

О РЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ СТЕНКИ С ИЗЛОМОМ

Рассматривается задача о возмущении нестационарного регулярного отражения ударной волны. Возмущение в основное течение вносится в результате набегающей конфигурации из падающей и отраженной ударных волн на излом стенки. Решение задачи ищется в классе автомодельных решений. В линейной постановке задача о возмущении сводится к задаче сопряжения для аналитических функций. Показано, что если отраженный скачок слабый и сильноустойчивый, то задача о возмущении разрешима, что свидетельствует о неизменности характера течения. В этом случае получено аналитическое решение в интегральном виде. Если же отраженный скачок сильный, то задача сопряжения неразрешима, что говорит о принципиальной перестройке течения.

1. Постановка задачи. Исследуется нестационарное течение газа, возникающее при отражении ударной волны от стенки с изломом (рис. 1). Введем декартову систему координат (X, Y) , центр которой находится в точке излома. Пусть при $t < 0$ вдоль стенки ($Y = 0$) по покоящемуся газу движется с постоянной скоростью U конфигурация из падающей и отраженной ударных волн. Основные параметры течения в областях перед, за падающим ударным фронтом и за отраженным фронтом обозначаются индексами 0, 1, 2 соответственно. Пусть падающий ударный фронт Γ_1 задается уравнением

$$X + bY + Ut = 0 \quad (b = \text{const}, U = \text{const}, b > 0, U > 0),$$

а отраженный фронт Γ_2 — уравнением

$$X - aY + Ut = 0 \quad (a = \text{const}, a > 0).$$

В системе координат, связанной с точкой пересечения фронтов N , течение газа стационарно. Параметры течения в областях 0, 1, 2 связаны соотношениями на косом скачке уплотнения:

$$\begin{aligned} \tau_i(\mathbf{W}_{i-1} \cdot \mathbf{n}_i) &= \tau_i(\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{n}_i), \\ P_{i-1} + \rho_{i-1}(\mathbf{W}_{i-1} \cdot \mathbf{n}_i)^2 &= P_i + \rho_i(\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{n}_i)^2, \\ \mathbf{W}_{i-1} - (\mathbf{W}_{i-1} \cdot \mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i &= \mathbf{W}_i - (\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i, \\ h_{i-1} + \frac{1}{2}(\mathbf{W}_{i-1} \cdot \mathbf{n}_i)^2 &= h_i + \frac{1}{2}(\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{n}_i)^2 \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Здесь P_i — давление; ρ_i — плотность; $\tau_i = \rho_i^{-1}$; h_i — удельная энтальпия; \mathbf{n}_i — нормаль к фронту Γ_i ; \mathbf{W}_i — вектор, связанный с вектором скорости газа $\mathbf{V}_i = (u_i, v_i)$ в областях 0, 1, 2 соотношением $\mathbf{W}_i = \mathbf{V}_i + (U, 0)$. В силу условия непротекания на стенке $Y = 0$ $v_2 = 0$.

Пусть в момент времени $t = 0$ точка N достигает начала координат, где жесткая стенка отклоняется на малый угол ε ($\varepsilon > 0$). При $t > 0$ фронт отраженной ударной волны искривляется и возникает область возмущенного течения, ограниченная жесткой стенкой, участком дифрагированного фронта отра-

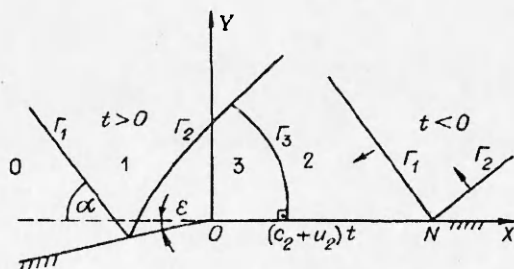


Рис. 1

женной волны Γ_2 и, а) когда $u_2 + c_2 \geq 0$, характеристической поверхностью Γ_3 , движущейся со звуковой скоростью:

$$(X - u_2 t)^2 + Y^2 = c_2^2 t^2$$

($u_2 < 0$ — горизонтальная компонента скорости, c_2 — скорость звука в области 2), б) когда $u_2 + c_2 < 0$, область возмущенного течения ограничена отрезком прямолинейной звуковой характеристики $B'G$, частью звуковой окружности GC , участком дифрагированного фронта Γ_2 и жесткой стенкой (рис. 2). Прямолинейная звуковая характеристика $B'G$ исходит из угловой точки и касается звуковой окружности Γ_3 в точке G . На рис. 2 случай б показан штриховыми линиями.

Описание течения при $t > 0$ сводится к построению решения системы уравнений газовой динамики

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0,$$

$$\frac{d}{dt} S = 0, \quad \rho = \rho(P, S) \quad (c^2 = \frac{dP}{d\rho})$$

в области возмущенного течения, если на стенке выполнено условие непротекания, а на неизвестной границе NC — условие Гюгонио. Здесь P — давление; ρ — плотность; \mathbf{V} — скорость; S — энтропия; c — скорость звука;

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla.$$

Считая, что $\varepsilon \ll 1$, линеаризуем задачу на точном кусочно-постоянном решении $P_2, \rho_2, \mathbf{V}_2, S_2$, описывающем течение газа при $\varepsilon = 0$. Представим параметры течения в виде

$$(1.2) \quad P = P_2 + \varepsilon \rho_2 c_2^2 p_j, \quad S = S_2(1 + \varepsilon s_j),$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 + \varepsilon c_2 (u_j, v_j), \quad \rho = \rho_2(1 + \varepsilon \rho_j),$$

где $p_j, \rho_j, (u_j, v_j), s_j$ — безразмерные возмущения параметров течения. В случае б область определения решения линейной задачи о возмущении разбивается на две подобласти: подобласть 3, правая граница которой является звуковой окружностью Γ_3 , и 4, которая ограничена звуковой окружностью Γ_3 , жесткой стенкой и отрезком $B'G$ (рис. 2). В линейной постановке отрезок $B'G$ можно трактовать как слабый скачок, моделирующий изменение параметров потока в центрированной в угловой точке волне. Соответственно в (1.2) $j = 3, 4$. В случае а $j = 3$. Рассматриваемая задача автомодельна, поэтому удобно ввести следующие независимые переменные:

$$(1.3) \quad \xi = \frac{a\eta' - \xi'}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad \eta = -\frac{a\xi' + \eta'}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\left(\xi' = \frac{X - u_2 t}{c_2 t}, \quad \eta' = \frac{Y}{c_2 t} \right).$$

В области 4 решение постоянно, величины $p_4, (u_4, v_4), \rho_4$ и s_4 определяются из соотношений на слабом скачке. Для построения возмущений $p_3, (u_3, v_3), \rho_3$ в области 3 нужно решить систему уравнений (далее индекс 3 опускаем)

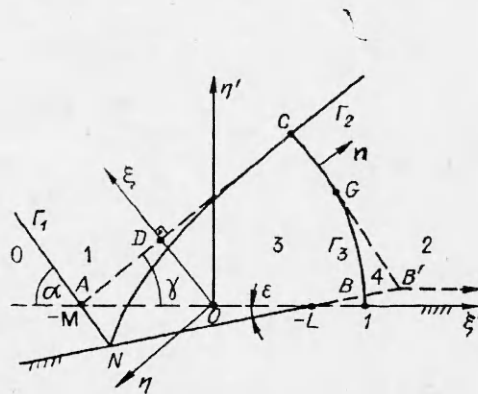


Рис. 2

$$(1.4) \quad \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \xi},$$

$$\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad \xi \frac{\partial s}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial s}{\partial \eta} = 0,$$

которая получается из системы (1.1) после линеаризации и перехода к новым автомодельным переменным (1.3).

Так как последнее уравнение системы можно проинтегрировать независимо с использованием граничных условий на ударном фронте и звуковой окружности, в дальнейшем рассматриваем систему первых трех уравнений.

Сформулируем граничные условия линейной задачи. Уравнение прямолинейной части фронта отраженной ударной волны примет вид

$$\xi = \frac{u_2 + U}{c_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{M}{\sqrt{a^2 + 1}} = m.$$

Будем исследовать такие режимы движения газа, при которых число Маха $M < 1$ (случай $M > 1$ подробно описан в [1]). Уравнение возмущенной части фронта отраженной ударной волны представим как $\xi = m + \epsilon \Psi(\eta)$. Линеаризованные соотношения Гюгоню дают следующие граничные условия при $\xi = m$:

$$(1.5) \quad p = \frac{2M(1 - R^{-1})}{\sqrt{1 + a^2}(\Delta_2 + 1)} (\Psi(\eta) - \eta \Psi_\eta),$$

$$v = \frac{(1 - R)M}{\sqrt{1 + a^2}} \Psi_\eta, \quad u = \frac{(1 - \Delta_2)\sqrt{1 + a^2}}{2M} p.$$

После исключения $\Psi(\eta)$ и $\Psi_\eta(\eta)$ из (1.5) получим

$$(1.6) \quad u = Ap, \quad \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} = B \frac{\partial p}{\partial \eta},$$

где $A = \frac{(1 - \Delta_2)}{2m}$; $B = \frac{(\Delta_2 + 1)R}{2}$; $\Delta_2 = \frac{P_2 - P_1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial P} \right)_2$; $R = \frac{\rho_2}{\rho_1}$.

Соотношения (1.6) выполнены на прямой $\xi = m$ (см. рис. 2). Фронт слабых возмущений, исходящих из вершины угла, описывается уравнением $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Таким образом, математическая формулировка задачи такова — уравнения (1.4) должны быть решены при следующих граничных условиях: на границе $\eta' = 0$

а) когда $-L = \frac{-u_2}{c_2} \leq 1$, $\begin{cases} v' = M \text{ при } \xi' < -L, \\ v' = 0 \text{ при } \xi' > -L, \end{cases}$

б) когда $-L = \frac{-u_2}{c_2} > 1$, $v' = M$

(v' — проекция вектора скорости на ось $O\eta'$), на границе $\xi = m$ в обоих случаях справедливы соотношения (1.6), на звуковой характеристике Γ_3 в случае а $u = v = p = 0$,

в случае б $\begin{cases} u = v = p = 0 \text{ (на дуге } CG), \\ p = \frac{ML}{\sqrt{L^2 - 1}} (u, v \text{ — заданные постоянные,} \\ \text{отличные от нуля} \\ \text{на дуге } GB). \end{cases}$

2. Краевая задача для давления. После исключения u и v из выражений (1.4) для p получим уравнение

$$(2.1) \quad \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 1 \right) \left(\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = \nabla^2 p,$$

которое при $\xi^2 + \eta^2 > 1$ будет гиперболическим, а при $\xi^2 + \eta^2 < 1$ — эллиптическим. Условие на оси $\eta' = 0$ в силу уравнений (1.4) запишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial \eta'} = ML \delta_0(\xi' + L) \quad \text{в случае а,}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta'} = 0 \quad \text{в случае б}$$

($\delta_0(\xi)$ — дельта-функция). Из (1.4) и (1.6) на участке $\xi = m$ следует условие

$$m \left(m \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial p}{\partial \xi} - \left(A\eta - \frac{Bm}{\eta} \right) \frac{\partial p}{\partial \eta}.$$

На границе между областями однородного и возмущенного течения $\xi^2 + \eta^2 = 1$ имеем

$$\frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad \text{в случае а,}$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{ML}{\sqrt{L^2 - 1}} \delta_0(\theta - \theta_G) \quad \text{в случае б.}$$

Здесь s — касательный вектор к Γ_3 , направленный против часовой стрелки; θ — полярный угол в плоскости (ξ, η) . Вдоль линии AC должны выполняться интегральные условия изменения скорости v вдоль AC от v_N до нуля

$$(2.2) \quad \int_{AC} \frac{B}{\eta} dp = -v_N,$$

а также изменения давления

$$(2.3) \quad \int_{AC} dp = \frac{P_2 - P_N}{\rho_2 c_2^2} = -p_N$$

(P_N — давление в точке N). Величина p_N подсчитывается из теории регулярного отражения [1,2]. Для этого используются соотношения (1.5), условие в точке A $au - v = M\sqrt{1+a^2}$ и условие прохождения отраженного фронта через точку N (см. рис. 2). Итак,

$$p_N = \frac{2m(1-R)}{a^2(1-\Delta_2) - R(1+\Delta_2)} \left(\frac{U}{\sqrt{1+a^2}} (a + \operatorname{ctg} \alpha) + \frac{am(1+a^2)}{1-R} \right),$$

тогда v_N из второго соотношения (1.5) запишем как

$$v_N = \frac{a(1-\Delta_2)p_N - 2m^2(1+a^2)}{2m}$$

(α — угол падения фронта Γ_1).

3. Преобразования линеаризованной задачи. Последовательными преобразованиями

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta, \quad r_1 = \frac{1 - \sqrt{1-r^2}}{r}, \quad \theta_1 = \theta$$

уравнение (2.1) сводится к уравнению Лапласа

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial p}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0.$$

При этом область ABC в плоскости (ξ, η) переходит в криволинейный треугольник ABC в плоскости $(x = r_1 \cos \theta, y = r_1 \sin \theta)$. Если ввести векторы n и s соответственно нормальному и касательному (против часовой стрелки) направлениям вдоль дуги AC , то условие на дифрагированном фронте примет вид

$$(3.2) \quad \frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial s}} = \frac{A m \operatorname{tg} \theta - B c \operatorname{tg} \theta}{(1 - m^2 \sec^2 \theta)^{1/2}} = \Omega(\theta).$$

Применяя цепочку элементарных конформных преобразований

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{(x + ay)}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad y_1 = \frac{(ax - y)}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad z_2 = \frac{\nu - 1}{\mu - 1} \frac{z_1 - \mu}{z_1 - \nu} \\ &\left(z_1 = x_1 + iy_1, \nu = -\frac{\sqrt{1 - M^2} + 1}{M}, \mu = \frac{\sqrt{1 - M^2} - 1}{M} \right), \\ z_3 &= z_2^{\pi/\beta} \quad (\operatorname{tg} \beta = \sqrt{1 - M^2} \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{1 - M^2}}{a}), \end{aligned}$$

γ — угол отражения фронта Γ_2),

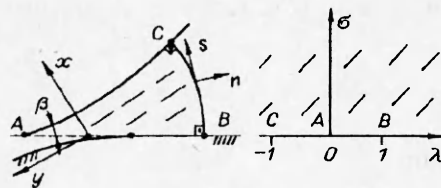
$$\begin{aligned} z_4 &= \frac{z_3 - i}{iz_3 - 1}, \quad z_5 = -z_4, \\ \zeta &= \frac{1}{2} \left(z_5 + \frac{1}{z_5} \right) \quad (\zeta = \lambda + i\sigma), \end{aligned}$$

отобразим треугольник ABC в верхнюю полуплоскость таким образом, что участок AC перейдет в часть действительной оси $-1 < \lambda < 0$ (рис. 3), участок AB — в часть действительной оси $0 < \lambda < 1$, а CB — в $|\lambda| > 1$, $\sigma = 0$. В случае а точка с координатами $(-L, 0)$ из плоскости (ξ', η') перейдет в точку

$$\lambda_0 = \frac{2l_1}{1 + l_1^2}, \quad l_1 = \frac{\nu - 1}{\mu - 1} \frac{l - \mu}{l - \nu}, \quad l = \frac{\sqrt{1 - L^2} - 1}{L}.$$

В случае б точка G с координатами $(-\frac{1}{L}, -\frac{\sqrt{L^2 - 1}}{L})$ из плоскости (ξ', η') перейдет в точку λ_G , лежащую на участке $|\lambda| > 1$. Тогда задача о возмущении формулируется следующим образом. Требуется найти ограниченное решение уравнений Лапласа (3.1) в верхней полуплоскости, удовлетворяющее условиям:

на участке CA ($\sigma = 0, -1 < \lambda < 0$)



$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} + \Omega(\theta(\lambda)) \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0,$$

на участке AB ($\sigma = 0, 0 < \lambda < 1$)

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{LM}{\sqrt{1 - L^2}} \delta_0(\lambda - \lambda_0) \quad \text{в случае а,}$$

Рис. 3

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{в случае б,}$$

на участке CB ($\sigma = 0, |\lambda| > 1$)

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{в случае а,}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{LM}{\sqrt{L^2 - 1}} \delta_0(\lambda - \lambda_0) \quad \text{в случае б.}$$

4. Формулировка задачи Римана—Гильберта. Условие разрешимости. Введем аналитическую функцию $\Lambda(\zeta) = p_\sigma + ip_\lambda$ и сформулируем для нее задачу Римана—Гильберта. Требуется найти аналитическую в верхней полуплоскости и непрерывную на $\sigma = 0$ функцию $\Lambda(\zeta) = p_\sigma + ip_\lambda$, удовлетворяющую на контуре линейному соотношению

$$q(\lambda)p_\sigma - d(\lambda)p_\lambda = e(\lambda).$$

Функции $q(\lambda), d(\lambda)$ испытывают разрывы в точках A, B . На участке $-1 < \lambda < 0$

$$q = (1 - m^2 \sec^2 \theta)^{1/2} \operatorname{tg} \theta, \quad d = (B - A m \operatorname{tg}^2 \theta), \quad e = 0 \quad (\theta = \theta(\lambda)),$$

на участке $0 < \lambda < 1$

$$e = \begin{cases} q = 1, d = 0, \\ \frac{LM}{\sqrt{1 - L^2}} \delta_0(\lambda - \lambda_0) \text{ в случае а,} \\ 0 \quad \text{в случае б,} \end{cases}$$

на участке $|\lambda| > 1$

$$e = \begin{cases} q = 0, d = 1, \\ 0 \quad \text{в случае а,} \\ -\frac{LM}{\sqrt{L^2 - 1}} \delta_0(\lambda - \lambda_0) \text{ в случае б.} \end{cases}$$

Сведем задачу Римана—Гильберта к стандартной неоднородной задаче сопряжения на действительной оси. Пусть $\Lambda^+ = p_\sigma + ip_\lambda, \zeta \in S^+$ (S^+ — верхняя полуплоскость), $\Lambda^-(\zeta) = \overline{\Lambda^+(\zeta)}, \zeta \in S^-$ (S^- — нижняя полуплоскость). Из условий задачи Римана—Гильберта получим задачу сопряжения:

$$(4.1) \quad \Lambda^+(\lambda) = G(\lambda)\Lambda^-(\lambda) + g(\lambda) \text{ на } \sigma = 0.$$

$$\text{Здесь } G(\lambda) = -\frac{q - id}{q + id}; \quad g(\lambda) = \frac{2e}{q + id}.$$

Согласно [3], при $M < 1$ возникает следующая классификация режимов отражения:

$$1) \quad -1 < \Delta_2 < \frac{a^2 - R}{a^2 + R} \text{ — отраженный скачок, слабый, сильноустойчивый;}$$

$$2) \quad \frac{a^2 - R}{a^2 + R} < \Delta_2 < \frac{1 - m^2 - Rm^2}{1 - m^2 + Rm^2} \text{ — отраженный скачок, сильный, сильноустойчивый;}$$

3) $\frac{1 - m^2 - Rm^2}{1 - m^2 + Rm^2} < \Delta_2 < 1 + 2m$ — отраженный скачок, сильный, нейтрально-устойчивый.

При подсчете индекса задачи (4.1) выясняется, что $\arg G(\lambda)$ не изменяется на участках $|\lambda| > 1$ и $0 < \lambda < 1$. На участке $-1 < \lambda < 0$ имеем

$$\begin{aligned} 3\pi < \Delta \arg G(\lambda) < 4\pi & \text{ для режима 1,} \\ 2\pi < \Delta \arg G(\lambda) < 3\pi & \text{ для режима 2,} \\ 0 < \Delta \arg G(\lambda) < \pi & \text{ для режима 3.} \end{aligned}$$

Выбирая скачки аргумента $G(\lambda)$ в точках A и B согласно [4] (C — точка автоматической ограниченности), получим индексы для решений задачи (4.1), автоматически ограниченных в точке C и интегрируемых (ограниченных) в точках A и B , а также ограниченных на бесконечности ($\kappa = 3(1)$ для режима 1, $\kappa = 2(0)$ для режима 2, $\kappa = 1(-1)$ для режима 3). Условие ограниченности давления означает, что

$$(4.2) \quad \Lambda(\zeta) \rightarrow 0, \zeta \rightarrow \infty, \zeta \Lambda(\zeta) \rightarrow 0, \zeta \rightarrow \infty.$$

Для того чтобы удовлетворить условиям (2.2), (2.3) и (4.2), нужно выбрать решение задачи (4.1), зависящее от четырех действительных констант. Это обеспечено только при $\kappa = 3$, что соответствует режиму 1. Режимы 2, 3 оказываются переопределенными. Решение задачи дается согласно [4] выражениями

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \Lambda(\zeta) &= \frac{\Phi(\zeta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta + i}{t + i} \frac{g(t) dt}{\Phi^+(t)(t - \zeta)} + \\ &+ \Phi(\zeta) \left(c_0 + c_1 \frac{\zeta - i}{\zeta + i} + c_2 \left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right)^2 + c_3 \left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right)^3 \right), \\ \Phi(\zeta) &= \begin{cases} \exp \Gamma(\zeta) & \text{при } \zeta \in S^+, \\ \left(\frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right)^\kappa \exp \Gamma(\zeta) & \text{при } \zeta \in S^-, \end{cases} \\ \Gamma(\zeta) &= \frac{\zeta + i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G_0(t) dt}{(t + i)(t - \zeta)}, \quad G_0(t) = \left(\frac{t + i}{t - i} \right)^\kappa G(t), \\ g(t) &= \begin{cases} \frac{2LM}{\sqrt{1 - L^2}} \delta_0(t - \lambda_0) & \text{в случае а,} \\ \frac{2LMi}{\sqrt{L^2 - 1}} \delta_0(t - \lambda_G) & \text{в случае б,} \end{cases} \\ &\kappa = 3. \end{aligned}$$

5. Определение констант c_0, c_1, c_2, c_3 . Единственность решения. Из представления решения (4.3) имеем

$$\begin{aligned} p_\lambda(\lambda, \sigma) &= \operatorname{Im} F(\zeta) + c_0 \operatorname{Im} \Phi(\zeta) + c_1 \operatorname{Im} \left(\Phi(\zeta) \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right) + \\ &+ c_2 \operatorname{Im} \left(\Phi(\zeta) \left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right)^2 \right) + c_3 \operatorname{Im} \left(\Phi(\zeta) \left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right)^3 \right), \end{aligned}$$

где

$$F(\zeta) = \frac{\Phi(\zeta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta + i}{t + i} \frac{g(t) dt}{\Phi^+(t)(t - \zeta)}.$$

Тогда условия (2.2), (2.3) и (4.2) примут вид

$$\begin{aligned} c_0 I_0 + c_1 I_1 + c_2 I_2 + c_3 I_3 &= \frac{v_N}{B} - I_4, \\ c_0 I_5 + c_1 I_6 + c_2 I_7 + c_3 I_8 &= p_N - I_9, \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ 3c_0 + c_1 - c_2 - 3c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{Im} \Phi(\zeta)}{\eta(\lambda)} d\lambda; \quad I_1 = \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{Im} \left(\Phi(\zeta) \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right)}{\eta(\lambda)} d\lambda; \\ I_2 &= \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{Im} \left(\Phi(\zeta) \left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right)^2 \right)}{\eta(\lambda)} d\lambda; \quad I_3 = \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{Im} \left(\Phi(\zeta) \left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right)^3 \right)}{\eta(\lambda)} d\lambda; \\ I_4 &= \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{Im} F(\zeta)}{\eta(\lambda)} d\lambda; \quad I_5 = \int_{-1}^0 \operatorname{Im} \Phi(\zeta) d\lambda; \\ I_6 &= \int_{-1}^0 \operatorname{Im} \left(\Phi(\zeta) \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right) d\lambda; \quad I_7 = \int_{-1}^0 \operatorname{Im} \left(\Phi(\zeta) \left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right)^2 \right) d\lambda; \\ I_8 &= \int_{-1}^0 \operatorname{Im} \left(\Phi(\zeta) \left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i} \right)^3 \right) d\lambda; \quad I_9 = \int_{-1}^0 \operatorname{Im} F(\zeta) d\lambda. \end{aligned}$$

Константы c_0, c_1, c_2, c_3 однозначно определяются при

$$J = \det \begin{vmatrix} I_0 & I_1 & I_2 & I_3 \\ I_5 & I_6 & I_7 & I_8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажем, что это условие выполнено. Пусть указанный определитель равен нулю и f_1 и f_2 — нетривиальные решения задачи (4.1), (2.2), (2.3), (4.2). Рассмотрим $f = f_1 - f_2$. Для давления p , соответствующего решению f , условия (2.2) и (2.3) принимают вид

$$(5.1) \quad \int_{AC} p_\lambda d\lambda = 0;$$

$$(5.2) \quad \int_{AC} \frac{p_\lambda d\lambda}{\eta(\lambda)} = 0.$$

Условия (4.2) остаются прежними. В силу леммы Зарембо—Жеро минимум и максимум давления p не могут достигаться на участке AB (см. рис. 2), так как $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, на BC , так как $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$, а на AC — в силу условия (3.2), за исключением точки D , где $\theta = 0$. Внутри области $\Delta p = 0$. Таким образом, экстремумы могут достигаться лишь в точках A, B, C, D . Если минимум достигается в точке A , то, согласно условию (5.1), $p_A = p_B = p_C$.

Тогда максимум достигается лишь в точке $D (p_D = p_*)$. Интегрируя условие (5.2) по частям, получим

$$\frac{p - p_*}{\eta(\lambda)} \Big|_A - \frac{p - p_*}{\eta(\lambda)} \Big|_C + \int_C^A \frac{p - p_*}{\eta^2} d\eta = 0.$$

При этом все три члена одного знака, следовательно, $p - p_* = 0$. Таким образом, $\min p = \max p$, значит, $p = \text{const}$, $f = 0$. Тогда задача сопряжения (4.1) однозначно разрешима в выбранном классе функций, и, следовательно, $J \neq 0$.

Таким образом, разрешимость сформулированной краевой задачи зависит от типа отраженного скачка уплотнения. Если отраженный скачок слабый и сильноустойчивый, то течение не изменит своего характера, т.е. произойдет деформация отраженного скачка уплотнения, и задача о возмущениях будет иметь решение. В остальных случаях поставленная автомодельная задача о возмущениях неразрешима, что свидетельствует о принципиальной перестройке течения.

Анализ полученного решения (4.3) показывает, что в угловой точке решение имеет логарифмическую особенность. Это обстоятельство указывает на неправомерность линейного приближения в малой окрестности точки перелома и на необходимость отдельного детального изучения поведения решения в окрестности этой точки. Полное изучение данного вопроса выходит за рамки предложенной работы.

В [3] аналогичные выводы получены при исследовании задачи о нестационарных неавтомодельных возмущениях стационарного течения, возникающего при регулярном отражении косоугольного скачка уплотнения от жесткой стенки. В [5] вывод о неразрешимости задачи о возмущениях сильного скачка уплотнения получен при анализе уравнений околосвукового приближения.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В.М. Тешукову за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ter-Minassiants S.M. The diffraction accompanying the regular reflexion of a plane obliquely impinging shock wave from the walls of an obtuse wedge // J. Fluid Mech. — 1969. — V. 35, pt 2.
2. Арутюнян Г.М., Карчевский Л.В. Отраженные ударные волны. — М.: Машиностроение, 1973.
3. Тешуков В.М. Об устойчивости регулярного отражения ударных волн // ПМТФ. — 1989. — № 3.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
5. Гришин А.В., Шифрин Э.Г. О режиме присоединенного скачка уплотнения на кромках V-образного крыла // ПММ. — 1979. — № 1.

г. Новосибирск

Поступила 15/1 1993 г.,
в окончательном варианте —
25/V 1993 г.

УДК 532.539

В.П. Киселев, С.П. Киселев, В.М. Фомин

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ОБЛАКОМ ЧАСТИЦ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В работе приведены результаты расчетов взаимодействия ударной волны (УВ) с облаком частиц. Показано существенное влияние объемной концентрации частиц на ускорение облака частиц.

© В.П. Киселев, С.П. Киселев, В.М. Фомин, 1994