*Теплофизика и аэромеханика, 2021, том 28, № 6*

УДК 536.3+536.42

# Численное исследование теплового состояния слоя анизотропно рассеивающего излучение льда*

**Слепцов С.Д.[1], Саввинова Н.А.[2]**

[1]*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

[2]*Северо-восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск*

E-mail: sleptsov@itp.nsc.ru

Методами математического моделирования в однофазной постановке задачи Стефана поставлена и решена задача таяния слоя рассеивающего излучение льда. Для решения радиационной части задачи использован модифицированный метод средних потоков. Учет анизотропного рассеяния осуществлен с помощью метода разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра. Показано влияние направления рассеяния на скорость таяния слоя льда. Получено удовлетворительное согласование результатов расчетов с экспериментальными данными и с данными расчетов, проведенных транспортным методом.

**Ключевые слова:** лед, задача Стефана, анизотропное рассеяние, полином Лежандра.

## Введение

Естественный лед представляет собой полупрозрачный светорассеивающий материал. Свет рассеивается пузырьками газов, трещинами, органическими и неорганическими частицами. При изучении теплового состояния слоя льда необходимо рассматривать как радиационный, так и кондуктивный теплообмен. Исследования по этой теме представлены в работах [1 – 4].

Математическое моделирование нагрева и последующего таяния сплошного слоя льда основано на задаче Стефана для полупрозрачных сред. В работах [5, 6] авторы показали применимость однофазного приближения задачи Стефана для расчета таяния чистого, нерассеивающего льда при его облучении внешним источником теплового излучения. В исследовании [7] авторы решили задачу для рассеивающего льда. Валидацию результатов они проводили по экспериментальным данным [8]. Для решения задач радиационно-кондуктивного теплообмена с учетом анизотропного рассеяния излучения можно использовать различные представления индикатрисы рассеяния, начиная от разложения индикатрисы в ряд по полиномам Лежандра [9, 10] до простейшего транспортного приближения [10, 11]. Целью настоящей работы является обобщение результатов [7] с использованием разложения индикатрисы в ряд по полиномам Лежандра для учета анизотропного рассеяния и сравнение расчетных данных с данными исследования [8].

* Исследования выполнены в рамках государственного задания ИТ СО РАН (121031800219-2)

## Постановка задачи

Геометрическая схема задачи представляет собой слой рассеивающего излучение льда с начальной толщиной $L_0$, расположенный на вертикальной непрозрачной подложке и находящийся в среде с постоянной температурой $T_\infty$. Аналогично работе [12] будем предполагать, что рассеяние излучения происходит на пузырьках воздуха. Правая поверхность слоя освещается лампой с температурой накаливания нити 3200 K с постоянным падающим потоком излучения $E_\nu^* =$ 4649 Вт/м$^2$. Спектральный состав источника излучения аналогичен спектральному составу, изученному в [7]. Авторы работ [3, 4, 8] отметили, что в диапазоне длин волн излучения от 0,3 до 1,2 мкм рассеяние излучения значительно превалирует над поглощением. В диапазоне длин волн от 1,2 мкм и выше, наоборот, поглощение излучения во льду значительно превышает рассеяние. В связи с этим для учета селективности рассматриваются два диапазона длин волн: от 0,3 до 1,2 мкм и от 1,2 до 3 мкм. Расчетные значения доли падающего излучения и коэффициента объемного поглощения льда представлены в таблице.

Предполагается, что граничные поверхности слоя льда диффузно поглощают, отражают и пропускают излучение таким образом, что $A_i + R_i + D_i = 1$, где $A_i, R_i, D_i$ — поглощательная, отражательная и пропускательная полусферические способности поверхности льда соответственно. Также на поверхности выполняется условие $A_i = \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i$ — степень черноты, $i$ = 1, 2. Согласно [8], левая поверхность подложки поддерживается при постоянной температуре $T_{\text{sub}}$, которая совпадает с начальной температурой плоского слоя льда $T(x, 0)$.

Решение задачи проводится в два этапа. На первом этапе рассматривается радиационно-кондуктивный теплообмен, при котором падающее излучение поглощается, рассеивается и нагревает слой льда до момента, когда температура правой поверхности достигнет температуры плавления $T_{\text{f}}$. Далее начинается второй этап, на котором температура правой границы фиксирована: $T(L(t), t) = T_{\text{f}}$. Таким образом, в этой точке выполняется условие Стефана. Предполагается, что образующаяся на поверхности пленки вода стекает под действием силы тяготения с температурой $T_{\text{fil}}$, которая выше температуры таяния льда. Толщина пленки пренебрежимо мала по сравнению с толщиной слоя льда, поэтому перепадом температуры в ней можно пренебречь, считая пленку изотермичной. Следовательно, наличие пленки воды может быть учтено с помощью условия на межфазной границе в рамках однофазной задачи Стефана.

Нестационарное уравнение энергии для плоского слоя льда с температурой $T(x, t)$ с учетом переноса энергии излучением записывается в виде

$$c\rho \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left( \lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} - E(x, t) \right), \quad 0 < x < L(t), \tag{1}$$

здесь $c$ — теплоемкость, $\rho$ — плотность, $\lambda$ — коэффициент теплопроводности, $E(x,t) = E^+(x,t) - E^-(x,t) = 2\pi \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 \left( I_\nu^+(x,\mu,t) - I_\nu^-(x,\mu,t) \right) \mu d\mu d\nu$ — плотность потока результирующего излучения, $I_\nu^\pm$ — спектральная интенсивность излучения, $\mu$ — косинус

**Таблица**

**Спектральные характеристики льда и источника излучения**

| Номер спектральной полосы ($j$) | $\nu_j$, $10^{14}$ Гц | $\lambda_j$, мкм | $\alpha_j$, м$^{-1}$ | $\omega_j$ | $E_j^*$, Вт/м$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9,09–2,02 | 0,33–1,2 | 0,01 | 0,99 | 2073 |
| 2 | 2,02–1,18 | 1,2–3 | 1 | 0,8 | 1883 |

угла между направлением излучения и осью координат $x$, $\nu$ — частота излучения.

Граничные условия для уравнения (1) на первом этапе процесса записываются следующим образом:

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}=A_1E^-(x,t)-\varepsilon_1\sigma_0T^4,\ x=0,$$
$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}-h\left(T_\infty-T\right)-\left|E_{\text{res},2}\right|=0,\ x=L_0, \tag{2}$$

где $\left|E_{\text{res},2}\right|=A_2\left(E^+(x,\,t)+E_\nu^*\right)-\varepsilon_2\sigma_0\left(T^4(x,\,t)-T_\infty^4\right)$. Уравнения (1) и (2) дополняются начальным условием $T(x,0)=T_{\text{sub}}$.

На втором этапе процесса температура правой поверхности слоя льда $x=L(t)$ фиксирована: $T(x,\,t)=T_{\text{f}}$. Граничное условие (2) на левой поверхности остается прежним, тогда как на правой поверхности слоя льда имеет место условие Стефана, учитывающее пленку воды:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}-h\left(T_{\text{fil}}-T_\infty\right)-\left|E_{\text{res,fil}}\right|=\rho\gamma\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{3}$$

где

$$\left|E_{\text{res,fil}}\right|=A_2\left(E^+(x,t)+E_\nu^*\right)-\varepsilon_2\sigma_0\left(T^4(x,\,t)-T_{\text{fil}}^4-T_\infty^4\right),\ x=L(t), \tag{4}$$

здесь $\gamma$ — скрытая теплота фазового перехода.

Расчет переноса излучения проводится с использованием достаточно точного и эффективного модифицированного метода средних потоков [2, 9]. Согласно этому подходу, интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений для плоского слоя полупрозрачной поглощающей и рассеивающей среды. Дифференциальный аналог уравнения переноса для полусферических потоков $E_j^\pm$ с учетом анизотропного рассеяния излучения представляется в виде [9]

$$\frac{d}{d\tau_j}\left(E_j^+-E_j^-\right)+\left(1-\omega_j\right)\left(m_j^+E_j^+-m_j^-E_j^-\right)=\left(1-\omega_j\right)n^2B_j,$$
$$\frac{d}{d\tau_j}\left(m_j^+l_j^+E_j^+-m_j^-l_j^-E_j^-\right)+\left(1-\bar{\zeta}\omega_j\right)\left(E_j^+-E_j^-\right)=0. \tag{5}$$

Граничные условия для системы уравнений (5) в безразмерных переменных записываются следующим образом [2]:

$$E_j^-=\varepsilon_1\frac{B_j}{4}+R_1E_j^+,\ \tau=0,$$
$$E_j^+=\left(1-R_2\right)E_j^*+\left(1-\frac{n^{*2}}{n^2}\left(1-R_2\right)\right)E_j^-,\ \tau=\tau_j, \tag{6}$$

здесь $\tau_j=\alpha_jL(t)\big/\left(1-\omega_j\right)$ — спектральная оптическая толщина слоя, $\omega_j$ — спектральное альбедо однократного рассеяния, $B_j$ — функция Планка, $n$ — показатель преломления льда, $n^*$ — показатель преломления внешней среды, $\bar{\zeta}$ — средний косинус угла рассеяния. Значения коэффициентов $m^\pm$, $l^\pm$ определяются из рекуррентного соотношения, полученного с помощью формального решения уравнения переноса излучения,

$j$ — номер спектральной полосы. Средний косинус угла рассеяния $\bar{\zeta}$, входящий в уравнение (5), рассчитывается по формуле [9]:

$$\bar{\zeta} = 1/2 \int_{-1}^{1} p_\nu(\mu, \mu')\mu d\mu, \tag{7}$$

где $p_\nu(\mu, \mu') = \sum_{l=0}^{N} a_l P_l(\mu_0)$ — спектральная индикатриса рассеяния, $a_0 = 1,$, $\mu_0$ — косинус угла между падающим и рассеянными лучами, $P_l$ — полином Лежандра порядка $l$, $a_l$ — коэффициенты разложения, где $l = 1, 2,\ldots, N$, $\nu$ — индекс частоты излучения.

Уравнение (1) с граничными условиями (2) – (4) и уравнение (5) с граничными условиями (6) приводятся к безразмерному виду аналогично тому, как это было сделано в работах [5 – 7]. Решение задачи сводится к определению динамики таяния льда и роста температуры необлучаемой поверхности льда, представляющей собой плоский слой селективно поглощающей, излучающей и рассеивающей среды.

## Результаты и анализ

Проанализируем результаты численного моделирования вертикально расположенного слоя рассеивающего излучение льда со следующими физическими параметрами: начальная толщина льда $L_0$ = 0,045 м, начальная температура льда $T_{\text{sub}} = 260$ K, постоянная температура атмосферы внутри камеры $T_\infty$ составляет 273 K и равна температуре таяния льда $T_{\text{f}}$, температура пленки воды $T_{\text{fil}}$ = 277 K, постоянная плотность падающего потока излучения $E_\nu^* = 4649$ Вт/м$^2$ [8]. Приняты следующие значения параметров теплофизических и оптических свойств льда: теплопроводность $\lambda = 1{,}87$ Вт/(м·K), температуропроводность $a = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ м$^2$/с, скрытая теплота фазового перехода $\gamma$ = 335 кДж/кг [1], показатель преломления льда $n = 1{,}31$ (для воздуха $n^*$ = 1), коэффициенты отражения $R_1 = 0{,}95$ и $R_2 = 1 - \varepsilon_2$, степень черноты левой границы $\varepsilon_1 = 1 - R_1$. Спектральные характеристики льда и источника излучения представлены в таблице. Значения других параметров в расчетах варьировались. К ним относятся: коэффициент теплоотдачи $h$, степень черноты облучаемой поверхности $\varepsilon_2$ и коэффициенты разложения полинома Лежандра, которые принимают следующие значения: рассеяние вперед — $a_1$ = 1,2, $a_2$ = 0,5 и $a_1$ = 2,00917, $a_2$ = 1,56339; рассеяние назад — $a_1 = -1{,}2$, $a_2 = 0{,}5$ [9, 13]. На первом этапе $h$ = 9 Вт/(м$^2$·K) и $\varepsilon_2 = 0{,}18$. На втором этапе $h$ = 80 Вт/(м$^2$·K), что приблизительно соответствует условиям теплоотдачи в работе [8], а степень черноты $\varepsilon_2 = 0{,}99$. Значения параметров $R_1$, $\varepsilon_2$ и $h$ получены в ходе численных экспериментов. Авторами [8] характеристики рассеяния излучения в слое льда, при которых были получены экспериментальные данные, не проводились. В отсутствие этих данных коэффициенты разложения полинома Лежандра для индикатрисы рассеяния заимствованы из работы [13], где рассматривалась среда с подходящим показателем преломления.

На рис. 1 представлена динамика таяния льда при рассеянии вперед, назад и данные эксперимента [8]. Рассеяние назад (кривая *2*) точно соответствует данным [8]. Максимальная разница расчета и эксперимента достигается при рассеянии вперед с коэффициентами разложения $a_1 = 2{,}00917$, $a_2 = 1{,}56339$ (кривая *4*) и составляет 2 мин (не более 4 %). На росте температуры левой необлучаемой границы (рис. 2) направление

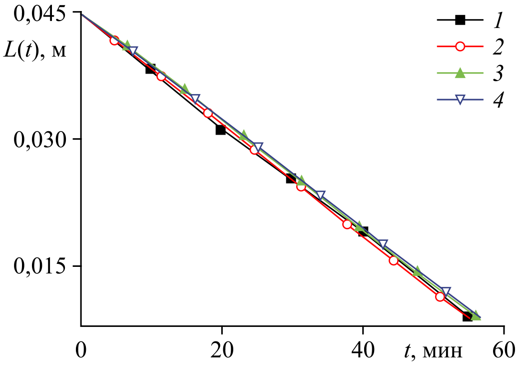


*Рис. 1.* Динамика таяния слоя льда в зависимости от направления рассеяния.
*1* — эксперимент [8], *2* — рассеяние назад ($a_1 = -1,2$, $a_2 = 0,5$), *3* — рассеяние вперед ($a_1 = 1,2$, $a_2 = 0,5$), *4* — рассеяния вперед ($a_1 = 2,00917$, $a_2 = 1,56339$).

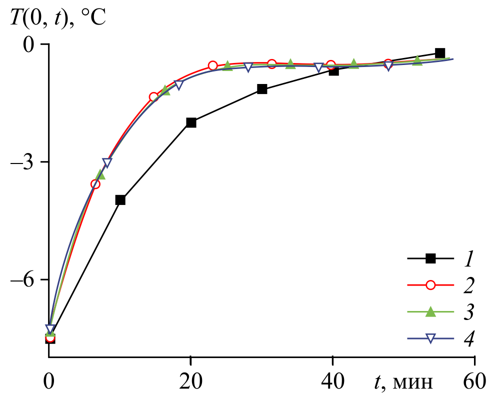


*Рис. 2.* Динамика роста температуры в зависимости от направления рассеяния.
Обозначения см. на рис. 1.

рассеяния не сказывается. Это обстоятельство можно объяснить наличием на левой границе высоко отражающей поверхности, из-за которой температура оптически тонкого слоя льда выравнивается. Результаты расчетов показывают удовлетворительное согласование как с опытными данными [8], так и с результатами расчетов, проведенных транспортным методом [12].

## Заключение

Поставлена и численно решена задача таяния плоского слоя льда при радиационном нагреве с учетом анизотропии рассеяния излучения. Для решения радиационной части использовался метод средних потоков, учет анизотропии рассеяния излучения в слое льда осуществлялся с помощью метода разложения индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра. Проанализированы динамика таяния льда, изменение температурного поля в слое льда и на непрозрачной подложке. Показано влияние направления рассеяния на скорость таяния льда. Сильное отражение излучения необлучаемой поверхностью приводит к тому, что рост температуры на этой границе не зависит от направления рассеяния излучения в слое льда. Получено удовлетворительное согласование как с опытными данными, так и с расчетами, проведенными транспортным методом.

## Список литературы

1. **Красс М.С., Мерзликин В.Г.** Радиационная теплофизика снега и льда. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 262 с.
2. **Тимофеев А.М.** Моделирование радиационного нагрева снежно-ледяного покрова // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 5. С. 797–804.
3. **Dombrovsky L.A., Kokhanovsky A.A., Randrianalisoa J.H.** On snowpack heating by solar radiation: a computational model // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 2019. Vol. 227. P. 72–85.
4. **Dombrovsky L.A., Kokhanovsky A.A.** Solar heating of ice sheets containing gas bubbles // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 2020. Vol. 250. Ar. 106991.
5. **Sleptsov S.D., Savvinova N.A., Rubtsov N.A.** Ice melting with allowance for selective absorption in the mediumice melting with allowance for selective absorption in the medium // J. Engng Thermophysics. 2019. Vol. 28, No. 1. P. 114–122.
6. **Слепцов С.Д., Саввинова Н.А.** Таяние льда при облучении селективным источником теплового излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 5. С. 813–820.
7. **Слепцов С.Д., Саввинова Н.А.** Расчетное исследование нестационарного теплового состояния льда с учетом рассеяния излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 4. С. 647–654.
8. **Seki N., Sugawara M., Fukusaki S.** Radiative melting of ice layer adhering to a vertical surface // Wärme- und Stoffübertragung. 1979. Vol. 12, Iss. 2. P. 137–144.

9. **Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А.** Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. 197 с.
10. **Dombrovsky L.A., Baillis D.** Thermal radiation in disperse systems: an engineering approach. N.Y.: Begell House, 2010. 689 p.
11. **Dombrovsky L.A.** The use of transport approximation and diffusion-based models in radiative transfer calculations // Comput. Thermal Sci. 2012. Vol. 4, No. 4. P. 297–315.
12. **Слепцов С.Д., Саввинова Н.А., Гришин М.А.** Численное исследование теплового состояния льда содержащего пузырьки воздуха // Прикл. механика и технич. физика. 2021. Т. 62, № 3. С. 118–125.
13. **Lui C.C., Dougherty R.L.** Anisotropically scattering media having a reflective upper boundary // J. Thermophysics and Heat Transfer. 1999. Vol. 13, No. 2. P. 177–184.

*Статья поступила в редакцию 15 июня 2021 г.,*
*после переработки — 5 октября 2021 г.,*
*принята к публикации 20 октября 2021 г.*