

УДК 539.3

## К УЧЕТУ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ

Р. А. Абиров

Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, 100125 Ташкент, Узбекистан  
E-mail: rustam\_abirov@mail.ru

С использованием результатов экспериментов с однородными цилиндрическими образцами из изотропных металлов разработана модель пластичности для трансверсально-изотропного материала, учитывающая сложное нагружение. С учетом векторных свойств материала построена эмпирическая модель пластичности для изотропных металлов. Эта модель обобщена на частный случай анизотропии.

Ключевые слова: пластичность, процесс нагружения, вектор, след запаздывания, анизотропия.

**1. Модель пластичности для изотропных металлов.** Согласно постулату изотропии [1] процесс нагружения и деформирования в произвольной точке тела определяется заданием пяти компонент векторов напряжений и деформаций, а его интенсивность и направление зависят только от внутренней геометрии траектории деформирования. При этом предполагается пластическая несжимаемость материала. Вектор напряжений представляется в ортонормированном локальном базисе Френе в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = P_n \mathbf{q}_n$$

( $\mathbf{q}_n$  — единичные векторы Френе).

В общем случае компоненты базиса Френе определяются по формуле

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{ds} = -\chi_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} + \chi_i \mathbf{q}_{i+1}.$$

Здесь  $\mathbf{q}_1 = d\mathcal{E}/ds$ ;  $\chi_0 = \chi_5 = 0$ ;  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  — параметры кривизны и кручения траектории деформирования.

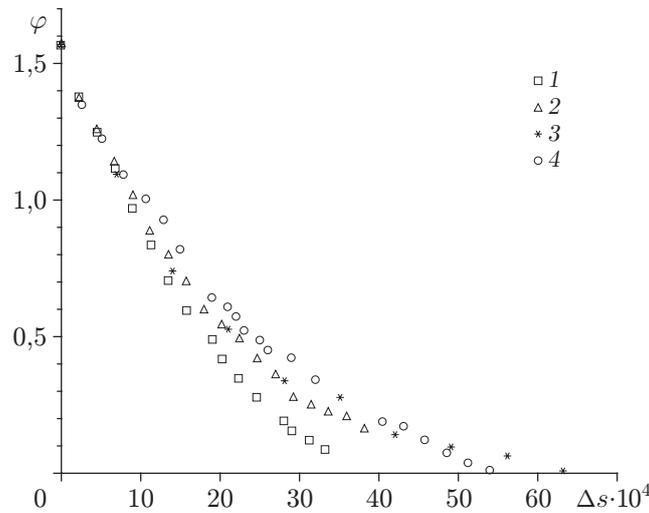
В скоростях указанное выше представление имеет вид [2]

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = A_1 \mathbf{q}_1 + A_2 \hat{\boldsymbol{\sigma}} + A_i \mathbf{q}_i \quad (i = 3, 4, 5),$$

где  $A_i$  — функционалы пластичности;  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}/|\boldsymbol{\sigma}|$ .

Построение функционалов представляет собой трудную задачу, поэтому принимаются гипотезы в рамках теории процессов А. А. Ильюшина. Одной из таких гипотез является гипотеза компланарности векторов  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{q}_1$ . В этом случае  $A_3 = A_4 = A_5 = 0$ . Некоторые теории пластичности, построенные на основе ассоциированного закона течения, могут быть построены также в рамках гипотезы компланарности. Предположим, что векторы  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  компланарны. Для плоских задач (трехмерные траектории в векторном пространстве Ильюшина) это означает, что вектор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  лежит в соприкасающейся плоскости траектории деформации. В этом случае аппроксимирующее соотношение можно записать в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = P_1 \mathbf{q}_1 + P_2 \mathbf{q}_2, \quad (1.1)$$



Характеристика угла сближения  $\varphi$  между векторами  $\sigma$  и  $d\mathcal{E}/ds$  при нагружении по траектории в виде двузвенных ломаных ( $\theta = 90^\circ$ ) при различных значениях предварительной деформации (до излома):  
 1 —  $\varepsilon = 42,68 \cdot 10^{-4}$ ; 2 —  $\varepsilon = 70,5 \cdot 10^{-4}$ ; 3 —  $\varepsilon = 53,88 \cdot 10^{-4}$ ; 4 —  $\varepsilon = 76,0 \cdot 10^{-4}$

где  $P_1 = |\sigma| \cos \varphi$ ;  $P_2 = -|\sigma| \sin \varphi$ ;  $\varphi$  — переменный угол между векторами  $\sigma$  и  $d\mathcal{E}/ds$ . Вообще говоря, это предположение является обоснованным только для двумерных траекторий.

Таким образом, определив закон изменения угла сближения  $\varphi$ , а также зависимость  $\sigma \sim s$ , можно задать определяющее соотношение для пластического материала. Функцию  $|\sigma| = F(s)$ , где  $F(s)$  — траектория деформирования, можно определить из опытов на чистый сдвиг или простое растяжение. Угол сближения  $\varphi$  существенно зависит от кривизны траектории деформирования. Для процессов простого нагружения  $\varphi = 0$ . Однако наиболее часто воспроизводимыми при статическом нагружении являются процессы средней и малой кривизны.

Так как полагается, что кручением траектории деформирования можно пренебречь, то в общем случае  $\varphi$  есть функционал только от кривизны траектории деформирования  $\chi$ , следа запаздывания векторных свойств материала  $\lambda$  и длины дуги траектории деформирования  $s$ .

В экспериментах с изотропными металлами (сталь-3, латунь марки ЛС-59, сталь-45) с использованием траекторий с изломом подтверждена универсальность величины  $\varphi/\theta$  ( $\theta$  — угол излома траектории деформирования). Такие же выводы сделаны на основе экспериментальных данных, приведенных в работе [3]. На рисунке показана зависимость  $\varphi(\Delta s)$  для стали-3, полученная в экспериментах с углом излома  $\theta = 90^\circ$  при различных значениях величины предварительной деформации (до излома). Видно, что в среднем разброс экспериментальных данных не превышает погрешности измерений (8 %). Большой разброс наблюдается при изломе при небольших значениях предварительной деформации. Это объясняется тем, что при построении графика использовались разностные соотношения при малом числе экспериментальных точек.

На основании проведенных экспериментов со сталью и латунью различных марок предложена следующая аппроксимация функционала  $\varphi$  [4]:

$$\varphi = \theta / \exp(2,7725\Delta s/\lambda) \tag{1.2}$$

( $\Delta s$  — длина дуги траектории деформирования после излома). В этих материалах основ-

ным механизмом пластического деформирования является внутризеренное дислокационное скольжение. Для иных механизмов течения проверка соответствия данной аппроксимации реальным векторным свойствам материала требует проведения дополнительных экспериментальных исследований.

Аппроксимация угла сближения в виде (1.2) согласуется с принципом запаздывания, т. е. подчиняется следующим условиям:

$$\varphi = \theta \quad \text{при} \quad \Delta s = 0, \quad \varphi \approx 0 \quad \text{при} \quad \Delta s = \lambda, \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta s \rightarrow \infty.$$

Экспоненциальный вид кривой  $\varphi \sim s$  предлагался ранее и другими исследователями.

Так как предполагается, что вектор напряжений лежит в соприкасающейся плоскости, для угла сближения  $\varphi$  данный функционал примем в виде [5]

$$\varphi = \int_0^s K(s, x) \chi(x) dx. \quad (1.3)$$

Кривизна траектории деформирования считается известной, а ядро функционала определяется по результатам экспериментов на сложное нагружение. Ядро  $K(s, x)$ , принимаемое в качестве универсальной функции материала, можно определить по результатам экспериментов с использованием прямолинейных траекторий с изломом. Кривизна таких траекторий равна нулю. Исключением является точка излома, в которой кривизна стремится к бесконечности. Таким образом, получаем

$$\varphi = \int_0^s K(s, x) \delta(x, \xi) dx = K(s, \xi),$$

где  $\delta(x, \xi)$  — дельта-функция Дирака.

С учетом сказанного выше для средних кривизн, у которых не предполагается наличия изломов, ядро следует выбирать в виде

$$K(s, x) = \exp(2,7725(x - s)/\lambda). \quad (1.4)$$

Таким образом, соотношения (1.1), (1.3) и (1.4) представляют собой определяющие соотношения пластичности для изотропного материала, полученные на основе экспериментальных данных. Функционал пластичности предполагает наличие ядра, зависящего как от свойств материала, так и от длины траектории деформирования.

В результатековки, прокатки или иных механических воздействий поликристаллические металлы приобретают существенно анизотропные свойства, которыми нельзя пренебрегать. При определенной обработке кристаллиты утрачивают первоначальную равноосную форму и металл приобретает волокнистую структуру и наклеп. Ниже полученные экспериментальные данные используются для описания материалов, обладающих текстурой.

**2. Модель пластичности для трансверсально-изотропной среды.** Следует отметить, что в данной работе рассматривается модель идеальной сплошной среды без учета молекулярного или кристаллического строения материала.

Любой тензор второго ранга, в частности тензоры напряжений и деформаций, можно разбить на шаровую и девиаторную части. Шаровой тензор соответствует всестороннему сжатию, а девиатор — сдвиговым усилиям и смещениям. В изотропной среде, в отличие от анизотропной, гидростатическое давление не оказывает влияния на форму тела.

В случае анизотропной среды тензоры второго ранга целесообразно разбить на взаимно ортогональные части, т. е. представить их в некотором ортогональном базисе. При

этом каждая часть должна сохранять свою форму относительно группы преобразований, характеризующей класс анизотропии.

Для трансверсально-изотропной среды тензор второго ранга представим в ортогональной декартовой системе координат (осью трансверсальной изотропии является направление 3) [6]:

$$t_{ij} = 0,5(t_{11} + t_{22})(\delta(i, 1)\delta(j, 1) + \delta(i, 2)\delta(j, 2)) + t_{33}\delta(i, 3)\delta(j, 3) + T_{ij} + V_{ij}.$$

Здесь

$$T_{ij} = t_{ij} + 0,5(t_{11} + t_{22})(\delta(j, 3)\delta(i, 3) - \delta(i, j)) + t_{33}\delta(j, 3)\delta(i, 3) - (t_{i3}\delta(j, 3) + t_{3j}\delta(i, 3)),$$

$$V_{ij} = t_{i3}\delta(j, 3) + t_{3j}\delta(i, 3) - 2t_{33}\delta(j, 3)\delta(i, 3).$$

Все части тензора, входящие в данное разложение, попарно ортогональны, причем каждая из них сохраняет свою форму при преобразовании относительно оси трансверсальной изотропии. Величины  $T_{ij}$  и  $V_{ij}$ , соответствующие тензорам напряжений и деформаций, обозначим соответственно  $P_{ij}$ ,  $Q_{ij}$  и  $p_{ij}$ ,  $q_{ij}$ .

В теории упругости инварианты связаны соотношениями

$$\tilde{\theta} = \frac{1 - \nu}{E} \tilde{\sigma} - \frac{2\nu'}{E'} \sigma_{33}, \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu'}{E'} \tilde{\sigma} + \frac{1}{E'} \sigma_{33}, \quad p = \frac{1}{2G} P, \quad q = \frac{1}{2G'} Q,$$

где  $\tilde{\theta} = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}$ ;  $\tilde{\sigma} = \sigma_{22} + \sigma_{11}$ ;  $P = \sqrt{P_{ij}P_{ij}}$ ;  $p = \sqrt{p_{ij}p_{ij}}$ ;  $Q = \sqrt{Q_{ij}Q_{ij}}$ ;  $q = \sqrt{q_{ij}q_{ij}}$ ;  $G$ ,  $G'$  — модули сдвига в плоскости изотропии и любой плоскости, перпендикулярной ей, соответственно;  $\nu$  — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении;  $\nu'$  — то же при растяжении в направлении, нормальном к плоскости изотропии;  $E$ ,  $E'$  — модули Юнга при растяжении-сжатии в направлениях плоскости изотропии и плоскости, нормальной к ней, соответственно.

При возникновении пластических деформаций зависимости между величинами  $\varepsilon_{33}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\theta}$  с учетом пластической несжимаемости материала остаются прежними, а зависимости между величинами  $P_{ij}$ ,  $Q_{ij}$ ,  $p_{ij}$ ,  $q_{ij}$  необходимо определить.

Так как каждая из величин  $P_{ij}$ ,  $Q_{ij}$ ,  $p_{ij}$ ,  $q_{ij}$  имеет две независимые компоненты, то по аналогии с изотропным случаем для каждой из них можно ввести двумерное пространство Ильюшина  $\Theta^2$ . Отличие состоит в том, что для изотропного материала в общем случае как для напряжений, так и для деформаций вводилось пятимерное векторное пространство  $\Theta^5$ , а для трансверсально-изотропной среды вводится по два двумерных векторных пространства:  $P^2$ ,  $Q^2$  для напряжений и  $p^2$ ,  $q^2$  для деформаций. Для процессов нагружения в двумерных векторных пространствах можно использовать постулат изотропии, так как в этих пространствах все преобразования возможны только в плоскости изотропии.

С учетом сказанного выше получаем следующие соотношения между векторами напряжений и деформаций:

$$\mathbf{P} = L_{11}\mathbf{q}_{11} + L_{12}\mathbf{q}_{12}, \quad \mathbf{Q} = L_{21}\mathbf{q}_{21} + L_{22}\mathbf{q}_{22}. \quad (2.1)$$

Здесь  $L_{11} = |\mathbf{P}| \cos \varphi_1$ ;  $L_{12} = -|\mathbf{P}| \sin \varphi_1$ ;  $L_{21} = |\mathbf{Q}| \cos \varphi_2$ ;  $L_{22} = -|\mathbf{Q}| \sin \varphi_2$ ;  $\mathbf{q}_{ij}$  — векторы Френе в пространствах  $p^2$  и  $q^2$ . Компоненты векторов напряжений и деформаций определяются как

$$P_1 = \sqrt{2} P_{11}, \quad P_2 = \sqrt{2} P_{12}, \quad p_1 = \sqrt{2} p_{11}, \quad p_2 = \sqrt{2} p_{12},$$

$$Q_1 = \sqrt{2} \sigma_{13}, \quad Q_2 = \sqrt{2} \sigma_{23}, \quad q_1 = \sqrt{2} \varepsilon_{13}, \quad q_2 = \sqrt{2} \varepsilon_{23}$$

( $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — углы сближения векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{Q}$  соответственно).

Углы сближения в пространствах  $p^2$  и  $q^2$  введем следующим образом:

$$\varphi_1 = \int_0^p K_1(p, x) \chi_1(x) dx, \quad \varphi_2 = \int_0^q K_2(q, x) \chi_2(x) dx. \quad (2.2)$$

Ядра примем в виде

$$K(p, \xi) = \exp(-2,7725(p - \xi)/\lambda_1), \quad K(q, \zeta) = \exp(-2,7725(q - \zeta)/\lambda_2). \quad (2.3)$$

При изучении процессов сложного нагружения необходимо знать дополнительные свойства материалов, такие как след запаздывания в пространстве изотропии  $\lambda_1$  и в плоскости  $\lambda_2$ , нормальной к ней. Таким образом, количество характеристик трансверсально-изотропного тела равно семи.

Итак, уравнения (2.1)–(2.3) определяют модель пластичности при сложном нагружении трансверсально-изотропного материала. После ряда преобразований эти уравнения можно записать в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dp} &= \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|} \left( \frac{dP}{dp} - P \cos \varphi_1 \frac{\chi_{11} - \dot{\varphi}_1}{\sin \varphi_1} \right) + \mathbf{q}_{11} P \frac{\chi_{11} - \dot{\varphi}_1}{\sin \varphi_1} - P \chi_{12} \sin \varphi_1 \mathbf{q}_{13}, \\ \frac{d\mathbf{Q}}{dq} &= \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|} \left( \frac{dQ}{dq} - Q \cos \varphi_2 \frac{\chi_{21} - \dot{\varphi}_2}{\sin \varphi_2} \right) + \mathbf{q}_{21} Q \frac{\chi_{21} - \dot{\varphi}_2}{\sin \varphi_2} - Q \chi_{22} \sin \varphi_2 \mathbf{q}_{13}. \end{aligned}$$

Здесь  $Q$ ,  $q$ ,  $P$ ,  $p$  — длины соответствующих траекторий нагружения и деформирования в пространствах трансверсальной изотропии.

Если принять  $\chi_{12} = \chi_{22} = 0$ , то получим уравнения, основанные на гипотезе компланарности. Далее, если углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  малы, то имеем уравнения классической теории Ильюшина

$$\frac{d\mathbf{P}}{dp} = \frac{P \mathbf{q}_{11}}{|\mathbf{P}|} \frac{P}{|\mathbf{P}|} (M_1 - N_1) + \mathbf{q}_{11} N_1, \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dq} = \frac{Q \mathbf{q}_{21}}{|\mathbf{Q}|} \frac{Q}{|\mathbf{Q}|} (M_2 - N_2) + \mathbf{q}_{21} N_2. \quad (2.4)$$

Варьируя коэффициенты  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $M_2$ ,  $N_2$ , получим различные варианты теории пластичности для трансверсально-изотропных сред.

При некотором выборе коэффициентов в соотношении (2.4) получаем теорию, построенную в [7]. Таким образом, в частном случае предложенная в данной работе модель совпадает с классической моделью пластичности.

Данная модель построена для стандартного малосжимаемого материала на основе экспериментов с использованием плоских траекторий и поэтому предлагается для решения плоских задач с учетом сложного активного нагружения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. **Зубчанинов В. Г.** Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. шк., 1990.
3. **Абрамова Л. В., Крюкова И. В.** К теории упругопластических деформаций металлов по траекториям в виде двузвенных ломаных // Пробл. прочности. 1981. № 1. С. 8–12.
4. **Абиров Р. А.** Об одной модели физических соотношений в пластичности // Пробл. механики (Ташкент). 1997. № 6. С. 7–12.
5. **Кравчук А. С.** О теории пластичности для траекторий деформирования средней кривизны // Упругость и неупругость / Под ред. А. А. Ильюшина. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. Т. 2. С. 91–100.

6. **Победря Б. Е.** О теории пластичности трансверсально-изотропных материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 3. С. 96–101.
7. **Халджигитов А. А.** Теория течения для трансверсально-изотропных материалов // Прикл. механика. 1993. № 5. С. 40–47.

*Поступила в редакцию 7/II 2007 г.,  
в окончательном варианте — 25/XII 2007 г.*

---