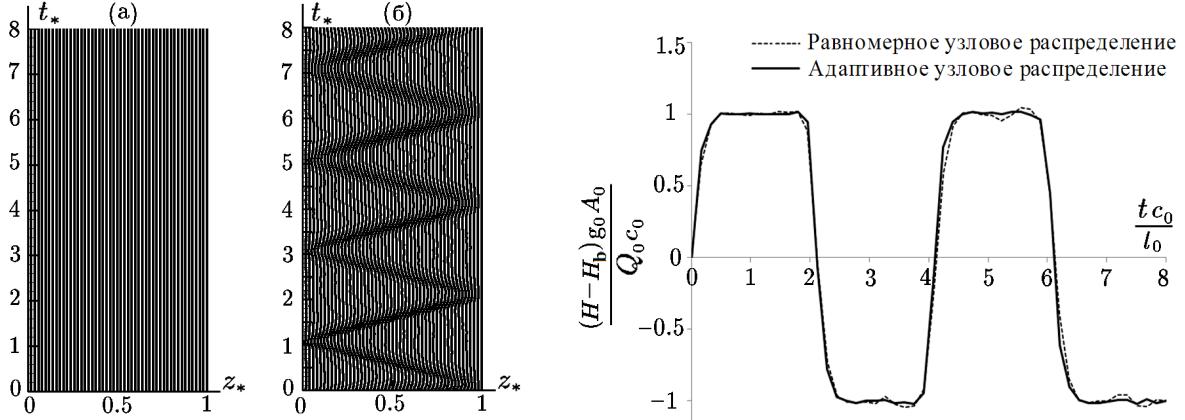


Рис. 8. Равномерное узловое распределение (а) и адаптивное узловое распределение (б) для задачи 1

Рис. 9. Напор на клапане при $T_c = 0.01$ с с использованием равномерного и адаптивного узловых распределений в задаче 1

Время отражения волны в этой задаче равно 0.039 с. На рис. 10 показана история напора на клапане с использованием адаптивного узлового распределения в различные моменты времени закрытия. Результаты показывают неплохую тенденцию к давлению Жуковского при уменьшении T_c . Мы использовали 20400 узлов для дискретизации области, как показано на рис. 8 а. В предлагаемом методе, если N точек используется для дискретизации области, необходимо решить линейную систему уравнений с $2N$ неизвестными, поскольку уравнения сохранения массы и импульса связаны неявным образом. Время, необходимое для решения системы из 40800 уравнений и 40800 неизвестных, составило около 17 с с использованием процессора AMD Phenom(tm) II X6 1090T. Код написан в MATLAB, а вычисления выполнены с использованием модулей параллельных вычислений с разреженными матрицами. Представленный метод не имеет предела дискретизации и разброс точек на пространственно-временной плоскости может быть произвольным. Это позволяет нам применять адаптивную дискретизацию области и, в

отличие от временно-маршевых методов, мы можем получить результаты более высокого качества без увеличения числа узлов при дискретизации и, следовательно, без увеличения вычислительных затрат. Хотя на первый взгляд предлагаемый метод дороже, чем временно-маршевые методы, его возможности специальной дискретизации области могут сделать его пригодным для численного решения некоторых задач в области нестационарного течения жидкости.

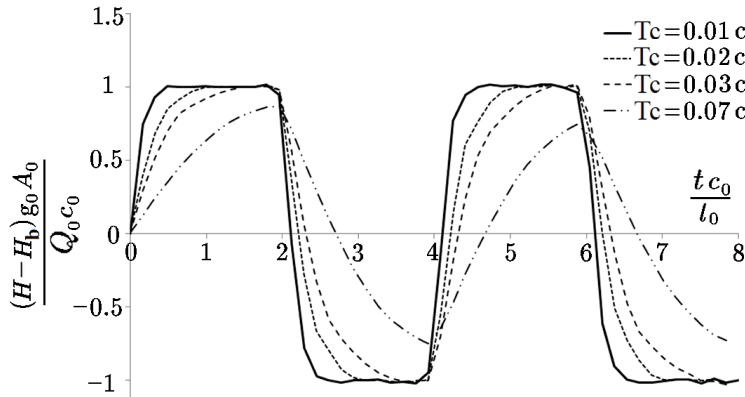


Рис. 10. Напор на клапане в задаче 1 с использованием аддитивного узлового распределения

5.2. Задача 2

Предполагается, что участок трубы в задаче 1 имеет различные механические свойства. Таким образом, скорость звука (c) изменяется вдоль трубы, как показано на рис. 11. Эта задача была сформулирована ранее и решена численно в [31]. Изменение c в расчетной области показано на рис. 12. История напора в различное время закрытия клапана рассчитывается с помощью процедуры, описанной в задаче 1. Влияние аддитивного узлового распределения на качество результатов при $Tc = 0.01$ с показано на рис. 13. Можно увидеть, что лучшие результаты получаются при использовании специальной дискретизации области. Рисунок 14 показывает влияние Tc на историю напора на клапане. В этой задаче при любом времени закрытия получается более высокий напор, чем в задаче 1, ввиду различных механических свойств трубы. Как и ожидалось, повышение давления уменьшается при более медленном закрытии клапана.

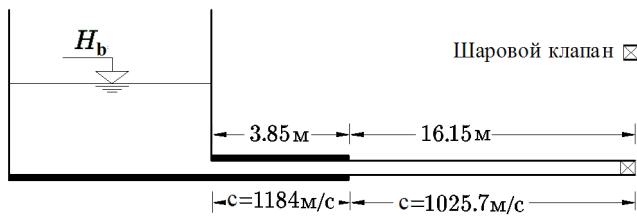


Рис. 11. Свойства трубы в задаче 2

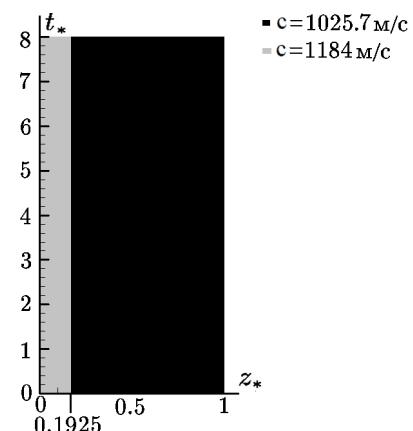


Рис. 12. Скорость звука (c) в расчетной области задачи 2

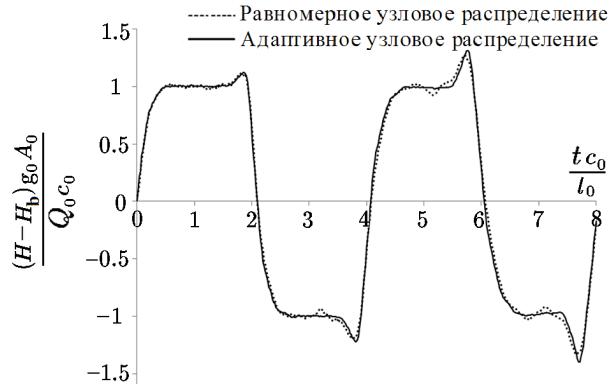


Рис. 13. История напора на клапане при $T_c = 0.01$ с в задаче 2

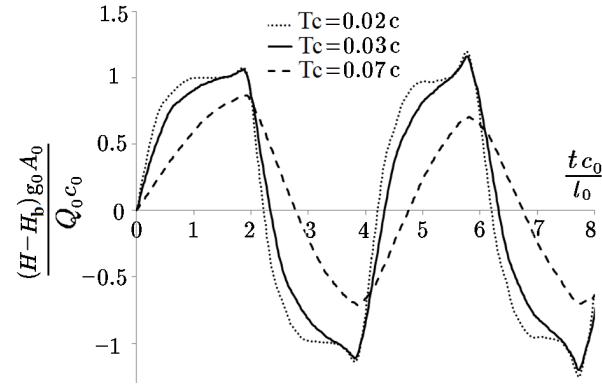


Рис. 14. История напора на клапане при различных T_c в задаче 2

5.3. Задача 3

Труба в задаче 1 заменена на коническую трубу, показанную на рис. 15. Площадь поперечного сечения трубы у резервуара равна A_0 и линейно возрастает до $2.5A_0$ на клапане. Здесь T_{end} равно 12 и $c = c_0$.

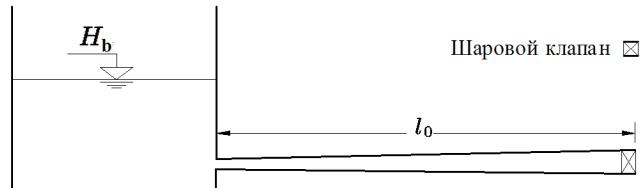


Рис. 15. Система резервуар–коническая труба–клапан для задачи 3

Адаптивное узловое распределение на рис. 16 а получено с использованием той же процедуры решения, что и в задаче 1. Задача решена с использованием адаптивного узлового распределения для получения истории напора на клапане при $T_c = 0.01$ с. На рис. 16 б показано распределение напора в расчетной области. Согласно результатам, при предлагаемом адаптивном узловом распределении, большее число узлов находится в областях с более высокими градиентами. Численные результаты при временах закрытия клапана 0.01 с и 0.07 с, а также аналитическое решение, полученное при $T_c = 0$ [32], по-

казаны на рис. 17. Результаты снова показывают неплохую тенденцию динамики напора к аналитическому результату за счет сокращения времени закрытия клапана.

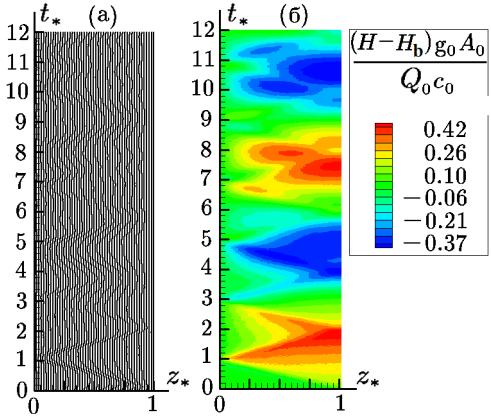


Рис. 16. Адаптивное узловое распределение и распределение напора для задачи 3 при $T_c = 0.01$ с

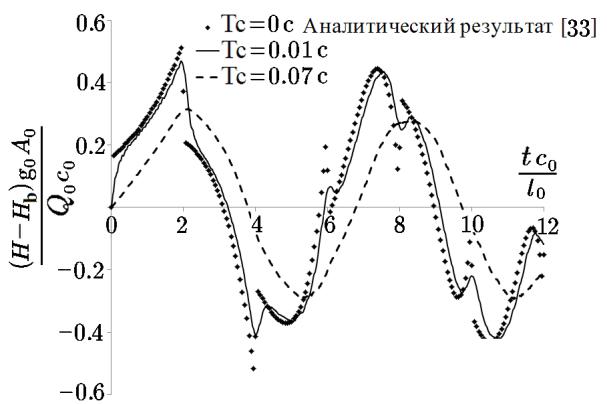


Рис. 17. История напора на клапане для задачи 3

6. Вывод

Представлен метод, основанный на пространственно-временной формулировке, для решения одномерной задачи о гидроударе. Время и пространство были дискретизированы в пространственно-временной области с использованием разбросанных узлов. Пространственно-временная формулировка делает возможным адаптивный анализ в нестационарных задачах. Была представлена методика адаптивного перемещения узлов посредством температурного анализа двумерных элементов фермы. Представлен алгоритм, основанный на простом итерационном методе, для решения задачи о гидроударе с нелинейными граничными условиями. Предложенные схемы использовались для решения трех задач. Результаты показали возможности метода при решении задач о гидроударе с изменяющимися механическими свойствами и нелинейными границами. Представленный подход был сформулирован в векторной форме так, чтобы вся вычислительная процедура состояла из некоторой матричной алгебры на разреженных матрицах.

Приложение

Здесь представлена матричная формулировка для численного решения уравнений (1), (2). Для прояснения формулировки все матричные переменные заключены в рамки, векторы показаны жирным шрифтом, а скаляры показаны курсивом. Предположим, что пространственно-временная область $z_* - t_*$ дискретизирована с использованием N произвольно расположенных узлов, как показано на рис. 1 данной статьи. Значение неизвестной функции χ на i -м узле с координатами (z_{*i}, t_{*i}) показано при помощи χ_i . Значение неизвестной функции χ_k при (z_{*k}, t_{*k}) , которая не обязательно является узловой точкой (называется точкой коллокации), интерполируется следующим образом:

$$\chi_k \cong \beta_0 + \beta_1 z_{*k} + \beta_2 t_{*k} + \sum_{i=1}^B \lambda_i \Phi\left(\frac{\ell_{ik}}{2r_k}\right), \quad (\text{A-1})$$

$$\ell_{ik} = \sqrt{(z_{*k} - z_{*i})^2 + (t_{*k} - t_{*i})^2}, \quad (\text{A-2})$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_b$ — неизвестные коэффициенты, которые будут вычислены позднее. Предполагается, что только узлы B (B гораздо меньше N), ближайшие к любой точке коллокации, влияют на χ_k . Они генерируют опорную область k -й точки коллокации (см. рис. 1). Как показано на рис. 1, r_k — это расстояние между k -й точкой коллокации и самым дальним узлом ее локальной области. Функция Φ в уравнении (A-1) — это некоторая РБФ. Для подгонки кривой использовались различные РБФ [33, с. 70]. Здесь для Φ используется функция четвертой степени [33, с. 45]:

$$\Phi(d) = \frac{2}{3} + \frac{9}{2}d^2 + \frac{19}{3}d^3 - \frac{5}{2}d^4, \quad 0 \leq d \leq 1. \quad (\text{A-3})$$

Полиномы в интерполяционной функции (A-1) обеспечивают воспроизведение линейного поля (C^1 -согласованность). Сообщается (см. [33, с. 75]), и мы пришли к этому выводу, что добавление полиномов также повышает точность результатов и снижает чувствительность параметров формы в РБФ к точности решения. Эта интерполяция согласована с порядком полиномов, используемых в формулировке, и имеет свойство дельта-функции Кронекера. Подробно свойства аппроксимации с использованием РБФ обсуждались в [33]. Неизвестные коэффициенты ($\beta_0, \beta_1, \beta_2$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_b$) для коллокации с координатами (z_{*k}, r_{*k}) получены путем одновременного решения следующей системы уравнений [33, с. 75–78]:

$$\beta_0 + \beta_1 z_{*k} + \beta_2 t_{*k} + \sum_{i=1}^B \lambda_i \Phi(\ell_{ik}) = \chi_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, B, \quad (\text{A-4})$$

где χ_i^k — значение i -й соседней точки коллокации с координатами (z_{*k}, t_{*k}) . Для получения неизвестных коэффициентов необходимы еще три уравнения:

$$\sum_{i=1}^B \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^B \lambda_i z_{*i}^k = 0, \quad \sum_{i=1}^B \lambda_i t_{*i}^k = 0, \quad (\text{A-5})$$

где (z_{*i}^k, t_{*i}^k) для $i = 1, 2, \dots, B$ — координаты соседних точек k -й коллокации. Теперь мы имеем $B+3$ уравнения для получения $B+3$ неизвестных коэффициентов. Коэффициенты подставляются в уравнение (A-1) для получения следующего соотношения:

$$\chi_k \cong \tilde{\chi}_k = \sum_{i=1}^B \psi_i^k \chi_i^k, \quad (\text{A-6})$$

где ψ — функция (z_*, t_*) , называемая функцией формы, и ψ_i^k — значение ψ в i -й соседней точке k -й коллокации. Предположим, что в области дискретизации имеется M точек коллокации и N узловых точек (они могут быть равными, как предполагается здесь $N = M$). Векторы $\tilde{\pi}$ и π определяются следующим образом:

$$\tilde{\pi} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_M \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_N \end{bmatrix}, \quad (\text{A-7})$$

где $\tilde{\pi}$ и π — векторы, содержащие приближенные значения неизвестной функции χ в точках коллокации и узловых точках соответственно, χ_i в π обращается к значению функции χ в i -м узле, тогда как χ_i в $\tilde{\pi}$ обращается к значению функции χ в i -й точке коллокации. Уравнение (A-6) используется для связи $\tilde{\pi}$ и π следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \cdots & \psi_{1,N} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \cdots & \psi_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \psi_{M,1} & \psi_{M,2} & \cdots & \psi_{M,N} \end{bmatrix} \boldsymbol{\pi}, \quad (\text{A-8})$$

где $\psi_{i,k}$ для $i = 1, 2, \dots, N$ и $k = 1, 2, \dots, M$ — значения i -й функции формы в k -й точке коллокации. Уравнение (A-8) можно переписать в компактной форме как

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = [\psi] \boldsymbol{\pi}, \quad (\text{A-9})$$

$M \times N$ -матрица $[\psi]$ — сильно разреженная матрица из-за небольшого числа узлов в опорной области точек коллокации (B гораздо меньше N). Работа с разреженными матрицами весьма желательна в численных методах ввиду того, что требуется меньше вычислений и меньше оперативной памяти. Поэлементные производные матрицы функции формы относительно z_* и t_* , а также $\frac{\partial[\psi]}{\partial t_*}$ и $\frac{\partial[\psi]}{\partial z_*}$ получены из уравнения (A-1). Неизвестные векторы, напор и расход в точках коллокации аппроксимируются следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{H}}_* = [\psi] \mathbf{H}_*, \quad (\text{A-10})$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_* = [\psi] \mathbf{Q}_*, \quad (\text{A-11})$$

где $\tilde{\mathbf{H}}_*$, $\tilde{\mathbf{Q}}_*$, \mathbf{H}_* и \mathbf{Q}_* — векторы, содержащие значения H_* и Q_* во всех точках коллокации и узловых точках соответственно. Невязки в результате подстановки уравнений (A-10) и (A-11) в уравнения (5)–(8) следующие:

$$\frac{\partial[\psi]}{\partial t_*} \mathbf{H}_* + \frac{c_*^2}{g_*} (1./\mathbf{A}_*) \bullet \frac{\partial[\psi]}{\partial z_*} \mathbf{Q}_* = \mathbf{R}_1, \quad (\text{A-12})$$

$$\frac{\partial[\psi]}{\partial t_*} \mathbf{Q}_* + g_* \mathbf{A}_* \bullet \frac{\partial[\psi]}{\partial z_*} \mathbf{H}_* = \mathbf{R}_2, \quad (\text{A-13})$$

$$[\psi_1] \mathbf{H}_* - \mathbf{H}_{b*} = \mathbf{R}_3 \quad \text{в точках, где напор известен,} \quad (\text{A-14})$$

$$[\psi_2] \mathbf{Q}_* - \mathbf{Q}_{b*} = \mathbf{R}_4 \quad \text{в точках, где расход известен,} \quad (\text{A-15})$$

где \mathbf{H}_{b*} и \mathbf{Q}_{b*} — векторы, содержащие граничные значения. Для построения матриц функций формы для граничных узлов $[\psi_1]$ и $[\psi_2]$ те элементы матрицы $[\psi]$, которые не связаны с узлами на границах, заменяются нулями. \mathbf{A}_* — вектор, содержащий площадь поперечного сечения в точках коллокации. Оператор точечного деления “ $.$ ” в уравнении (A-12) обращает каждый элемент \mathbf{A}_* . Умножение вектора на матрицу обозначено символом “ \bullet ”. Это определяется как произведение матрицы на матрицу, причем диагональная матрица включает элементы вектора. Пример умножения вектора на матрицу:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \cdots & \psi_{1,N} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \cdots & \psi_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \psi_{M,1} & \psi_{M,2} & \cdots & \psi_{M,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \cdots & \psi_{1,N} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \cdots & \psi_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \psi_{M,1} & \psi_{M,2} & \cdots & \psi_{M,N} \end{bmatrix}. \quad (\text{A-16})$$

Сумму квадратов невязок J можно записать как

$$J = \frac{1}{2} \left(\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 + \alpha \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_3 + \alpha \mathbf{R}_4^T \mathbf{R}_4 \right), \quad (\text{A-17})$$

где T — знак транспонирования. В данном исследовании невязки на границах масштабируются при помощи положительного числа α для применения граничных условий (это то же самое, что и известный метод штрафов в методе конечных элементов) [34, с. 104–107]. Чем выше значение α , тем лучше будут ограничения [34, с. 105]. Те значения неизвестных \mathbf{Q}_* и \mathbf{H}_* , которые минимизируют J , дают желаемые решения. Они находятся следующим образом:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{H}_*} = 0, \quad (\text{A-18})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{Q}_*} = 0. \quad (\text{A-19})$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial t_*} \left(\frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial t_*} \mathbf{H}_* + \frac{c_*^2}{g_*} (1./\mathbf{A}_*) \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial z_*} \mathbf{Q}_* \right) + g_* \mathbf{A}_* \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial z_*} \left(\frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial t_*} \mathbf{Q}_* + g_* \mathbf{A}_* \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial z_*} \mathbf{H}_* \right) + \dots + \\ \alpha \boxed{\psi_1}^T \left(\boxed{\psi_1} \mathbf{H}_* - \mathbf{H}_{b*} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

$$\begin{aligned} \frac{c_*^2}{g_*} (1./\mathbf{A}_*) \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial z_*} \left(\frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial t_*} \mathbf{H}_* + \frac{c_*^2}{g_*} (1./\mathbf{A}_*) \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial z_*} \mathbf{Q}_* \right) + \dots + \\ \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial t_*} \left(\frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial t_*} \mathbf{Q}_* + g_* \mathbf{A}_* \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial z_*} \mathbf{H}_* \right) + \alpha \boxed{\psi_2}^T \left(\boxed{\psi_2} \mathbf{Q}_* - \mathbf{Q}_{b*} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

С использованием уравнений (A-20) и (A-21) систему уравнений можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \boxed{k_{11}} & \boxed{k_{12}} \\ \boxed{k_{21}} & \boxed{k_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_* \\ \mathbf{Q}_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A-22})$$

где

$$\boxed{k_{11}} = \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial t_*} \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial t_*} + (g_* \mathbf{A}_*)^2 \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial z_*} \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial z_*} + \alpha \boxed{\psi_1}^T \boxed{\psi_1}, \quad (\text{A-23})$$

$$\boxed{k_{12}} = \frac{c_*^2}{g_*} (1./\mathbf{A}_*) \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial t_*} \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial z_*} + g_* \mathbf{A}_* \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial z_*} \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial t_*}, \quad (\text{A-24})$$

$$\boxed{k_{21}} = \frac{c_*^2}{g_*} (1./\mathbf{A}_*) \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial z_*} \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial t_*} + g_* \mathbf{A}_* \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial t_*} \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial z_*}, \quad (\text{A-25})$$

$$\boxed{k_{22}} = \left(\frac{c_*^2}{g_*} (1./\mathbf{A}_*) \right)^2 \bullet \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial z_*} \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial z_*} + \frac{\partial \boxed{\psi}^T}{\partial t_*} \frac{\partial \boxed{\psi}}{\partial t_*} + \alpha \boxed{\psi_2}^T \boxed{\psi_2}, \quad (\text{A-26})$$

$$\mathbf{F}_1 = \alpha \begin{bmatrix} \psi_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{H}_{\mathbf{b}*}, \quad (\text{A-27})$$

$$\mathbf{F}_2 = \alpha \begin{bmatrix} \psi_2 \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{b}*}. \quad (\text{A-28})$$

Литература

1. **Wylie E.B., Streeter V.L.** Fluid Transients. — New York: McGraw-Hill Intern. Book Co., 1978.
2. **Kochupillai J., Ganesan N., Padmanabhan C.** A new finite element formulation based on the velocity of flow for water hammer problems // Intern. J. Pressure Vessels Piping. — 2005. — Vol. 82, iss. 1. — P. 1–14. — DOI: 10.1016/j.ijpvp.2004.06.009.
3. **Afshar M.H., Rohani M.** Water hammer simulation by implicit method of characteristic // Intern. J. Pressure Vessels Piping. — 2008. — Vol. 85, iss. 12. — P. 851–859. — DOI: 10.1016/j.ijpvp.2008.08.006.
4. **Argyris J.H., Scharpf D.W.** Finite elements in time and space // Aeronautical J. — 1969. — Vol. 73, iss. 851. — P. 1041–1044.
5. **Fried I.** Finite-element analysis of time-dependent phenomena // AIAA J. — 1969. — Vol. 7, iss. 6. — P. 1170–1173.
6. **Oden J.T.** A general theory of finite elements. II. Applications // Intern. J. Numerical Methods Engineering. — 1969. — Vol. 1, № 3. — P. 247–259. — DOI: 10.1002/nme.1620010304.
7. **Hulbert G., Hughes Thomas J.R.** Space–time finite element methods for second-order hyperbolic equations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1990. — Vol. 84, iss. 3. — P. 327–348.
8. **Tezduyar T.E., Behr M., Liou J.** A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces — the deforming–spatial–domain/space–time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1992. — Vol. 94, iss. 3. — P. 339–351. — DOI: 10.1016/0045-7825(92)90059-S.
9. **Tezduyar T.E., Behr M., Mittal S., Liou J.** A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces — the deforming–spatial–domain/space–time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1992. — Vol. 94, iss. 3. — P. 353–371. — DOI: 10.1016/0045-7825(92)90060-W.
10. **Behr M.** Stabilized space–time finite element formulations for free-surface flows // Communications in Numerical Methods in Engineering. — 2001. — Vol. 17. — P. 813–819.
11. **Tezduyar Tayfun E., Sathe S., Keedy R., Stein K.** Space–time finite element techniques for computation of fluid–structure interactions // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2006. — Vol. 195, iss. 17–18. — P. 2002–2027. — DOI: 10.1016/j.cma.2004.09.014.
12. **Steinbach O.** Space–time finite element methods for parabolic problems // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 1. — P. 551–566. — DOI: 10.1515/cmam-2015-0026.
13. **Takizawa K., Tezduyar Tayfun E., Asada S., Kuraishi T.** Space–time method for flow computations with slip interfaces and topology changes (ST–SI–TC) // Computers & Fluids. — 2016. — Vol. 141. — P. 124–134. — DOI: 10.1016/j.compfluid.2016.05.006.
14. **Feng L.B., Zhuang P., Liu F., Turner I., Gu Y.T.** Finite element method for space–time fractional diffusion equation // Numerical Algorithms. — 2016. — Vol. 72. — P. 749–767. — DOI: 10.1007/s11075-015-0065-8.
15. **Bause M., Radu F.A., Köcher U.** Space–time finite element approximation of the Biot poroelasticity system with iterative coupling // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2017. — Vol. 320. — P. 745–768. — DOI: 10.1016/j.cma.2017.03.017.

16. **Singh G., Wheeler Mary F.** A space-time domain decomposition approach using enhanced velocity mixed finite element method // *J. Computational Physics*. — 2018. — Vol. 374. — P. 893–911. — DOI: 10.1016/j.jcp.2018.08.013.
17. **Zwart P.J., Raithby G.D., Raw M.J.** The integrated space-time finite volume method and its application to moving boundary problems // *J. Computational Physics*. — 1999. — Vol. 154, iss. 2. — P. 497–519. — DOI: 10.1006/jcph.1999.6324.
18. **Klaij C.M., van der Vegt J.J.W., van der Ven H.** Space-time discontinuous Galerkin method for the compressible Navier–Stokes equations // *J. Computational Physics*. — 2006. — Vol. 217. — P. 589–611.
19. **Netuzhylov H., Zilian A.** Space-time meshfree collocation method: Methodology and application to initial-boundary value problems // *Intern. J. Numerical Methods Engineering*. — 2009. — Vol. 80. — P. 355–380.
20. **Lashkarbolok M., Tijsseling Arris S.** Numerical simulation of water-hammer in tapered pipes using an implicit least-squares approach // *Intern. J. Pressure Vessels Piping*. — 2020. — Vol. 187. — Article № 104161. — DOI: 10.1016/j.ijpvp.2020.104161.
21. **Fix George J., Gunzburger Max D., Nicolaides R.A.** On finite element methods of the least squares type // *Computers & Mathematics with Applications*. — 1979. — Vol. 5, iss. 2. — P. 87–98.
22. **Jiang Bo-nan.** The Least-Squares Finite Element Method. — Berlin Heidelberg: Springer, 1998.
23. **Lynn Paul P., Arya Santosh K.** Finite elements formulated by the weighted discrete least squares method // *Intern. J. Numerical Methods Engineering*. — 1974. — Vol. 8. — P. 71–90.
24. **Zhang X., Liu Xiao-Hu, Song Kang-Zu, Lu Ming-Wan** Least-squares collocation meshless method // *Intern. J. Numerical Methods Engineering*. — 2001. — Vol. 51. — P. 1089–1100.
25. **Afshar M.H., Lashkarbolok M.** Collocated discrete least-squares (CDLS) meshless method: Error estimate and adaptive refinement // *Intern. J. Numerical Methods Fluids*. — 2008. — Vol. 56, iss. 10. — P. 1909–1928. — DOI: 10.1002/fld.1571.
26. **Wang Q.X., Li H., Lam K.Y.** Development of a new meshless — point weighted least-squares (PWLS) method for computational mechanics // *Comput. Mech.* — 2005. — Vol. 35, iss. 3. — P. 170–181. — DOI: 10.1007/s00466-004-0611-z.
27. **Kee Bernard B.T., Liu G.R., Lu C.** A regularized least-squares radial point collocation method (RLS–RPCM) for adaptive analysis // *Comput. Mech.* — 2007. — Vol. 40. — P. 837–853. — DOI: 10.1007/s00466-006-0145-7.
28. **Hardy R.L.** Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968–1988 // *Computers and Mathematics with Applications*. — 1990. — Vol. 19. — P. 163–208.
29. **Liu G.R., Quek S.S.** The Finite Element Method: a Practical Course. — Butterworth–Heinemann, 2003.
30. **Chandrpatla Tirupathi R., Belegundu Ashok D.** Introduction to Finite Elements in Engineering. — Prentice Hall, 2002.
31. **Tijsseling Arris S., Bergant A.** Meshless computation of water hammer // *Scientific Bulletin of the “Politehnica” University of Timisoara Transactions on Mechanics*. — 2007. — Vol. 52(66). — P. 65–76.
32. **Yoshizawa M., Ando T.** Water-hammer in a tapered pipe line // *Keio Engineering Reports*. — 1974. — Vol. 27, № 9. — P. 127–140.

33. **Liu G.R.** Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method.—CRC Press, 2010.
34. **Zienkiewicz O.C., Taylor Robert L.** The Finite Element Method: its Pasis and Fundamentals.—Butterworth-Heinemann, 2013.

Поступила в редакцию 28 октября 2023 г.

После исправления 22 мая 2024 г.

Принята к печати 26 августа 2024 г.