

УДК 519.6

Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости*

Э.А. Бибердорф^{1,2}, М.А. Блинова², Н.И. Попова³

¹Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. В.А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

³Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090

E-mails: biberdorf@ngs.ru (Бибердорф Э.А.), blin_mary@mail.ru (Блинова М.А.), N.I.Popova@inp.nsk.su (Попова Н.И.)

Бибердорф Э.А., Блинова М.А., Попова Н.И. Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 2. — С. 139–154.

Алгоритм дихотомии спектра несимметричной матрицы модифицирован с целью применения к матрицам, полученным при дискретизации дифференциальных операторов. Приведены численные примеры, в том числе исследование устойчивости плоскопараллельного течения Пуазейля.

DOI: 10.15372/SJNM20180202

Ключевые слова: дихотомия спектра, проектор, устойчивость, плоскопараллельное течение.

Biberdorf E.A., Blinova M.A., Popova N.I. Modifications of the dichotomy method of a matrix spectrum and their application to stability tasks // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 2. — P. 139–154.

The paper deals with development of spectrum dichotomy methods for the matrices with a large norm. Such matrices appear as a result of discretization of differential operators. The results of some numerical experiments including the stability investigation for the Poiseuille plane-parallel stream are given.

Keywords: spectrum dichotomy, projector, stability, plane-parallel stream.

1. Введение

Данная статья посвящена дальнейшему развитию метода разделения спектральных пятен и определения инвариантных подпространств несимметричной матрицы. Актуальность данного вопроса связана с тем, что в компьютерной дискретной арифметике несимметричная спектральная задача в классической постановке является некорректной и приводит к вычислительным парадоксам (см., например, [1]). Переход в формулировке задачи от определения индивидуальных собственных значений и векторов к определению расположения спектральных пятен относительно кривой позволил перевести задачу в разряд устойчивых к вычислительным погрешностям, так как его основу составляет работа с симметрическими и ортогональными матрицами.

История развития метода дихотомии спектра насчитывает несколько десятилетий. В основе метода лежит теория устойчивости Ляпунова, которая использует положительно

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-01-00791).

определенные формы. Отметим, что многие основные понятия, свойства и алгоритмические подходы для задачи дихотомии матричного спектра были представлены в работах [1–7]. Развитию теории и алгоритмов дихотомии посвящены, например, работы [8, 9], а также многие другие.

В данной работе мы представляем модификацию алгоритма дихотомии матричного спектра, с помощью которой возможно проводить спектральные исследования дифференциальных операторов, описывающих течения жидкости. Для его применения необходимо подготовительный этап дискретизации оператора. В примере, приведенном в конце статьи, мы, следуя [10], используем метод коллокаций. Вопрос о степени соответствия спектра дифференциального оператора и его дискретного аналога мы оставляем за скобками, это тема другого исследования.

Алгоритм можно разделить на две основные части:

- 1) сведение линейной дихотомии, т. е. задачи о распределении спектра по полуплоскостям (верхней–нижней, правой–левой), к дихотомии единичной окружностью путем вычисления матричной экспоненты;
- 2) дихотомия единичной окружностью матрицы, полученной на первом шаге.

Большая норма является особенностью матриц, полученных дискретизацией дифференциальных операторов. Вычисление матричной экспоненты для таких матриц невозможно, так как вызывает переполнение. Таким образом, первый пункт алгоритма должен предусматривать обязательную нормировку матрицы. Однако при этом наименьшие собственные значения, которые как раз и представляют особый интерес, как бы “прижимаются” к границе между полуплоскостями, и результат второго пункта оказывается ложноотрицательным. Изменения, внесенные в основной алгоритм, разрешают это противоречие.

В первой части данной работы приводится обзор утверждений, на которых базируется алгоритм дихотомии единичной окружностью. Затем приведена доработанная редакция алгоритма [11]. Этот алгоритм аналогичен [12], но отличается простотой и экономичностью. Новый вариант несколько проигрывает в быстродействии алгоритму из [7], однако предусматривает свободу выбора матрицы C в правой части уравнения Ляпунова.

Во второй части работы обосновывается особый подход к сведению линейной дихотомии к круговой для матриц с большой нормой. В конце статьи приводятся численные эксперименты, в том числе исследование устойчивости плоскопараллельного течения Пуазейля.

Алгоритмы дихотомии реализованы в рамках программного пакета GALA-3.0 (описание версии GALA-2.0 см. в [13]).

2. Круговая дихотомия

Утверждения 1–9, приведенные ниже, доказаны в [1–14] и здесь приводятся без доказательства.

Рассмотрим пучок $N \times N$ -матриц $A - \lambda B$. Пучок называется регулярным на единичной окружности, если для любого φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\det(A - e^{i\varphi} B) \neq 0$.

Утверждение 1. Для матричного пучка, регулярного на единичной окружности, существует каноническое разложение

$$A = T \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & I_M \end{pmatrix} S, \quad B = T \begin{pmatrix} I_\Lambda & \\ & M \end{pmatrix} S, \quad (1)$$

где матрицы T и S не вырождены, собственные значения матричных пучков $\Lambda - \lambda I_\Lambda$ и $I_M - \lambda M$ совпадают с собственными значениями пучка $A - \lambda B$, лежащими внутри и вне единичной окружности соответственно.

Определим критерий разделения спектра пучка единичной окружностью

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A - e^{i\varphi} B)^{-1} (ACA^* + BCB^*) (A - e^{i\varphi} B)^{-*} d\varphi, \quad \omega = \|H\|, \quad (2)$$

где $C = C^* > 0$, например $C = I$. Видно, что $\omega = \|H\| < \infty$ тогда и только тогда, когда пучок (1) регулярен.

Утверждение 2. Пучок $A - \lambda B$ регулярен на единичной окружности тогда и только тогда, когда система матричных уравнений, обобщающая классическое уравнение Ляпунова,

$$\begin{cases} P^2 = P, & P(A+B)^{-1}B = (A+B)^{-1}BP, & HP^* = PH, \\ BHB^* - ANA^* = A \left[PCP^* - (I-P)C(I-P)^* \right] A^* + \\ & B \left[PCP^* - (I-P)C(I-P)^* \right] B^*, \\ H = H^* > 0, & C = C^* > 0 \end{cases} \quad (3)$$

имеет единственное решение, где P — проектор на приводящее пространство пучка, соответствующее собственным значениям, лежащим внутри единичной окружности.

Утверждение 3. Если P — проектор на некоторое подпространство, то вектор-столбцы матриц W_1, W_2 , полученных при сингулярном разложении

$$P = (W_1 | \widetilde{W}_1) \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1, \quad I - P = (W_2 | \widetilde{W}_2) \begin{pmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2, \quad (4)$$

образуют базисы в данном подпространстве и его дополнении.

Таким образом, нахождение H и P позволяет:

- 1) по значению критерия $\omega = \|H\|$ определить, есть ли на единичной окружности точки спектра пучка;
- 2) при наличии дихотомии ($\omega = \|H\| < \infty$) определить, сколько собственных значений пучка лежит внутри $N_1 = \text{tr}P$ и вне $N_2 = N - N_1$ единичной окружности;
- 3) определить базисы приводящих подпространств, используя сингулярные разложения проекторов $P, I - P$.

Замечание 1. Если $B = I$, то приводящие подпространства совпадают с инвариантными подпространствами матрицы A .

Утверждение 4 (Аналог формы Жордана). Если P — проектор на инвариантное подпространство матрицы A , соответствующее собственным значениям, лежащим внутри единичного круга, матрицы W_1, W_2 получены из (4), тогда

$$A = (W_1 | W_2) \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} (W_1 | W_2)^{-1}, \quad (5)$$

где спектры матриц A_1, A_2 лежат внутри и вне единичного круга соответственно.

Утверждение 5. Если $\|H\| < \infty$ в (2), тогда имеет место представление

$$H = G_{+0}CG_{+0}^* + G_{-0}CG_{-0}^* + 2 \sum_{|j|=1}^{\infty} G_jCG_j^*, \quad (6)$$

где матричная функция G_j (функция Грина) является решением системы разностных уравнений:

$$\begin{cases} AG_j - BG_{j+1} = 0, & -\infty < j \leq -1, \quad +0 \leq j < +\infty, \\ G_{+0} - G_{-0} = I, \\ \|G_j\| \rightarrow 0, & j \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (7)$$

При этом

$$P = G_{+0}, \quad -(I - P) = G_{-0}. \quad (8)$$

Утверждение 6. Матричная функция (7) удовлетворяет оценке

$$\|G_{\pm j}\| \leq \sqrt{\|C^{-1}\| \|H\|} \rho^j, \quad \text{где} \quad \rho = \sqrt{\frac{\|C^{-1}\| \|H\| - 1}{\|C^{-1}\| \|H\| + 1}}. \quad (9)$$

Отсюда следует

Утверждение 7. Если $\|H\|$ конечна и ρ определено в (9), тогда кольцо с внутренним радиусом ρ и внешним радиусом $1/\rho$ не содержит точек спектра матричного пучка $A - \lambda B$.

Конечномерный вариант системы (7) имеет вид:

$$\begin{cases} AG_j^{(k)} - BG_{j+1}^{(k)} = 0, & -2^k + 1 < j \leq -1, \quad +0 \leq j < 2^k, \\ G_{+0}^{(k)} - G_{-0}^{(k)} = I, \\ AG_{2^k}^{(k)} - BG_{-2^k+1}^{(k)} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Утверждение 8. Последовательность $G_j^{(k)}$ сходится к G_j в смысле следующего неравенства:

$$\max_{-J+1 \leq j \leq J} \|G_j - G_j^{(k)}\| \leq 2\sqrt{\|C^{-1}\| \|H\|} \frac{\rho^{J+1}}{1 - \rho^{2J+1}}, \quad J = 2^k. \quad (11)$$

Перенумерация элементов матричной последовательности $G_j^{(k)}$:

$$Y_j^{(k+1)} = G_j^{(k)} \quad \text{при} \quad +0 \leq j \leq 2^k, \quad Y_{2^k+j}^{(k+1)} = G_{-2^k+j}^{(k)} \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq 2^k,$$

то есть “склейка” положительной и отрицательной ветвей $G_j^{(k)}$, позволяет упростить запись системы (10):

$$\begin{cases} AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, & 0 \leq j < 2^{k+1} - 1, \\ Y_{+0}^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = I. \end{cases} \quad (12)$$

Утверждение 9. Пусть пучок $A - \lambda B$ регулярен на единичной окружности. Матричная последовательность

$$H^{(k+1)} = Y_0^{(k+1)} C Y_0^{(k+1)*} + 2 \sum_{j=1}^{2^{k+1}} Y_j^{(k+1)} C Y_j^{(k+1)*} + Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} C Y_{2^{k+1}}^{(k+1)*} \quad (13)$$

сходится к матрице H , причем верна оценка

$$\|H - H^{(k+1)}\| \leq 2\mu(C)\|H\|\rho^{2J}(7\|C\|\|H\| + 16J + 2), \quad J = 2^k, \quad (14)$$

где $\mu(C)$ есть число обусловленности матрицы C .

Будем полагать $A_0 = A, B_0 = B$. Метод ортогональных исключений [3], основой которого является последовательное вычисление матричных пучков $A_{k+1} - \lambda B_{k+1}$ с помощью QR-разложения

$$\begin{pmatrix} -B_k & A_k & 0 \\ A_k & 0 & -B_k \end{pmatrix} = Q_{k+1} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{k+1} & -B_{k+1} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

позволяет упрощать систему (12), исключая из нее на каждом шаге половину переменных. Сравним системы ($0 \leq j < 2^k - 1$):

$$\begin{cases} AY_j^{(k)} - BY_{j+1}^{(k)} = 0, \\ Y_0^{(k)} - Y_{2^k}^{(k)} = I, \end{cases} \quad \begin{cases} AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, \\ Y_{+0}^{(k+1)} - Y_{2^k}^{(k+1)} = U_k, \end{cases} \quad \begin{cases} AY_{j+2^k}^{(k+1)} - BY_{j+2^k+1}^{(k+1)} = 0, \\ Y_{2^k}^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = V_k \end{cases}$$

и заметим, что

$$Y_j^{(k+1)} = Y_j^{(k)} U_k, \quad Y_{j+2^k}^{(k+1)} = Y_j^{(k)} V_k.$$

При этом

$$\begin{cases} A_k U_k - B_k V_k = 0, \\ U_k + V_k = I, \end{cases} \quad \text{а значит,} \quad \begin{cases} U_k = (A_k + B_k)^{-1} B_k, \\ V_k = -(A_k - B_k)^{-1} A_k. \end{cases} \quad (16)$$

Учтем также, что матрицы $Y_j^{(k)}, U_k,$ и V_k перестановочны, что следует из (16) и из явного вида $Y_j^{(k)}$:

$$Y_j^{(k)} = S^{-1} \begin{pmatrix} (I_\Lambda - \Lambda^{2^k})^{-1} \Lambda^j & 0 \\ 0 & (M^{2^k} - I_M)^{-1} M^{2^k - j} \end{pmatrix} S.$$

Тем самым доказано

Утверждение 10. При $k = 1$ решение системы (12) имеет вид

$$\begin{aligned} Y_0^{(1)} &= \frac{1}{2} [(A + B)^{-1} - (A - B)^{-1}] B, \\ Y_1^{(1)} &= \frac{1}{2} [(A + B)^{-1} - (A - B)^{-1}] A = -\frac{1}{2} [(A + B)^{-1} + (A - B)^{-1}] B, \\ Y_2^{(1)} &= \frac{1}{2} [(A + B)^{-1} + (A - B)^{-1}] A. \end{aligned}$$

При $k > 1$ приближенная функция Грина (12) вычисляется рекуррентным образом

$$Y_j^{(k+1)} = (A_k + B_k)^{-1} B_k Y_j^{(k)}, \quad Y_{j+2^k}^{(k+1)} = (B_k - A_k)^{-1} A_k Y_j^{(k)}.$$

Отсюда следуют формулы для рекуррентного вычисления матриц $H^{(k)}$ (13).

Утверждение 11. Матрицы $H^{(k)}$ вычисляются последовательно:

$$H^{(k+1)} = A_k \tilde{H}^{(k+1)} A_k^* + B_k \tilde{H}^{(k+1)} B_k^*,$$

где

$$\tilde{H}^{(k+1)} = (A_k + B_k)^{-1} H^{(k)} (A_k + B_k)^{-*}$$

и

$$\tilde{H}^{(1)} = K_- C K_-^* + K_+ C K_+^*,$$

$$K_- = \frac{1}{2} [(A_0 + B_0)^{-1} - (A_0 - B_0)^{-1}], \quad K_+ = \frac{1}{2} [(A_0 + B_0)^{-1} + (A_0 - B_0)^{-1}].$$

Последнее утверждение служит основанием для алгоритма дихотомии спектра единичной окружностью. Неравенства (11) и (14) позволяют оценить скорость его сходимости. Исходя из максимально допустимой величины $\|H\|$, можно оценить максимальное число итераций, необходимых для того, чтобы добиться желаемого уровня сходимости. В данный момент ведется работа по получению гарантированной оценки точности этого алгоритма.

Замечание 2. Будем полагать, что при $\omega_{\text{cal}} = \|H_{\text{cal}}\| \geq \omega_{\text{max}}$ и $\max\{\mu(A_0 - B_0), \mu(A_0 + B_0)\} > \mu_{\text{max}}$ собственные значения пучка находятся слишком близко от окружности, и дихотомия практически невозможна. Если во время выполнения алгоритма возникает такая ситуация, то вычисления прерываются с сообщением “Дихотомия невозможна”.

Алгоритм 1 (Круговая дихотомия единичной окружностью). Задан матричный пучок $A_0 - \lambda B_0$; ε_{it} — требуемая точность итерационного процесса; $\omega_{\text{max}}, \mu_{\text{max}}$ — большие положительные числа, $C = C^* > 0$.

1. Проверка выполнимости алгоритма. Если $\max\{\mu(A_0 - B_0), \mu(A_0 + B_0)\} > \mu_{\text{max}}$, то полагаем $\omega_{\text{cal}} = \omega_{\text{max}}$, “Дихотомия невозможна”, конец расчетов.
2. Первый шаг в вычислении матрицы H_{cal} :
 - присвоить $H^{(0)} = C$, $k = 1$;
 - вычислить

$$K_- = \frac{1}{2} [(A_0 + B_0)^{-1} - (A_0 - B_0)^{-1}], \quad K_+ = \frac{1}{2} [(A_0 + B_0)^{-1} + (A_0 - B_0)^{-1}],$$

$$\tilde{H}^{(1)} = K_- H^{(0)} K_-^* + K_+ H^{(0)} K_+^*, \quad H^{(1)} = A_0 \tilde{H}^{(1)} A_0^* + B_0 \tilde{H}^{(1)} B_0^*.$$

3. Цикл, пока $\|H^{(k)} - H^{(k-1)}\| > \varepsilon_{\text{it}}$:
 - если $\|H^{(k)}\| \geq \omega_{\text{max}}$, то $\omega_{\text{cal}} = \omega_{\text{max}}$, “Дихотомия невозможна”, конец расчетов;
 - вычислить A_k, B_k , выполнив QR -разложение составной матрицы

$$\begin{pmatrix} -B_{k-1} & A_{k-1} & 0 \\ A_{k-1} & 0 & -B_{k-1} \end{pmatrix} = \mathcal{Q}_k \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & A_k & -B_k \end{pmatrix};$$

- вычислить

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(k+1)} &= (A_k + B_k)^{-1} H^{(k)} (A_k + B_k)^{-*}, \\ H^{(k+2)} &= A_k \tilde{H}^{(k+1)} A_k^* + B_k \tilde{H}^{(k+1)} B_k^*; \end{aligned}$$

- $k = k + 1$.

4. Присвоить $H_{\text{cal}} = H^{(k)}$, $\omega_{\text{cal}} = \|H_{\text{cal}}\|$, $P_{\text{cal}} = -(A_k - B_k)^{-1} B_k$.

Результат выполнения алгоритма — вычисленные проектор P_{cal} , критерий дихотомии $\omega_{\text{cal}} = \|H_{\text{cal}}\|$.

Дополнительно можно оценить расстояние от спектра до окружности согласно утверждению 7 и определить приводящие подпространства пучка по формулам (4). Если в исходном пучке $B = I$, то матрицу A можно привести к клеточно-диагональной форме согласно формуле (5).

3. Линейная дихотомии спектра матриц с большой нормой

Дихотомия спектра матрицы A мнимой осью сводится к дихотомии спектра единичной окружностью с помощью экспоненциального преобразования $B = e^{\tau A}$ (см. [3]), где нормировочный множитель τ выбирается так, чтобы гарантировать вычислимость матричной экспоненты, например, $\tau = (2 \|A\|)^{-1}$.

Если вычисленный по алгоритму 1 критерий дихотомии $\omega_{\text{cal}} = \|H_{\text{cal}}\| < \infty$ конечен, то спектр матрицы A делится мнимой осью на две части, причем оценка минимального расстояния от точек спектра до мнимой оси очевидно имеет вид

$$|\operatorname{Re} \lambda| \geq 2 \|A\| |\ln \rho| > 0, \tag{17}$$

где ρ определяется в (9). Для разделения спектра матрицы любой прямой $\operatorname{Re} \lambda = s$, параллельной мнимой оси, достаточно заменить матрицу A на матрицу $A - sI$.

Алгоритм 2 (Линейная дихотомия мнимой осью). Задана матрица A .

1. Нормировка матрицы A : $\tilde{A} = \tau A$, где $\tau = 1/2 \|A\|$.
2. Вычислить матрицу $B = e^{\tilde{A}}$.
3. Применить алгоритм 1 к пучку $B - \lambda I$ и вычислить $\omega_{\text{cal}} = \|H_{\text{cal}}\|$ и P_{cal} .

Замечание 3. Если требуется, можно также оценить минимальное расстояние от точек спектра матрицы A до мнимой оси (17), вычислить размерности и базисы инвариантных подпространств (4). В данном случае матрицы A и B одновременно приводятся к блочно-диагональной форме

$$A = (W_1 | W_2) \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} (W_1 | W_2)^{-1}, \quad B = (W_1 | W_2) \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} (W_1 | W_2)^{-1},$$

где спектры матриц A_1, A_2 лежат справа и слева от мнимой оси, а спектры матриц B_1, B_2 внутри и вне единичного круга соответственно.

Если норма матрицы A велика, то вычисление матрицы e^A может оказаться невозможным, так как значения элементов будут выходить за границы машинной арифметики. В то же время переход к нормированной матрице τA , $\tau \approx 1/2 \|A\|$, приводит к тому, что ее спектр как бы прижимается к мнимой оси, соответственно спектр матричной экспоненты $e^{\tau A}$ становится практически неотделим от единичной окружности. В итоге может быть получено слишком большое значение критерия дихотомии $\|H(A)\|$ даже в том случае, если спектр исходной матрицы находился на существенном расстоянии от мнимой оси.

Чтобы разрешить эту ситуацию, необходимо обратить внимание на следующие моменты. Пусть у матрицы A отсутствуют собственные значения на мнимой оси. Обозначим $A_0 = e^A$ и $A_{-k} = e^{\tau A}$. Во-первых, если выбрать $\tau = 2^{-k}$, то окажется, что $A_0 = A_{-k}^{2^k}$. При этом, очевидно, существуют матрицы S , L_0 , L_∞ такие, что

$$A_{-k} = S^{-1} \begin{pmatrix} L_0 & \\ & L_\infty \end{pmatrix} S,$$

где S невырождена, спектр L_0 лежит строго внутри, а спектр L_∞ — строго вне единичной окружности. Тогда аналогичное представление для матрицы A_0 выглядит следующим образом:

$$A_0 = S^{-1} \begin{pmatrix} L_0^{2^k} & \\ & L_\infty^{2^k} \end{pmatrix} S = S^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda_0 & \\ & \Lambda_\infty \end{pmatrix} S.$$

Во-вторых, если обозначить $B_0 = I$, то правильный результат вычисления критерия дихотомии мог бы быть получен при применении алгоритма дихотомии единичной окружностью к пучку матриц $A_0 - \lambda B_0$. По предположению, сделанному выше, данный пучок регулярен на единичной окружности, следовательно, имеет место каноническое разложение

$$A_0 = T \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & I \end{pmatrix} S, \quad B_0 = T \begin{pmatrix} I & \\ & M \end{pmatrix} S, \quad (18)$$

где матрицы S и T невырождены,

$$T = S^{-1} \begin{pmatrix} I & \\ & \Lambda_\infty \end{pmatrix},$$

а спектры матриц $\Lambda = \Lambda_0$ и $M = \Lambda_\infty^{-1}$ лежат строго внутри единичной окружности. В-третьих, аналогично разложению (18) можно записать разложение для пучка $A_{-k} - \lambda B_{-k} = A_{-k} - \lambda I$:

$$A_{-k} = T_{-k} \begin{pmatrix} L_0 & \\ & I \end{pmatrix} S, \quad B_{-k} = T_{-k} \begin{pmatrix} I & \\ & L_\infty^{-1} \end{pmatrix} S.$$

После применения к данному пучку k раз ортогональных исключений (15) он преобразуется в пучок $\tilde{A}_0 - \lambda \tilde{B}_0$ такой, что

$$\tilde{A}_0 = T_0 \begin{pmatrix} L_0^{2^k} & \\ & I \end{pmatrix} S, \quad \tilde{B}_0 = T_0 \begin{pmatrix} I & \\ & (L_\infty^{-1})^{2^k} \end{pmatrix} S.$$

Этот пучок отличается от пучка $A_0 - \lambda B_0$ только левой приводящей матрицей, от которой не зависит критерий дихотомии H (см. представления (2) и (6)). Значит, матрица H

может быть вычислена, исходя из пучка $\tilde{A}_0 - \lambda\tilde{B}_0$, полученного из пучка $A_{-k} - \lambda I$ после применения к нему k ортогональных исключений.

Алгоритм 3 (Линейная дихотомия для матриц с большой нормой). Задана матрица A , $\|A\| \gg 1$.

1. Выбрать k из условия $2^k \approx 2\|A\|$.
2. Присвоить $A_{-k} = e^{\tau A}$, где $\tau = 2^{-k}$, $B_{-k} = I$.
3. Применить k раз ортогональные исключения к матричному пучку $A_{-k} - \lambda B_{-k}$:

$$\begin{pmatrix} -B_j & A_j & 0 \\ A_j & 0 & -B_j \end{pmatrix} = Q_j \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{j+1} & -B_{j+1} \end{pmatrix}.$$

Результат — матричный пучок $\tilde{A}_0 - \lambda\tilde{B}_0$.

4. Применить алгоритм 1 к пучку $\tilde{A}_0 - \lambda\tilde{B}_0$.

4. Численные примеры

Для визуальной демонстрации решения задачи дихотомии спектра используются так называемые спектральные портреты. Как правило, под этим понимается какое-либо изображение функции $\|(A - \lambda I)^{-1}\|$ или других функций, ей эквивалентных (например $\sigma_{\min}(A - \lambda I)$). Если эта функция изображается в виде линий уровня, то в результате можно увидеть именно пятна ε -спектра для различных ε (см. [1, 3]). Использование алгоритмов дихотомии матричного спектра позволяет перейти к одномерным портретам [1, 3]. Если задано однопараметрическое семейство кривых $\gamma(s)$, то одномерным спектральным портретом называется график функции $f(s) = \|H_{\gamma(s)}(A)\|$. Такие графики позволяют судить о том, при каких значениях параметра s кривые семейства пересекают спектральные пятна матрицы A . Заметим, что для визуального анализа более удобны графики $f(s) = \log_{10} \|H_{\gamma(s)}(A)\|$, именно они изображены в примерах ниже. Дополнительные вычисления проекторов на инвариантные подпространства, соответствующие отдельным спектральным пятнам, дают информацию о том, сколько собственных значений содержится в каждом пятне, а также позволяют привести матрицу A к клеточно-диагональному виду так, чтобы каждая клетка соответствовала одному из выделенных пятен (вычислительно устойчивый аналог формы Жордана). Если кривые семейства $\gamma(s)$ являются окружностями с центром в нуле и радиусом s , то график $f(s)$ называется однопараметрическим радиальным портретом. Если рассматривается семейство прямых $\operatorname{Re} \lambda = s$, то спектральный портрет называется линейным.

Устойчивость решения линейной системы ОДУ. Пусть матрица системы $y' = Ay$ представляет собой жорданову клетку размера 5×5 :

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 15 & & & \\ & -0.5 & 15 & & \\ & & -0.5 & 15 & \\ & & & -0.5 & 15 \\ & & & & -0.5 \end{pmatrix},$$

а матрица B отличается от A одним элементом $B(5, 1) = 5 \cdot 10^{-6}$. На рисунке 1 приведены в сравнении изображения пятен ε -спектра этих матриц, а также их линейные спектральные портреты. Кратное собственное значение матрицы A при возмущении матрицы

на $5 \cdot 10^{-6}$ распалось на отдельные собственные значения в пределах пятна ε -спектра, соответствующего $\varepsilon = 10^{-5}$, что и следовало ожидать. Линейный спектральный портрет демонстрирует эту же ситуацию: большое расплывшееся спектральное пятно матрицы A и отдельные пики, связанные с парами комплексно-сопряженных собственных значений матрицы B .

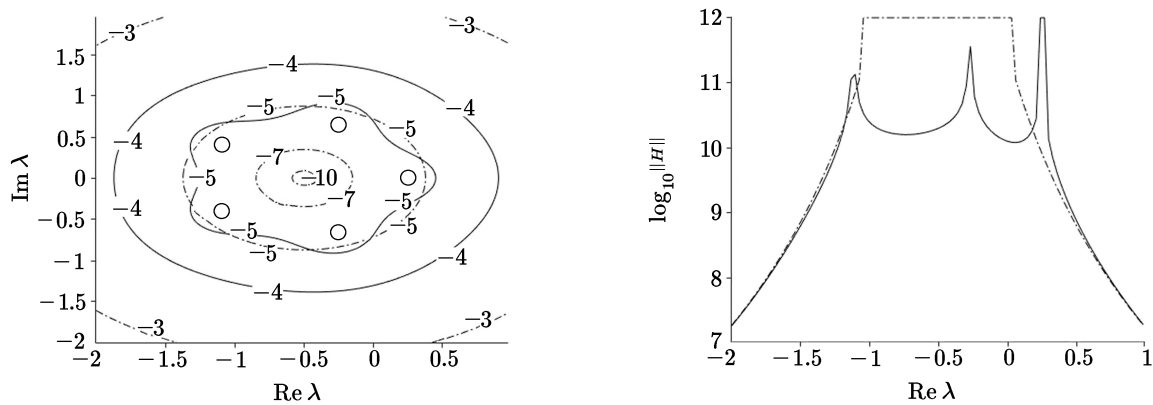


Рис. 1. Слева: ε -спектр матриц A (штрих-пунктир) и B (сплошная линия), числами обозначены порядки соответствующего ε ; справа: линейный портрет матриц A (штрих-пунктир) и B (сплошная линия)

Таким образом, высота и ширина пика на одномерном спектральном портрете матрицы A говорит о том, что устойчивая матрица A при небольшом возмущении может перейти в разряд неустойчивых. Также эти параметры свидетельствуют о том, что на начальном отрезке переменной t матричная экспонента $\exp(At)$ быстро растет. Действительно, на начальном интервале нормы матриц $\exp(At)$ и $\exp(Bt)$ растут со сравнимой скоростью и достигают величин порядка 10^5 при $t \approx 3$. На практике такое поведение устойчивого решения системы может приводить к разрушению конструкций и механизмов на конечных временных интервалах. Итак, линейный портрет дает информацию как о расположении спектра матрицы A и его чувствительности к погрешностям, так и о характере решения системы $y' = Ay$.

Сингулярное разложение проекторов на инвариантные подпространства позволяет построить матрицу перехода S и клеточно-диагональную форму матрицы B :

$$SBS^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc|c} -7.89 \cdot 10^{-1} & -15 & & & \\ 2.04 \cdot 10^{-2} & -1.44 & & & \\ \hline & & -2.40 & 14.7 & \\ & & -3.45 \cdot 10^{-1} & 1.87 & \\ \hline & & & & 2.60 \cdot 10^{-1} \end{array} \right).$$

Здесь обусловленность $\mu(S) = 1.054 \cdot 10^5$ свидетельствует о том, что инвариантные подпространства далеко не ортогональны.

Пример линейной дихотомии спектра матрицы с большой нормой. Используем метод дихотомии матричного спектра для изучения процесса формирования турбулентного течения и численного исследования его устойчивости [15]. Рассмотрим плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости (рис. 2), причем без потери общности для удобства положим расстояние между пластинами $2h = 2$, т. е. $h = 1$.

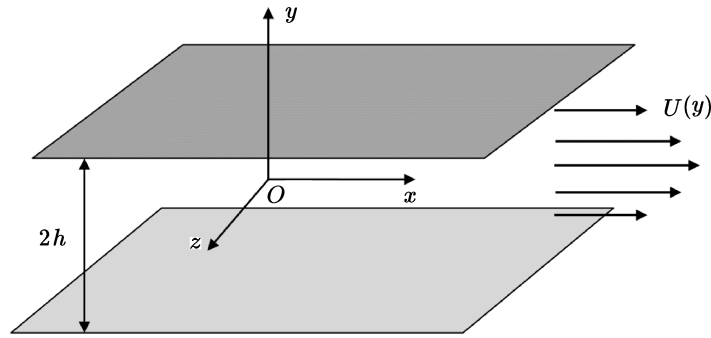


Рис. 2. Плоскопараллельное течение

Для того чтобы построить матричный пучок, чьи спектральные характеристики отражают устойчивость течения, будем следовать [10]. Скорость $\vec{U}(\vec{r})$ и давление $P(\vec{r})$ установившегося течения, а также результаты их возмущений $\vec{U}_1(\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r}) + \vec{u}(\vec{r}, t)$ и $P_1(\vec{r}) = P(\vec{r}) + p(\vec{r}, t)$ удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса. Разность двух этих систем после отбрасывания квадратичных членов представляет собой линейную систему для возмущений установившегося течения. Она должна быть дополнена условиями на плоскостях, ограничивающих течение, а именно, условиями прилипания и непротекания. Для изучения условий роста возмущений рассматриваются частные решения вида

$$\{u, v, w, p\} = \{\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y), \hat{p}(y)\} e^{i[(\alpha x + \beta z) - \omega t]}, \quad (19)$$

где $\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y), \hat{p}(y)$ — комплексные амплитуды возмущений потока, α и β — комплексные волновые числа, ω — комплексная круговая частота. Очевидно, что частное решение растёт, если $\text{Im } \omega > 0$ или $\text{Im } \alpha < 0$, или $\text{Im } \beta < 0$. При подстановке решений (19) в описанную выше линейную систему уравнений получается, в частности, уравнение Орра–Зоммерфельда:

$$\left\{ i(\alpha U - \omega) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) - i\alpha U'' - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 \right\} \hat{v} = 0,$$

где $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\text{Re} = UL/\nu$ — число Рейнольдса, U, L — характерные скорость и длина рассматриваемого течения, ν — кинематический коэффициент вязкости среды. Профиль установившегося течения, как правило, принимается квадратичным $U(y) = 1 - y^2$ (течение Пуазейля). Условия прилипания и непротекания влекут за собой краевые условия для \hat{v} :

$$\hat{v}|_{y=\pm 1} = 0, \quad \hat{v}'|_{y=\pm 1} = 0.$$

Дискретизация дифференциальных операторов с учетом краевых условий приводит к дискретному уравнению Орра–Зоммерфельда:

$$\left\{ (D_N^2 - k^2 I_N)^2 - i\text{Re} \left[\text{diag}(\alpha U - \omega)(D_N^2 - k^2 I_N) - \text{diag}(\alpha U'') \right] \right\} \hat{v} = 0,$$

которое равносильно алгебраической задаче на собственные значения:

$$(A - (\omega_i - i\omega_r)B)\hat{v} = 0,$$

$$A = \frac{1}{\operatorname{Re}} (D_N^2 - k^2 I)^2 - i\alpha \operatorname{diag} U (D_N^2 - k^2 I) - 2i\alpha I, \quad B = (D_N^2 - k^2 I), \quad (20)$$

или

$$(\tilde{A} - \tilde{\omega} I) \hat{v} = 0, \quad \text{где} \quad \tilde{A} = B^{-1} A, \quad \tilde{\omega} = -i\omega = \omega_i - i\omega_r.$$

Чтобы установить, устойчиво течение Пуазейля или нет, необходимо определить, есть ли в правой полуплоскости собственные значения матрицы \tilde{A} . С этой целью используется алгоритм 3.

Для построения матрицы D_N , аппроксимирующей производную d/dy , используем метод, подробно описанный в [10]. При этом искомая функция решения интерполируется суммой первых N полиномов Чебышева. В качестве точек коллокации выбираются точки Гаусса-Лобатто $y_k = \cos(\pi k/N)$, $k = 0, 1, \dots, N$. Явный вид элементов матрицы D_N :

$$(D_N)_{lj} = \begin{cases} \frac{c_l (-1)^{l+j}}{c_j y_l - y_j}, & l \neq j, \quad \text{где} \quad c_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N, \\ 1, & j = 1, \dots, N-1, \end{cases} \\ \frac{-y_j}{2(1-y_j^2)}, & 1 \leq l = j \leq N-1, \\ \frac{2N^2+1}{6}, & l = j = 0, \\ -\frac{2N^2+1}{6}, & l = j = N. \end{cases}$$

Также в [10] представлен способ аппроксимации условий Дирихле и Неймана на границах отрезка $[-1, 1]$.

Положим $\operatorname{Re} = 5900$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$, $N = 50$ и изобразим линейный портрет матрицы \tilde{A} . На рис. 3 изображены графики критерия дихотомии $\log_{10} \|H(\tilde{A} - \omega_i I)\|$ и количество собственных значений матрицы \tilde{A} , вещественная часть у которых больше ω_i , $-\operatorname{tr} P(\tilde{A} - \omega_i I)$. Исходя из этих графиков, мы видим, что одно собственное значение пучка (20) находится в правой полуплоскости. Это означает, что оператор Орра-Зоммерфельда имеет одно собственное значение в верхней полуплоскости, а, следовательно, течение Пуазейля неустойчиво.

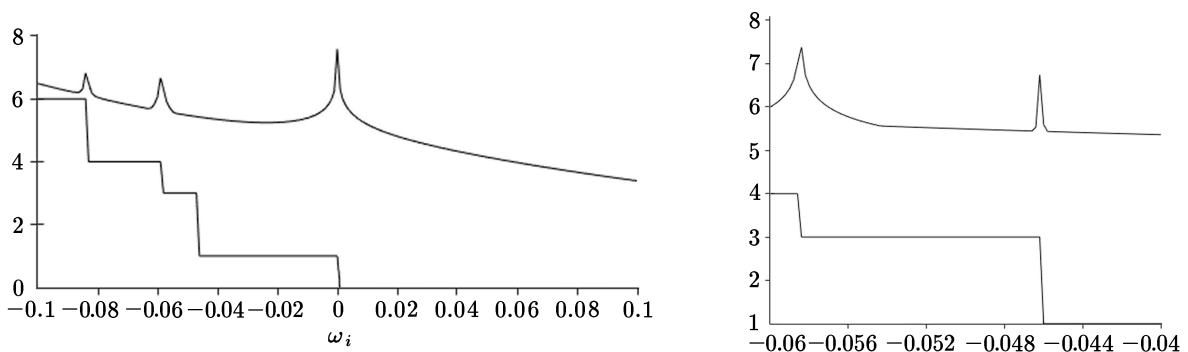


Рис. 3. Линейный спектральный портрет дискретизированного оператора Орра-Зоммерфельда при $\operatorname{Re} = 5900$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$, $N = 50$: $\log_{10} \|H(\tilde{A} - \omega_i I)\|$ — кривая, $\operatorname{tr} P(\tilde{A} - \omega_i I)$ — ломаная; справа более подробно показан участок $\omega_i \in [-0.06, -0.04]$

Так как в правой полуплоскости находится только одно собственное значение матрицы \tilde{A} , сингулярное разложение проектора на соответствующее этому собственному

значению инвариантное подпространство позволяет вычислить собственную функцию для этого значения (рис. 4).

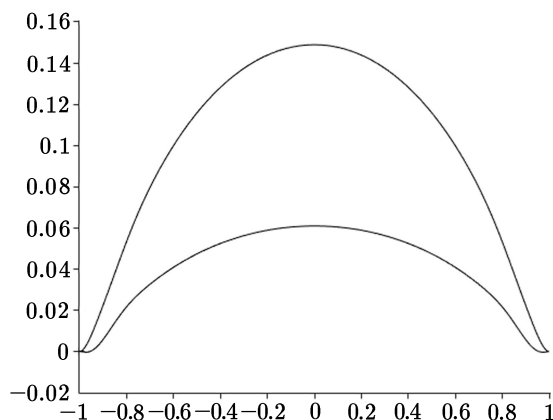


Рис. 4. Вещественная и мнимая части собственной функции $\hat{v}(y)$ оператора Орра–Зоммерфельда, соответствующей неустойчивому собственному значению ω ($\text{Im} \omega > 0$) при $\text{Re} = 5900$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$, $N = 50$

Также можно определить, при каком числе Рейнольдса для фиксированных параметров α и β течение теряет устойчивость. Для этого достаточно исследовать поведение интегрального критерия в зависимости от Re , выполняя дихотомию спектра пучка (20) мнимой осью. Результат такого исследования представлен на рис. 5, на котором видно, что при $\text{Re} < 5770$ все собственные значения матрицы \tilde{A} находятся в левой полуплоскости, а следовательно, течение Пуазейля устойчиво. При возрастании числа Рейнольдса устойчивость теряется, так как одно из собственных значений переходит в область неустойчивости, причем при дальнейшем росте числа Рейнольдса количество таких собственных значений не увеличивается. Полученные результаты полностью соответствуют известному факту, что плоскопараллельное течение Пуазейля теряет устойчивость при $\text{Re} = 5772.22$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$.

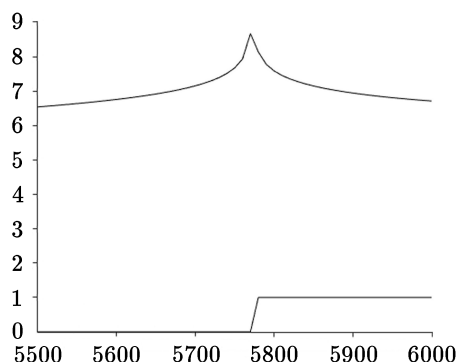


Рис. 5. Одномерный спектральный портрет дискретизированного оператора Орра–Зоммерфельда в зависимости от числа Рейнольдса при $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$, $N = 50$: $\log_{10} \|H(\tilde{A}(\text{Re}))\|$ — кривая, $\text{tr} P(\tilde{A}(\text{Re}))$ — ломаная

5. Заключение

Вычислительные методы дихотомии матричного спектра и построения одномерных спектральных портретов могут использоваться как инструмент для изучения несимметричных спектральных задач, в том числе задач об устойчивости.

Авторы признательны академику С.К. Годунову за содержательные дискуссии на тему работы, а также А.Н. Кудрявцеву за постановку и обсуждения задачи об устойчивости плоскопараллельного течения.

Литература

1. **Годунов С.К.** Лекции по современным аспектам линейной алгебры. — Новосибирск: Научная книга, 2002.
2. **Годунов С.К.** Задача о дихотомии спектра матрицы // Сиб. мат. журнал. — 1986. — Т. 27, № 5. — С. 24–37. — Перевод: Godunov S.K. Problem of the dichotomy of the spectrum of a matrix // Sib. Math. J. — 1986. — Vol. 27, iss. 5. — P. 649–660.
3. **Годунов С.К.** Современные аспекты линейной алгебры. — Новосибирск: Научная книга, 1997. — Перевод: Godunov S.K. Modern Aspects of Linear Algebra. — American Mathematical Society, 1998. — (Translations of Mathematical Monographs; Vol. 175)
4. **Godunov S.K., Sadkane M.** Elliptic dichotomy of a matrix spectrum // Linear Algebra Appl. — 1996. — Vol. 248. — P. 205–232.
5. **Булгаков А.Я., Годунов С.К.** Круговая дихотомия матричного спектра // Сиб. мат. журнал. — 1988. — Т. 29, № 5. — С. 59–70. — Перевод: Bulgakov A.Ya., Godunov S.K. Circular dichotomy of the spectrum of a matrix // Sib. Math. J. — 1988. — Vol. 29, iss. 5. — P. 734–744.
6. **Булгаков А.Я.** Обоснование гарантированной точности выделения инвариантных подпространств несамосопряженных матриц // Тр. Ин-та математики АН СССР, Сиб. отд-ние. — 1989. — Т. 15. — С. 12–92.
7. **Малышев А.Н.** Введение в вычислительную линейную алгебру. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1991.
8. **Demidenko G.** On a functional approach to spectral problems of linear algebra // Selçuk J. Appl. Math. — 2001. — Vol. 2, № 2. — P. 39–52.
9. **Sayed Ali M., Sadkane M.** On a Lyapunov type equation related to parabolic spectral dichotomy // Electronic J. of Linear Algebra. — 2006. — Vol. 15. — P. 134–142.
10. **Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В.** Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, изд-во “Институт компьютерных исследований”, 2006.
11. **Бибердорф Э.А.** Критерий дихотомии корней полинома единичной окружностью // Сиб. журн. индустр. математики. — 2000. — Т. 3, № 1. — С. 16–32.
12. **Godunov S.K., Sadkane M.** Some new algorithms for the spectral dichotomy methods // Linear algebra and its applications. — 2003. — Vol. 383. — P. 173–194.
13. **Бибердорф Э.А., Попова Н.И.** Гарантированная точность современных алгоритмов линейной алгебры. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2006.
14. **Бибердорф Э.А.** Гарантированная точность в прикладных задачах линейной алгебры. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2008.

15. **Блинова М.А.** Численное исследование устойчивости некоторых течений с использованием метода дихотомии матричного спектра: выпускная квалификационная работа бакалавра. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2016.

*Поступила в редакцию 2 июля 2017 г.,
в окончательном варианте 13 ноября 2017 г.*

Литература в транслитерации

1. **Godunov S.K.** Lekcii po sovremennym aspektam linejnoy algebrы. — Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 2002.
2. **Godunov S.K.** Zadacha o dihotomii spektra matricy // Sib. mat. zhurnal. — 1986. — Т. 27, № 5. — S. 24–37. — Perevod: Godunov S.K. Problem of the dichotomy of the spectrum of a matrix // Sib. Math. J. — 1986. — Vol. 27, iss. 5. — P. 649–660.
3. **Godunov S.K.** Sovremennye aspekty linejnoy algebrы. — Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1997. — Perevod: Godunov S.K. Modern Aspects of Linear Algebra. — American Mathematical Society, 1998. — (Translations of Mathematical Monographs; Vol. 175)
4. **Godunov S.K., Sadkane M.** Elliptic dichotomy of a matrix spectrum // Linear Algebra Appl. — 1996. — Vol. 248. — P. 205–232.
5. **Bulgakov A.Ya., Godunov S.K.** Krugovaya dihotomiya matrichnogo spektra // Sib. mat. zhurnal. — 1988. — Т. 29, № 5. — S. 59–70. — Perevod: Bulgakov A.Ya., Godunov S.K. Circular dichotomy of the spectrum of a matrix // Sib. Math. J. — 1988. — Vol. 29, iss. 5. — P. 734–744.
6. **Bulgakov A.Ya.** Obosnovanie garantirovannoy tochnosti vydeleniya invariantnyh podprostranstv nesamosopryazhennyh matric // Tr. In-ta matematiki AN SSSR, Sib. otd-nie. — 1989. — Т. 15. — S. 12–92.
7. **Malyshev A.N.** Vvedenie v vychislitel'nyuyu linejnyuyu algebru. — Novosibirsk: Nauka, Sib. otd-nie, 1991.
8. **Demidenko G.** On a functional approach to spectral problems of linear algebra // Selçuk J. Appl. Math. — 2001. — Vol. 2, № 2. — P. 39–52.
9. **Sayed Ali M., Sadkane M.** On a Lyapunov type equation related to parabolic spectral dichotomy // Electronic J. of Linear Algebra. — 2006. — Vol. 15. — P. 134–142.
10. **Boiko A.V., Grek G.R., Dovgal' A.V., Kozlov V.V.** Fizicheskie mekhanizmy perekhoda k turbulentnosti v otkrytyh techeniyah. — Izhevsk: NIC “Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika”, izd-vo “Institut komp'yuternyh issledovaniy”, 2006.
11. **Biberdorf E.A.** Kriterij dihotomii kornej polinoma edinichnoj okruzhnost'yu // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2000. — Т. 3, № 1. — S. 16–32.
12. **Godunov S.K., Sadkane M.** Some new algorithms for the spectral dichotomy methods // Linear algebra and its applications. — 2003. — Vol. 383. — P. 173–194.
13. **Biberdorf E.A., Popova N.I.** Garantirovannaya tochnost' sovremennyh algoritmov linejnoy algebrы. — Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2006.

14. **Bibendorf E.A.** Garantirovannaya tochnost' v prikladnyh zadachah linejnoj algebry. — Novosibirsk: Izd-vo NGU, 2008.
15. **Blinova M.A.** Chislennoe issledovanie ustojchivosti nekotoryh techenij s ispol'zovaniem metoda dihotomii matrichnogo spektra: vypusknaya kvalifikacionnaya rabota bakalavra. — Novosibirsk: Izd-vo NGU, 2016.