

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Исследование законов распространения плоских упругопластических волн в среде с переменным пределом упругости // ПММ.— 1950.— Т. 14, № 1.
2. Кукуджанов В. Н., Никитин Л. В. Распространение волн в стержнях из неоднородного упруго-вязко-пластического материала // Изв. АН СССР. ОТН.— 1960.— № 4.
3. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности.— М.: Мир, 1978.
4. Рахматулин Х. А., Шапиро Г. С. Распространение возмущений в нелинейно упругой и неупругой среде // Изв. АН СССР. ОТН.— 1955.— № 2.
5. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел.— М.: Мир, 1964.
6. Задоян М. А. Распространение пластической зоны в неоднородной трубе при динамическом воздействии давления // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1960.— Т. 13, № 3.
7. Задоян М. А. Об одном классе решений плоской динамической задачи теории пластичности // ДАН СССР.— 1981.— Т. 260, № 1.
8. Соколовский В. В. Теория пластичности.— М.: Высш. шк., 1969.
9. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1959.— Т. 12, № 2.
10. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатга.— М.: Мир, 1979.

Поступила 3/III 1986 г.

УДК 539.376 + 539.019

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

В. А. Заев, А. Ф. Никитенко
(Новосибирск)

Практически все исследования, посвященные оптимальному проектированию элементов конструкций, выполнены в предположении установившейся ползучести и не учитывают того обстоятельства, что разрушению материала предшествует процесс накопления повреждений в нем, сопровождающийся непрерывным перераспределением напряжений. Решение оптимизационных задач с традиционным критерием оптимальности типа равнопрочности в большинстве случаев приводит к неосуществимым проектам.

В связи с этим ниже сформулирована вариационная постановка задачи расчета и проектирования оптимальных по долговечности элементов конструкций. При этом в качестве функционала цели предлагается использовать критерий оптимальности, учитывающий суммарную по объему повреждаемость материала в процессе ползучести. Разработана методика решения этой задачи на основе методов нелинейного программирования.

Пусть тело объемом V , ограниченное поверхностью S , нагружено постоянными во времени поверхностными нагрузками. Система уравнений, описывающая ползучесть материала с одновременным учетом накопления в нем повреждений, имеет вид [1]

$$(1) \quad \dot{p}_{ij} = \frac{\Phi_1}{(1-\omega)^m} \frac{s_{ij}}{2S_2}, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$(2) \quad \dot{\omega} = \Phi_2 / (1-\omega)^m,$$

где Φ_1 , Φ_2 — однородные относительно напряжений функции степени $(n+1)$ и $(g+1)$; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $S_2 = s_{ij}s_{ij}/2$; p_{ij} — компоненты тензора деформации ползучести; ω — параметр повреждаемости; m , n , g — характеристики материала; точка означает дифференцирование по времени.

В начальный момент времени во всех точках тела $\omega(x_k, 0) = 0$, в момент времени t_* в некоторой точке тела с координатами x_k^* ($k = 1, 2, 3$) параметр повреждаемости достигает своего критического значения $\omega(x_k^*, t_*) = 1$ и происходит разрушение материала (t_* — время начала разрушения тела).

Предположим, что скорость полной деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}$ представляет собой сумму компонент тензоров скоростей упругой деформации \dot{e}_{ij} и деформации ползучести

$$(3) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \dot{p}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Компоненты e_{ij} связаны с σ_{ij} законом Гука. Для простоты считаем материал несжимаемым и в упругой области, т. е. $e_{ij}\delta_{ij} = 0$.

В любой точке тела справедливы уравнения равновесия

$$(4) \quad \partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

и соотношения Коши

$$(5) \quad 2\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{u}_i/\partial x_j + \dot{u}_j/\partial x_i,$$

а на поверхности S тела — граничные условия

$$(6) \quad \sigma_{ij}v_j = T_i.$$

Здесь u_i — компоненты вектора перемещений; v_j — компоненты вектора нормали к поверхности S тела; T_i — компоненты вектора внешней нагрузки.

Так как для любого момента времени справедливо неравенство $0 \leq \omega(x_k, t) \leq 1$, то суммарную повреждаемость материала в объеме V на момент времени t_{**} можно оценить функционалом

$$(7) \quad L = \int_V [1 - \omega(x_k, t_{**})] dV_x$$

где $\omega(x_k, t_{**})$ — значение параметра повреждаемости на момент времени $t = t_{**}$, являющийся заданным временем эксплуатации.

Очевидно, что функционал (7) принимает свое абсолютно минимальное значение только в том случае, когда во всех точках тела одновременно параметр повреждаемости достигает своего критического значения $\omega(x_k, t_{**}) = 1$. Это условие соответствует равнопрочному в процессе ползучести элементу конструкции [2]. Выше отмечалось, что реализация равнопрочных конструкций не всегда оказывается возможной и нередко приводит к практически неосуществимым проектам. В связи с этим введем понятие оптимальной по долговечности конструкции.

Тело (элемент конструкции) назовем оптимальным по долговечности, если к некоторому наперед заданному времени t_{**} в материале накопится как можно больше повреждений, иными словами, тело оптимально, если его материал за время эксплуатации t_{**} максимально выработает свой ресурс. Следовательно, задача проектирования оптимальной конструкции сводится, по существу, к отысканию минимального значения функционала (7). При этом компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций должны удовлетворять соотношениям (1)–(6).

Для учета ограничений, накладываемых на конструкцию условиями эксплуатации, технологией изготовления, допустимыми размерами и т. д., систему (1)–(7) следует дополнить соотношениями

$$(8) \quad G_l(x_k, \sigma_{ij}, u_i, \omega) \geq 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots,$$

где G_l — заданные функции, определяемые постановкой задачи.

Таким образом, задача проектирования оптимальной по долговечности конструкции сводится к исследованию функционала цели (7) на условный экстремум с ограничениями (1)–(6), (8).

В дальнейшем будем рассматривать следующую задачу: при заданных внешних нагрузках и температурном режиме определить геометрические размеры конструкции такие, чтобы она была оптимальной по долговечности.

Решение нестационарной вариационной задачи (1)–(8) встречает значительные математические трудности и возможно только с привлече-

нием численных методов и специальных преобразований [3, 4]. Это объясняется тем, что напряженно-деформированное состояние элемента конструкции зависит от координат точек тела и времени, определение их в рамках вариационной задачи представляется весьма сложной проблемой.

В связи с этим сведем исходную вариационную задачу к задаче нелинейного математического программирования [4, 5]. Используя терминологию теории оптимального управления, обозначим через U вектор варьируемых или управляющих параметров конструкции.

В частности, управляющий параметр — геометрические размеры конструкции. Каждому значению U отвечает вектор состояния конструкции Y . Соответствие между U и Y на любой момент времени устанавливается из решения системы (1)–(6).

Накладывая на объем V сетку разбиения, например, прямыми линиями $x_h^{(n)} = x_h^{(0)} \pm (n-1)\Delta x_h$, будем разыскивать значения U_n в узлах сетки разбиения. Заменяя функционал (7) приближенной конечной суммой и записывая ограничения (8) в узлах сетки разбиения, с учетом принятых обозначений получим вместо исходной вариационной задачу нелинейного математического программирования: минимизировать целевую функцию

$$(9) \quad L = \sum [1 - \omega(U_n, Y_n)] \Delta x_h^{(n)}$$

при удовлетворении ограничений

$$(10) \quad G_l(U_n, Y_n) \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots$$

Для решения оптимизационной задачи (9), (10) используем метод локальных вариаций. Он применим к функционалам, зависящим от нескольких переменных и, что особенно важно, к сложным функционалам [4]. Сущность этого метода заключается в отыскании начальных допустимых значений $U_n^{(0)}$ и поочередном изменении этих значений на величину шага варьирования Δh . При этом на каждом шаге варьирования принимаются только те значения $U_n^{(i)} = U_n^{(i-1)} \pm \Delta h$, которые приводят к уменьшению целевой функции (9) и не нарушают ограничений (10). Выполнение серии таких итераций продолжается до тех пор, пока разность между двумя соседними значениями целевой функции не окажется достаточно малой ($|L^{(i)} - L^{(i-1)}| \leq \varepsilon$).

Так как метод локальных вариаций приводит, вообще говоря, к локальному экстремуму, то результат решения задачи во многом зависит от числа точек разбиения, начальных допустимых значений и величины шага варьирования. Поэтому для проектирования оптимальных по долговечности конструкций целесообразно использовать переменный шаг варьирования, определенный таким образом, чтобы изменению подвергались те значения U_n , которые имеют наибольшее влияние на целевую функцию (9). Величину шага варьирования при уменьшении и увеличении управляющего параметра на i -й итерации в n -й точке разбиения будем определять соотношениями

$$(11) \quad \Delta h_n^{-(i)} = h_0 \left[\frac{\bar{\omega}_{\min}^{(i-1)}(x_h^{(n)}, t_{**})}{\bar{\omega}^{(i-1)}(x_h^{(n)}, t_{**})} \right]^\lambda, \quad \Delta h_n^{+(i)} = h_0 \left[\frac{\bar{\omega}^{(i-1)}(x_h^{(n)}, t_{**})}{\bar{\omega}_{\max}^{(i-1)}(x_h^{(n)}, t_{**})} \right]^\lambda,$$

где h_0 — наибольшее значение шага варьирования; $\bar{\omega}^{(i-1)}$ — значение параметра повреждаемости в варьируемой точке на $(i-1)$ -й итерации; $\bar{\omega}_{\min}^{(i-1)}$, $\bar{\omega}_{\max}^{(i-1)}$ — наименьшее и наибольшее значения параметра повреждаемости среди всех варьируемых точек на $(i-1)$ -й итерации; λ — показатель степени. Решение задачи нелинейного программирования (1)–(6), (9), (10) связано с определенными математическими трудностями и требует колоссальных затрат машинного времени. Это обусловливается тем, что при выполнении каждой итерации установление связи между управляющими пара-

метрами U_n и параметрами состояния Y_n , определяемой соотношениями (1)–(6), традиционным методом шагами по времени требует значительных затрат времени на ЭВМ [1, 6]. Если учесть, что число таких итераций велико, то решение поставленной задачи становится неосуществимым даже с использованием современных ЭВМ.

В силу отмеченного обстоятельства расчет и проектирование оптимальных по долговечности конструкций целесообразно проводить на основе приближенного метода, изложенного в [7, 8]. Согласно этому методу, базирующемуся на использовании смешанного вариационного принципа, задача определения напряженно-деформированного состояния конструкции сводится к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести материала. При этом искомое решение на любой момент времени получается умножением решения задачи установившейся ползучести на функции координат и времени, для определения которых получена система интегродифференциальных уравнений [7, 8], решение которой можно получить с минимальными затратами времени на ЭВМ. Использование предлагаемого приближенного метода позволяет свести исходную нестационарную оптимизационную задачу к стационарной, установить на момент времени t_{**} конечную связь между управляющими параметрами U_n и параметрами состояния Y_n и тем самым существенно сократить объем вычислительных операций на ЭВМ.

В качестве примера рассмотрим задачу определения профиля поперечного сечения оптимальной по долговечности балки постоянной высоты h , изгибаемой моментом M , при заданных ограничениях на допустимые размеры ширины балки и уровень напряженного состояния. Время эксплуатации t_{**} считается заданным.

Сформулированная задача с учетом соотношений (7), (8) — минимизировать функционал

$$(12) \quad L = \int_0^{h/2} b [1 - \omega(y, t_{**})] dy$$

при удовлетворении ограничений

$$(13) \quad b_1 \leq b(y) \leq b_2;$$

$$(14) \quad \sigma(y, t_{**}) < \sigma_T.$$

Здесь y — текущая координата по высоте балки; $b(y)$ — ширина сечения балки; b_1, b_2 — минимальный и максимальный допустимые размеры ширины балки; σ_T — предел текучести материала.

При этом должны удовлетворяться основные соотношения задачи ползучести (1)–(6) [7]:

$$(15) \quad 2 \int_0^{h/2} b \sigma y dy = M;$$

$$(16) \quad \dot{\sigma}/E + \dot{p} = \dot{\kappa} y;$$

$$(17) \quad \dot{p} = B_1 \sigma^n / \mu^m;$$

$$(18) \quad \mu = \left[1 - (m+1) B_2 \int_0^t \sigma^{g+1} d\tau \right]^{1/(m+1)},$$

где для Φ_1, Φ_2 в (1), (2) принята степенная зависимость от напряжения $\Phi_1 = B_1 \sigma^{n+1}$, $\Phi_2 = B_2 \sigma^{g+1}$; $\dot{\kappa}$ — скорость кривизны балки, E — модуль упругости. Функция μ связана с параметром повреждаемости ω соотношением

$$(19) \quad \omega = 1 - \mu,$$

полученным путем интегрирования кинетического уравнения повреждаемости (2).

Расчет оптимального профиля будем строить на основе указанного приближенного метода, позволяющего привести исходную нестационарную оптимизационную задачу к стационарной, и метода локальных вариаций с переменным шагом варьирования.

В [7] на основе смешанного вариационного принципа показано, что решение задачи (15)–(19) на любой момент времени имеет вид

$$(20) \quad \sigma(y, t) = \sigma^0 [\mu(y, t)]^{m/n} / X(t).$$

Здесь σ^0 — решение аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести материала

$$(21) \quad \sigma^0 = My^{1/n} / 2 \int_0^{h/2} by^{(n+1)/n} dy.$$

При этом функции $X(t)$ и $\mu(y, t)$ определяются выражениями

$$(22) \quad X(t) = (1 - t/\bar{t}_*^0)^\gamma;$$

$$(23) \quad \mu^{m/n} = \left\{ 1 + \frac{\bar{t}_*^0}{t_*^0} \left[\left(1 - \frac{t}{\bar{t}_*^0} \right)^\nu - 1 \right] \right\}^\beta,$$

где $t_*^0 = [(m+1)B_2\sigma^{0g+1}]^{-1}$;

$$\bar{t}_*^0 = \left[(m+1)B_2 \int_0^{h/2} b\sigma^{0n+g+2} dy / \int_0^{h/2} b\sigma^{0n+1} dy \right]^{-1};$$

$$\beta = m/[n + m(n - g - 1)]; \nu = [n + m(n - g - 1)] / [n(m + 1)]; \gamma = \beta\nu.$$

Разбивая сечение балки по высоте, начиная от срединной поверхности, на l равных частей и заменяя интегралы в выражениях (12), (22), (23) приближенными конечными суммами, с учетом (19), (20)–(23) получим

$$(24) \quad L = \sum_{i=1}^{l+1} b(y_i) \mu(y_i, t_{**}) \Delta y_i;$$

$$(25) \quad b_1(y_i) \leq b(y_i) \leq b_2(y_i);$$

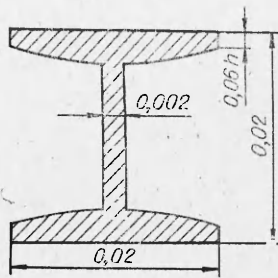
$$(26) \quad \sigma^0(y_i) \mu^{m/n}(y_i, t_{**}) / X(t_{**}) < \sigma_T$$

($\Delta y = h/2l$, $y_i = (i-1)\Delta y$). Значения $\sigma^0(y_i)$, $\mu(y_i, t_{**})$, $X(t_{**})$ в узлах сетки разбиения определяются соотношениями (20)–(23).

Задаваясь некоторым начальным значением профиля балки $b^{(0)}(y_i)$, удовлетворяющим ограничениям (25), (26), из соотношений (23), (24) определим $L^{(0)}$ и $\mu^{(0)}(y_i, t_{**})$.

Поочередно изменяя значения $b^{(0)}(y_i)$ на величину шага варьирования $\Delta b^{(1)}(y_i)$, определяемого выражениями (11), и выбирая только те значения $b^{(1)}(y_i)$, которые приводят к уменьшению целевой функции (24) и удовлетворяют ограничениям (25), (26), получим $b^{(1)}(y_i)$, $L^{(1)}$, $\mu^{(1)}(y_i, t_{**})$. Процедура расчета повторяется до тех пор, пока целевая функция (24) не достигнет своего наименьшего значения, при этом полученные величины $b^{(k)}(y_i)$ будут определять профиль оптимальной по долговечности изгибаемой балки.

Численный расчет оптимального профиля проводили для балки заданной высоты $h = 0,02$ м с фиксированной толщиной полки, равной $0,06 h$, подверженной изгибающему моменту $M = 80$ Нм и выдерживающей заданные нагрузки в течение времени $t_{**} = 323$ ч. При этом ограничения на ширину балки и уровень напряженного состояния, определяемые соотношениями (25), (26), и характеристики материала имели следующие значения [7]:



Р и с. 1

$b_1 = 0,002$ м, $b_2 = 0,02$ м, $\sigma_T = 260$ МПа, $E = 5,6 \cdot 10^4$ МПа, $n = g = 5$, $m = 10$, $B_1 = 1,4043 \cdot 10^{-14}$ (МПа) $^{-n} \cdot \text{ч}^{-1}$, $B_2 = 9,9362 \cdot 10^{-15}$ (МПа) $^{-(g+1)} \cdot \text{ч}^{-1}$. Показатель степени при определении шага варьирования $\lambda = 7$.

На рис. 1 изображен профиль оптимальной по долговечности изгибаемой балки. Интересно отметить, что геометрические размеры прямоугольного поперечного профиля балки, имеющей при тех же нагрузках то же время до разрушения, равны $b = 0,01$ м, $h = 0,02$ м. Сопоставление этих профилей показывает, что вес оптимальной балки уменьшился по сравнению с балкой прямоугольного поперечного сечения на 34%.

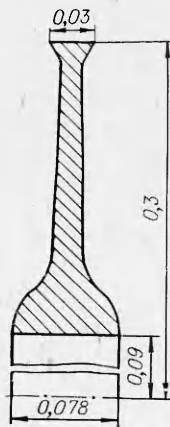
В аналогичной постановке рассматривались задачи проектирования оптимальных по долговечности профилей вращающегося диска, изгибаемых и растягиваемых кольцевых пластин.

На рис. 2 показан оптимальный профиль вращающегося с постоянной угловой скоростью $n_\omega = 5100$ об/мин диска радиуса $r_2 = 0,3$ м с отверстием радиуса $r_1 = 0,09$ м, подверженного воздействию лопаточной нагрузки $p = 40$ МПа. Время эксплуатации $t_{*p} = 550$ ч. При этом характеристики материала и ограничения на допустимые размеры толщины диска следующие: $E = 6 \cdot 10^4$ МПа, $n = 5,62$, $g = 5$, $m = 9$, $B_1 = 0,3224 \cdot 10^{-12,62}$ (МПа) $^{-n} \cdot \text{ч}^{-1}$, $B_2 = 0,3375 \cdot 10^{-13}$ (МПа) $^{-(g+1)} \cdot \text{ч}^{-1}$, $\sigma_T = 260$ МПа, $h_1(r_2) = h_2(r_2) = 0,03$ м, $h_1(r) = 0,015$ м, $h_2(r) = 0,08$ м, $\lambda = 4$. Интересно отметить, что время эксплуатации диска постоянной толщины, подверженного воздействию тех же самых нагрузок, $t_{**} = 316$ ч. Из этого следует, что при одинаковом весе конструкции время эксплуатации оптимального диска увеличилось по сравнению с диском постоянной толщины в 1,74 раза.

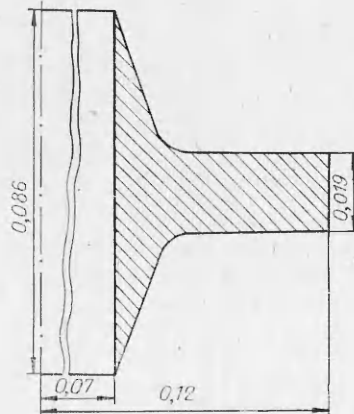
На рис. 3 представлен профиль оптимальной пластины радиуса $r_2 = 0,12$ м с внутренним отверстием радиуса $r_1 = 0,07$ м, подверженной равномерно распределенному по внешнему контуру изгибающему моменту интенсивности 8,5 Нм и выдерживающей заданные нагрузки в течение времени $t_{**} = 276$ ч. При этом $n = 5$, $g = 5$, $m = 10$, $E = 5,6 \cdot 10^4$ МПа, $B_1 = 0,379 \cdot 10^{-12}$ (МПа) $^{-n} \cdot \text{ч}^{-1}$, $B_2 = 0,252 \cdot 10^{-13}$ (МПа) $^{-(g+1)} \cdot \text{ч}^{-1}$, $\sigma_T = 260$ МПа, $h_1 = 0,01$ м, $h_2 = 0,1$ м, $\lambda = 4$.

Сопоставление изображенной оптимальной пластины с пластиной постоянной толщины, подверженной воздействию тех же самых нагрузок, показывает, что при одинаковом времени до разрушения экономия веса в оптимальном проекте 15,5%.

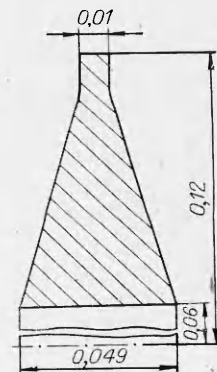
На рис. 4 приведен профиль оптимальной по долговечности кольцевой пластины, подверженной воздействию радиальных усилий $q =$



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

$= -0,145$ МПа·м (равномерно распределенных по внутреннему контуру) и выдерживающей заданные нагрузки в течение времени $t_{\text{в.р.}} = 329$ ч при $r_2 = 0,12$ м, $r_1 = 0,06$ м, а характеристики материала соответствовали предыдущему примеру. Ограничения на допустимые размеры толщины пластины задавались значениями $h_1 = 0,01$ м, $h_2 = 0,08$ м.

Сравнение представленной оптимальной пластины с пластиной постоянной толщины, имеющей при тех же нагрузках то же время до разрушения, показывает, что экономия веса в оптимальном проекте 19,7%.

Из приведенных расчетов следует, что оптимальные проекты вполне соответствуют реальным конструкциям и обладают при этом существенными преимуществами по сравнению с аналогичными простейшими конструкциями, которые выражаются либо увеличением времени эксплуатации, либо уменьшением веса конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. И. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
2. Никитенко А. Ф., Заев В. А. Об экспериментальном обосновании эквивалентной термосиловой поверхности в смысле процесса повреждаемости материала и длительности до разрушения // Пробл. прочности.— 1979.— № 3.
3. Гольдштейн Ю. Б., Соломенц М. А. Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
4. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления.— М.: Наука, 1973.
5. Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел.— М.: Наука, 1976.
6. Leckie F. A., Hayhurst D. R. Creep rupture of structures // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1974.— V. 340, N 1622.
7. Никитенко А. Ф., Заев В. А. К расчету элементов конструкций с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // Пробл. прочности.— 1979.— № 4.
8. Никитенко А. Ф., Заев В. А. Расчет напряженно-деформированного состояния и времени начала разрушения элементов конструкций с учетом повреждаемости в процессе ползучести // Пробл. прочности.— 1983.— № 1.

Поступила 5/III 1986 г.