

УДК 517.948

Решение обратной граничной задачи теплообмена для неоднородного шара*

В.П. Танана^{1,2}, Б.А. Марков³, А.И. Сидикова¹

¹Южно-Уральский государственный университет, просп. Ленина, 76, Челябинск, 454080

²Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001

³Челябинское высшее военное авиационное училище штурманов, ул. 11-городок, 1, Челябинск, 454015

E-mails: tananavp@susu.ru (Танана В.П.), smpx1969@mail.ru (Марков Б.А.), sidikovaai@susu.ru (Сидикова А.И.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 14, 2021.

Танана В.П., Марков Б.А., Сидикова А.И. Решение обратной граничной задачи теплообмена для неоднородного шара // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 3. — С. 313–330.

В статье изучается задача об определении граничного условия в уравнении теплопроводности для композиционных материалов. Математически это сводится к уравнению теплопроводности в сферических координатах для неоднородного шара. Температура внутри шара считается неизвестной на бесконечном интервале времени. Для ее отыскания измеряется температура теплового потока в разделе сред в точке $r = r_0$.

В работе проведено аналитическое исследование прямой задачи, которое позволило дать строгую постановку обратной задачи и определить функциональные пространства, в которых естественно решать обратную задачу. Основная трудность, на решение которой направлена статья, заключается в получении оценки погрешности приближенного решения. Для оценки модуля условной корректности используется метод проекционной регуляризации, который позволяет получить точные по порядку оценки.

DOI: 10.15372/SJNM20210307

Ключевые слова: оценка погрешности, модуль условной корректности, преобразование Фурье, некорректная задача.

Tanana V.P., Markov B.A., Sidikova A.I. Solution of the inverse boundary value problem of heat transfer for an inhomogeneous ball // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 3. — P. 313–330.

This paper studies the problem of determining the boundary condition in the heat conduction equation for composite materials. Mathematically this problem is reduced to the equation of heat conduction in spherical coordinates for an inhomogeneous ball. The temperature inside the ball is assumed to be unknown for an infinite time interval. To find it, the temperature of the heat flow in the media interface is measured at the point $r = r_0$.

An analytical study of the direct problem is carried out, which makes it possible to give a rigorous formulation of the inverse problem and to determine the functional spaces in which it is natural to solve the inverse problem. The main difficulty to be solved, is to obtain an error estimate of the approximate solution. The projection regularization method is used to estimate the modulus of conditional correctness. This allows one to obtain the order-accurate estimates.

Keywords: error estimation, modulus of continuity, Fourier transform, ill-posed problem.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FENU-2020-0022).

Введение

Данная статья посвящена исследованию математической модели, описывающей тепловую диагностику неоднородного материала. Эта модель описывается обратной граничной задачей для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом.

Прикладная значимость таких задач описана в работах [1–9]. Основная их область применения это тепловая диагностика теплонагруженных узлов технических конструкций. Как правило, прямое измерение температуры на поверхности таких узлов невозможно. Поэтому поверхность узла покрывают теплозащитным слоем, имеющим коэффициент теплопроводности значительно меньший, чем у основной технической конструкции. Это покрытие с одной стороны защищает стальную стенку от плавления, а также приклеивает к стенке термопару. Такая конструкция и моделируется в настоящей статье. Модель, не учитывающая теплозащитный слой, приводит к значительным погрешностям при ее использовании. Постановке и решению таких задач посвящены работы [9–12].

Заметим, что решаемая задача является некорректно поставленной. Поэтому для ее правильной постановки необходимо доказать, что она условно-корректна и оценить модуль условной корректности. Такие исследования для неоднородного шара сделаны впервые.

В заключение дано решение обратной задачи и получена оценка погрешности этого решения.

1. Постановка задачи и исследование прямой задачи

Пусть тепловой процесс описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u_1(r, t)}{\partial t} = \frac{a_1^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_1(r, t)}{\partial r} \right), \quad 0 < r \leq r_0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2(r, t)}{\partial t} = \frac{a_2^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_2(r, t)}{\partial r} \right), \quad r_0 \leq r < 1, \quad t > 0, \quad (2)$$

где $a_1, a_2 > 0$,

$$u_1(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad u_2(r, 0) = 0, \quad r_0 \leq r \leq 1, \quad (3)$$

$$\exists b_1, b_1 > 0, \quad \forall r \in (0, 1] \quad |u_1(r, t)| \leq b_1, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$u_2(1, t) = q(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u_1(r_0, t) = u_2(r_0, t), \quad a_1 \frac{\partial u_1(r_0, t)}{\partial r} = a_2 \frac{\partial u_2(r_0, t)}{\partial r}, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где $q(t) \in C^2[0, +\infty)$, $q(0) = q'(0) = 0$ и существует число $t_0 > 0$ такое, что $\forall t \geq t_0$

$$q(t) = 0. \quad (7)$$

В реальном эксперименте время протекания процесса длится $[0, T]$, но, как известно из [11, с. 250; 13], возникают проблемы с обоснованием единственности решения обратной задачи, потому мы используем условие (7). В случае отказа от условия (7) можно домножить уравнение на e^{-t} . В работе [14] показано, как умножение на e^{-t} может снять условие (7), однако этот подход приводит к значительному увеличению объема статьи.

В прямой задаче (1)–(6) требуется найти функцию

$$u(r, t) = \begin{cases} u_1(r, t), & 0 \leq r \leq r_0, \quad t > 0, \\ u_2(r, t), & r_0 \leq r \leq 1, \quad t > 0, \end{cases}$$

удовлетворяющую условиям (1)–(6).

Сделав замену $u(r, t) = v(r, t) + q(t)$, перейдем к задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(r, t)}{\partial t} &= \frac{a_1^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_1(r, t)}{\partial r} \right) - q'(t), \quad 0 < r \leq r_0, \quad t > 0, \\ \frac{\partial v_2(r, t)}{\partial t} &= \frac{a_2^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_2(r, t)}{\partial r} \right) - q'(t), \quad r_0 \leq r < 1, \quad t > 0, \\ v_1(r, 0) &= 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad v_2(r, 0) = 0, \quad r_0 \leq r \leq 1, \\ |v_1(r, t) + q(t)| &\leq b_1, \quad b_1 > 0, \quad t \geq 0, \\ v_2(1, t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ v_1(r_0, t) &= v_2(r_0, t), \quad a_1 \frac{\partial v_1(r_0, t)}{\partial r} = a_2 \frac{\partial v_2(r_0, t)}{\partial r}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ такой, что

$$AU(r) = \begin{cases} \frac{a_1^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_1(r)}{dr} \right), & r \in [0, r_0], \\ \frac{a_2^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_2(r)}{dr} \right), & r \in [r_0, 1], \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} D(A) = \left\{ U(r) : AU(r) \in C[0, 1], \quad U_1(r_0) = 0, \quad |U_1(r)| \leq b_1, \quad b_1 > 0, \right. \\ \left. U_2(1) = 0, \quad U_1(r_0) = U_2(r_0), \quad a_1 U_1'(r_0) = a_2 U_2'(r_0) \right\}. \end{aligned}$$

Решая задачу Штурма–Лиувилля

$$AU(r) + \lambda^2 U(r) = 0, \quad U(r) = \begin{cases} U_1(r), & r \in [0, r_0], \\ U_2(r), & r \in [r_0, 1], \end{cases} \quad U(r) \in D(A),$$

определим последовательность собственных значений λ_n этой задачи. Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \frac{\lambda r_0}{a_1} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda(1-r_0)}{a_2} = \frac{(a_1 - a_2)}{\lambda r_0} \quad (10)$$

и соответствующие им собственные функции $\{\varphi_n(r)\}$ имеют вид

$$\varphi_n(r) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\lambda_n r}{a_1}}{r \sin \frac{\lambda_n r_0}{a_1}}, & 0 \leq r \leq r_0, \\ \frac{\sin \frac{\lambda_n(1-r)}{a_2}}{r \sin \frac{\lambda_n(1-r_0)}{a_2}}, & r_0 \leq r \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

Лемма 1. Пусть оператор A определен формулой (9), тогда A симметричен на множестве $D(A)$.

Доказательство. Пусть $\vartheta_1(r), \vartheta_2(r), \phi_1(r), \phi_2(r) \in D(A)$. Необходимо показать, что

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} \vartheta_1(r) \frac{a_1^2}{r^2} [r^2 \phi_1'(r)]' r^2 \frac{dr}{a_1} + \int_{r_0}^1 \vartheta_2(r) \frac{a_2^2}{r^2} [r^2 \phi_2'(r)]' r^2 \frac{dr}{a_2} \\ = \int_0^{r_0} \phi_1(r) \frac{a_1^2}{r^2} [r^2 \vartheta_1'(r)]' r^2 \frac{dr}{a_1} + \int_{r_0}^1 \phi_2(r) \frac{a_2^2}{r^2} [r^2 \vartheta_2'(r)]' r^2 \frac{dr}{a_2}. \end{aligned}$$

Проинтегрировав левую часть этого равенства дважды по частям, получим $(A\vartheta(r), \phi(r)) = (\vartheta(r), A\phi(r))$. $\square$

Из леммы 1 следует, что собственные функции оператора A ортогональны в пространстве $L_2[0, 1]$ относительно скалярного произведения

$$(\vartheta_1(r), \phi_1(r)) = \int_0^{r_0} \vartheta_1(r) \phi_1(r) r^2 d\left(\frac{r}{a_1}\right) + \int_{r_0}^1 \vartheta_1(r) \phi_1(r) r^2 d\left(\frac{r}{a_2}\right).$$

Обозначим через X подпространство $L_2[0, 1]$, определяемое формулой

$$X = \overline{\langle \{\varphi_n(r)\} \rangle}, \quad (12)$$

где $\overline{\langle \{\varphi_n(r)\} \rangle}$ — замыкание в $L_2[0, 1]$ линейной оболочки $\langle \{\varphi_n(r)\} \rangle$, порожденной $\{\varphi_n(r)\}$.

Лемма 2. Существуют числа $c_1, c_2 > 0$ такие, что для любого n

$$c_1 n \leq \lambda_n \leq c_2 n.$$

Доказательство. Преобразуем уравнение (10):

$$\frac{2r_0\lambda}{a_1 - a_2} \sin \lambda \left(\frac{r_0}{a_1} + \frac{1 - r_0}{a_2} \right) + \cos \lambda \left(\frac{r_0}{a_1} + \frac{1 - r_0}{a_2} \right) = \cos \lambda \left(\frac{1 - r_0}{a_2} - \frac{r_0}{a_1} \right).$$

Умножив обе части предыдущего равенства на $\frac{(a_1 - a_2)}{\sqrt{4r_0^2\lambda^2 + (a_1 - a_2)^2}}$ и обозначив

$$\sin \xi(\lambda) = \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{4r_0^2\lambda^2 + (a_1 - a_2)^2}}, \quad \cos \xi(\lambda) = \frac{2r_0\lambda}{\sqrt{4r_0^2\lambda^2 + (a_1 - a_2)^2}}, \quad (13)$$

получим

$$\sin \left(\frac{\lambda r_0}{a_1} + \frac{\lambda(1 - r_0)}{a_2} + \xi(\lambda) \right) = \cos \left(\frac{\lambda(1 - r_0)}{a_2} - \frac{\lambda r_0}{a_1} \right) \sin \xi(\lambda). \quad (14)$$

Из (13) будет следовать существование некоторого числа $l_1 > 0$ такого, что $\forall n$

$$|\sin \xi(\lambda)| \leq |\xi(\lambda)| \leq \frac{l_1}{\lambda}. \quad (15)$$

Из формул (14) и (15), получим

$$\left| \sin\left(\frac{\lambda_n r_0}{a_1} + \frac{\lambda_n(1-r_0)}{a_2} + \xi(\lambda_n)\right) \right| \leq \left| \cos\left(\frac{\lambda_n(1-r_0)}{a_2} - \frac{\lambda_n r_0}{a_1}\right) \right| \frac{l_1}{\lambda_n}. \quad (16)$$

Так как $\sin\left(\frac{\lambda_n r_0}{a_1} + \frac{\lambda_n(1-r_0)}{a_2} + \xi_n\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то для любого n существует $\sigma_n > 0$ такое, что

$$\sigma_n = \frac{\lambda_n r_0}{a_1} + \frac{\lambda_n(1-r_0)}{a_2} + \xi_n - \pi n, \quad (17)$$

то есть (17) влечет

$$\sin \sigma_n = \sin\left(\frac{\lambda_n r_0}{a_1} + \frac{\lambda_n(1-r_0)}{a_2} + \xi_n\right), \quad (18)$$

где $\xi_n = \xi(\lambda_n)$. Из (16) и (18) следует, что существует $l_2 > 0$ такое, что для любого n

$$|\sigma_n| \leq \frac{l_2}{n}. \quad (19)$$

Таким образом, из (17)–(19) получим

$$\lambda_n \left[\frac{r_0}{a_1} + \frac{(1-r_0)}{a_2} \right] = \pi n + \sigma_n - \xi_n. \quad (20)$$

Пусть $\eta_n = \sigma_n - \xi_n$. Тогда из (20) следует, что для любого n

$$\lambda_n = \frac{a_1 a_2 (\pi n + \eta_n)}{a_2 r_0 + a_1 (1-r_0)}, \quad (21)$$

где из (15) и (16) получим существование $l_3 > 0$ такого, что для любого n

$$|\eta_n| \leq \frac{l_3}{n}. \quad \square$$

Пусть $\psi_n(r) = \frac{\varphi_n(r)}{\|\varphi_n(r)\|}$, $0 \leq r \leq 1$. Тогда $A\psi_n(r) \in C[0, 1]$ для любого n , а последовательность $\{\psi_n(r)\}$ ортонормирована.

Лемма 3. *Существует число $d_1 > 0$ такое, что $\forall n$ и любого $r \in (0, 1]$ $|\psi_n(r)| \leq d_1$.*

Доказательство. Вычислим $\|\varphi_n(r)\|^2$ по формуле:

$$\|\varphi_n(r)\|^2 = \int_0^{r_0} r^2 [\varphi_n^1(r)]^2 d\left(\frac{r}{a_1}\right) + \int_{r_0}^1 r^2 [\varphi_n^2(r)]^2 d\left(\frac{r}{a_2}\right).$$

Учитывая, что $\sin \frac{\lambda_n r_0}{a_1} = (-1)^{n+1} \sin \frac{\lambda_n(1-r_0)}{a_2}$, получим $\|\varphi_n(r)\|^2 = \frac{a_1(1-r_0) + a_2 r_0}{2a_1 a_2 \sin^2(\lambda_n r_0 / a_1)}$.

Тогда

$$|\psi_n(r)| = \frac{|\varphi_n(r)|}{\|\varphi_n(r)\|} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2a_1 a_2} |\sin(\lambda_n r / a_1)|}{r \sqrt{a_1(1-r_0) + a_2 r_0}}, & 0 < r \leq r_0, \\ \frac{\sqrt{2a_1 a_2} |\sin(\lambda_n(1-r)/a_2)|}{r \sqrt{a_1(1-r_0) + a_2 r_0}}, & r_0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Из предыдущего равенства получим $d_1 = \frac{\sqrt{2a_1 a_2}}{\sqrt{a_1(1-r_0) + a_2 r_0}}$. $\square$

Таким образом, решение задачи (1)–(6) имеет вид

$$u(r, t) = q(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t g_n(\theta) e^{-\lambda_n^2(t-\theta)} d\theta \right) \psi_n(r), \quad (22)$$

где

$$g_n(\theta) = -\frac{q'(\theta)}{\|\varphi_n(r)\|} \left[\int_0^{r_0} r^2 \varphi_n^1(r) d\left(\frac{r}{a_1}\right) + \int_{r_0}^1 r^2 \varphi_n^2(r) d\left(\frac{r}{a_2}\right) \right].$$

Лемма 4. Пусть $\frac{a_2}{a_1(1-r_0) + a_2 r_0} < 1$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ функциональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\lambda_n r/a_1)}{\lambda_n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n(1-r)/a_2)}{\lambda_n}$ сходятся равномерно на отрезках $[\varepsilon, r_0 - \varepsilon]$ и $[r_0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ соответственно.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\lambda_n r/a_1)}{\lambda_n}$, $r \in [\varepsilon, r_0 - \varepsilon]$. Разобьем его на два: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(r\lambda_{2k}/a_1)}{\lambda_{2k}}$, $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(r\lambda_{2k-1}/a_1)}{\lambda_{2k-1}}$. Докажем, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(r\lambda_{2k}/a_1)}{\lambda_{2k}}$ сходится равномерно на множестве $[\varepsilon, r_0 - \varepsilon]$. Сделаем замену $y = \frac{\pi a_2 r}{a_1(1-r_0) + a_2 r_0}$, которая позволит свести ряд к более простому виду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2ky}{\lambda_{2k}}$. Для доказательства равномерной сходимости ряда используем признак Дирихле. Разбив слагаемые последнего ряда на два множителя, заметим, что последовательность $\left\{ \frac{1}{\lambda_{2k}} \right\}$, убывая, стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, а для второй последовательности $\{\sin 2ky\}$ выполним следующие преобразования:

$$\sum_{k=1}^K \sin 2ky = \frac{1}{2 \sin 2y} \left[\sum_{k=1}^K 2 \sin 2y \sin 2ky \right].$$

Так как $2 \sin 2y \sin 2ky = \cos 2y(1-k) - \cos 2y(1+k)$, то из предыдущего равенства следует

$$\left| \sum_{k=1}^K \sin 2ky \right| \leq \left(\sin \frac{\pi a_2 \varepsilon}{2(a_1(1-r_0) + a_2 r_0)} \right)^{-1}. \quad (23)$$

Тем самым доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(r\lambda_{2k}/a_1)}{\lambda_{2k}}$ сходится равномерно на отрезке $[\varepsilon, r_0 - \varepsilon]$.

Аналогично доказывается, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(r\lambda_{2k-1}/a_1)}{\lambda_{2k-1}}$ сходится равномерно на отрезке $[\varepsilon, r_0 - \varepsilon]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1-r)\lambda_n/a_2}{\lambda_n}$ сходится равномерно на отрезке $[r_0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$. $\square$

Лемма 5. Пусть $t_1 = t_0 + 2$. Существует решение $v(r, t)$ задачи (8), удовлетворяющее условиям:

$$v(r, t) \in C([0, 1] \times [0, t_1]),$$

$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial v_1(r, t)}{\partial r} \\ a_2 \frac{\partial v_2(r, t)}{\partial r} \end{cases} \in C((0, 1] \times (0, t_1]), \quad \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 v_1(r, t)}{\partial r^2} \\ a_2^2 \frac{\partial^2 v_2(r, t)}{\partial r^2} \end{cases} \in C((0, r_0) \times (0, t_1]),$$

$$\text{и для любого } t \in [0, t_1] \quad \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 v_1(r, t)}{\partial r^2} \\ a_2^2 \frac{\partial^2 v_2(r, t)}{\partial r^2} \end{cases} \in L_2[0, 1].$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t g_n(\theta) e^{-\lambda_n^2(t-\theta)} d\theta \right) \psi_n(r), \quad (24)$$

$$\psi_n(r) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2a_1a_2} \sin(\lambda_n r/a_1)}{r\sqrt{a_1(1-r_0)} + a_2r_0}, & 0 \leq r \leq r_0, \\ \frac{\sqrt{2a_1a_2} \sin(\lambda_n(1-r)/a_2)}{r\sqrt{a_1(1-r_0)} + a_2r_0}, & r_0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$P_n(t) = \int_0^t g_n(\theta) e^{-\lambda_n^2(t-\theta)} d\theta, \quad (25)$$

$$g_n(\theta) = \frac{-\sqrt{2a_1a_2}q'(\theta)}{\sqrt{a_1(1-r_0)} + a_2r_0} \left(\frac{a_1 - a_2}{\lambda_n^2} \sin \frac{\lambda_n r_0}{a_1} + \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} \right).$$

Проинтегрировав равенство (25) по частям, получим

$$P_n(t) = \frac{-\sqrt{2a_1a_2}}{\sqrt{a_1(1-r_0)} + a_2r_0} \left(\frac{a_1 - a_2}{\lambda_n^2} \sin \frac{\lambda_n r_0}{a_1} + \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} \right) \times$$

$$\left(\frac{q'(t)}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^t q''(\theta) e^{-\lambda_n^2(t-\theta)} d\theta \right). \quad (26)$$

Пусть $\psi_n(r) = \frac{\gamma_n(r)}{r}$, $\gamma_n(r) = \begin{cases} \gamma_n^1(r) = \frac{\sqrt{2a_1a_2} \sin(\lambda_n r/a_1)}{\sqrt{a_1(1-r_0)} + a_2r_0}, & 0 \leq r \leq r_0, \\ \gamma_n^2(r) = \frac{\sqrt{2a_1a_2} \sin(\lambda_n(1-r)/a_2)}{\sqrt{a_1(1-r_0)} + a_2r_0}, & r_0 \leq r \leq 1. \end{cases}$ Тогда

ряд (24) перепишем в виде $v(r, t) = \frac{1}{r} w(r, t)$, $w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) \gamma_n(r)$. Поскольку

$$\frac{\partial v(r, t)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} w(r, t), \quad \frac{\partial^2 v(r, t)}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3} w(r, t) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial r^2},$$

то необходимо доказать, что

$$w(r, t) \in C([0, 1] \times [0, t_1]),$$

$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial w_1(r, t)}{\partial r} \\ a_2 \frac{\partial w_2(r, t)}{\partial r} \end{cases} \in C((0, 1] \times (0, t_1]), \quad \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 w_1(r, t)}{\partial r^2} \\ a_2^2 \frac{\partial^2 w_2(r, t)}{\partial r^2} \end{cases} \in C((0, 1] \times (0, t_1]),$$

и для любого $t \in [0, t_1]$ $\begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 w_1(r, t)}{\partial r^2} \\ a_2^2 \frac{\partial^2 w_2(r, t)}{\partial r^2} \end{cases} \in L_2[0, 1].$

Из того, что $e^{-\lambda_n^2 t} \int_0^t q''(\theta) e^{\lambda_n^2 \theta} d\theta \in C[0, t_1]$, и из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ по признаку Вейерштрасса получим равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\lambda_n r}{a_1}}{n^4}$ на $[0, r_0]$ и равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\lambda_n(1-r)}{a_2}}{n^4}$ на $[r_0, 1]$.

С учетом того, что $q'(t) \in C[0, t_1]$ и $P_n(t) \in C[0, t_1]$, получим

$$w(r, t) \in C([0, 1] \times [0, t_1]). \quad (27)$$

Аналогично доказывается, что

$$a_1 \frac{\partial w_1(r, t)}{\partial r} \in C([0, r_0] \times (0, t_1]), \quad a_2 \frac{\partial w_2(r, t)}{\partial r} \in C([r_0, 1] \times (0, t_1]),$$

и, как следствие, $\frac{\partial w(r, t)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n(t) \gamma_n(r))'_r$.

Теперь перейдем к исследованию $\frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial r^2}$. Для этого докажем равенство

$$\frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial r^2} = \begin{cases} -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 a_1^{-2} P_n(t) \gamma_n^1(r), & r \in (0, r_0), \\ -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 a_2^{-2} P_n(t) \gamma_n^2(r), & r \in (r_0, 1). \end{cases} \quad (28)$$

Так как ряд (28) на промежутке $[\varepsilon, r_0 - \varepsilon]$ будет иметь вид

$$a_1^2 \frac{\partial^2 w_1(r, t)}{\partial r^2} = \frac{2a_1 a_2}{a_1(1-r_0) + a_2 r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_1 - a_2}{\lambda_n^2} \sin \frac{\lambda_n r_0}{a_1} \sin \frac{\lambda_n r}{a_1} + \frac{(-1)^{n+1} \sin \frac{\lambda_n r}{a_1}}{\lambda_n} \right] \times \\ \left(q'(t) - \int_0^t q''(\theta) e^{-\lambda_n^2(t-\theta)} d\theta \right), \quad (29)$$

а на промежутке $[r_0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$:

$$a_2^2 \frac{\partial^2 w_2(r, t)}{\partial r^2} = \frac{2a_1 a_2 q'(\theta)}{a_1(1-r_0) + a_2 r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} (a_1 - a_2)}{\lambda_n^2} \sin \frac{\lambda_n r_0}{a_1} \sin \frac{\lambda_n (1-r)}{a_2} - \frac{\sin \frac{\lambda_n (1-r)}{a_2}}{\lambda_n} \right] \times \\ \left(q'(t) - \int_0^t q''(\theta) e^{-\lambda_n^2(t-\theta)} d\theta \right), \quad (30)$$

и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса функциональные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\lambda_n r_0}{a_1} \sin \frac{\lambda_n r}{a_1}}{\lambda_n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \frac{\lambda_n r_0}{a_1} \sin \frac{\lambda_n (1-r)}{a_2}}{\lambda_n^2}$$

сходятся равномерно на $[0, 1]$. Из леммы 4 для любого $\varepsilon > 0$ следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{\lambda_n r}{a_1}}{\lambda_n}$ на множестве $[\varepsilon, r_0 - \varepsilon]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\lambda_n (1-r)}{a_2}}{\lambda_n}$ на $[r_0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Из (29), (30) и ортогональности последовательности $\{\gamma_n(r)\}$ будет следовать, что для любого $t \in [0, t_1]$ $w(r, t) \in H^2[0, 1]$. $\square$

Из леммы 5 следует

Теорема 1. Пусть $q(t)$ удовлетворяет условию (7). Тогда существует решение $u(r, t)$ задачи (1)–(6) такое, что $u(r, t)$ удовлетворяет начальному условию (3), граничным условиям (4), (5), условиям сопряжения (6), а также выполняются условия:

$$u(r, t) \in C([0, 1] \times [0, t_1]),$$

$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial u_1(r, t)}{\partial r} \\ a_2 \frac{\partial u_2(r, t)}{\partial r} \end{cases} \in C([0, 1] \times (0, t_1]), \quad \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(r, t)}{\partial r^2} \in C((0, r_0) \times (0, t_1]), \\ a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(r, t)}{\partial r^2} \in C((r_0, 1) \times (0, t_1]), \end{cases}$$

и для любого $t \in [0, t_1]$ $Au(r, t) \in X$.

Из теоремы 1 следует справедливость условий:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} a_1 \frac{\partial u_1(r, t)}{\partial x} e^{-i\tau t} dt &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} u_1(r, t) e^{-i\tau t} dt \right\}, \quad [0, r_0], \quad |\tau| \geq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} a_2 \frac{\partial u_2(r, t)}{\partial r} e^{-i\tau t} dt &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} u_2(r, t) e^{-i\tau t} dt \right\}, \quad [r_0, 1], \quad |\tau| \geq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} a_i^2 \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} e^{-i\tau t} dt &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{a_i^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} u(r, t) e^{-i\tau t} dt \right\}, \quad r \in (0, r_0) \cup (r_0, 1). \end{aligned} \quad (31)$$

Для окончательного обоснования применимости преобразования Фурье по t на полупрямой $[0, \infty)$ для решения задачи (1)–(3), (5), (6), необходимо формулу (31) распространить на $[t_0, \infty)$.

2. Исследование скорости убывания функций $v(r, t)$, $\partial v(r, t)/\partial r$, $\partial^2 v(r, t)/\partial r^2$

Рассмотрим вспомогательную задачу, использующую условие (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(r, t)}{\partial t} &= \frac{a_1^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_1(r, t)}{\partial r} \right), \quad 0 < r \leq r_0, \quad t \geq t_0, \\ \frac{\partial v_2(r, t)}{\partial t} &= \frac{a_2^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_2(r, t)}{\partial r} \right), \quad r_0 \leq r < 1, \quad t \geq t_0, \\ v(r, t_0) &= f(r), \quad 0 \leq r \leq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v_1(r, t) + q(t)| &\leq b_1, \quad b_1 > 0, \quad t \geq t_0, \\ v_2(1, t) &= 0, \quad t \geq t_0, \end{aligned}$$

$$v_1(r_0, t) = v_2(r_0, t), \quad a_1 \frac{\partial v_1(r_0, t)}{\partial r} = a_2 \frac{\partial v_2(r_0, t)}{\partial r}, \quad t \geq t_0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} \psi_n(r), \quad b_n = \frac{\sqrt{2a_1a_2} \sin(\lambda_n r_0/a_1)}{\sqrt{a_1(1-r_0) + a_2 r_0}} \int_0^1 \rho(r) f(r) \varphi_n(r) dr, \quad (32)$$

где $\rho(r) = \begin{cases} r^2/a_1 & \text{при } 0 \leq r \leq r_0, \\ r^2/a_2 & \text{при } r_0 \leq r \leq 1, \end{cases}$ λ_n и $\varphi_n(r)$ определены выше.

Лемма 6. Пусть b_n определяется формулой (32), тогда существует число $d_2 > 0$ такое, что $\forall n \quad |b_n| \leq \frac{d_2}{\lambda_n^2}$.

Доказательство. Из (32) и леммы 3 имеем $b_n = (f(r), \psi_n(r))$, а $A\psi_n(r) = -\lambda_n^2 \psi_n(r)$. Поэтому

$$(f(r), A\psi_n(r)) = -\lambda_n^2 (f(r), \psi_n(r)) = (Af(r), \psi_n(r)).$$

Тогда $(f(r), \psi_n(r)) = -\frac{1}{\lambda_n^2} (Af(r), \psi_n(r))$. Так как $Af(r) \in L_2[0, 1]$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$. Таким образом, $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Откуда следует, что $\exists d_4 > 0$ такое, что $\forall n$ $|(f(r), \psi_n(r))| \leq \frac{d_4}{\lambda_n^2}$. $\square$

Теперь перейдем к оценке скорости убывания решения $v(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Из лемм 3, 6 и соотношения (32) следует, что при $t \geq t_0 + 1$ имеем

$$|v(r, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} d_1 d_2 \lambda_n^{-2} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}, \quad |v'_r(r, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} d_1 d_2 \lambda_n^{-1} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)},$$

и $\forall \varepsilon > 0 \exists d_3(\varepsilon)$ такое, что $\forall r \in [\varepsilon, r_0 - \varepsilon] \cup [r_0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ $|v''_{rr}(r, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} d_3(\varepsilon) e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}$.

Так как $e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} = e^{-\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2(t-t_0-1)}$, то получим существование числа $d_4 > 0$ такого, что $\forall t \geq t_0 + 2$

$$\sup_{r \in [0, 1]} \{|v(r, t)|, |v'_r(r, t)|\} \leq d_4 e^{-(t-t_0-1)},$$

и $\forall \varepsilon > 0 \exists d_5(\varepsilon)$ такое, что $\forall r \in [\varepsilon, r_0 - \varepsilon] \cup [r_0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ и $\forall t \geq t_0 + 2$ имеет место

$$|v''_{rr}(r, t)| \leq d_5(\varepsilon) e^{-(t-t_0-1)}.$$

Из теоремы 1 и леммы 6 следует

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует решение $u(r, t)$ задачи (1)–(6) такое, что $u(r, t)$ удовлетворяет начальному условию (3), граничным условиям (4), (5), условиям сопряжения (6), а также выполняются условия:

$$u(r, t) \in C([0, 1] \times (0, \infty)),$$

$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial u_1(r, t)}{\partial r} \\ a_2 \frac{\partial u_2(r, t)}{\partial r} \end{cases} \in C([0, 1] \times (0, \infty)), \quad \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(r, t)}{\partial r^2} \in C((0, r_0) \times (0, \infty)), \\ a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(r, t)}{\partial r^2} \in C((r_0, 1) \times (0, \infty)), \end{cases}$$

и для любого $t \in [0, t_1]$ $u(r, t), Au(r, t) \in X$.

Тогда на основании теоремы, доказанной в [15, гл. XIV, теорема 3], получается

Теорема 3. Пусть $u(r, t)$ определена формулой (32). Тогда для любого $\tau, |\tau| \geq 0$, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a_1 \frac{\partial u_1(r, t)}{\partial x} e^{-i\tau t} dt &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u_1(r, t) e^{-i\tau t} dt \right\}, \quad [0, r_0], |\tau| \geq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a_2 \frac{\partial u_2(r, t)}{\partial r} e^{-i\tau t} dt &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u_2(r, t) e^{-i\tau t} dt \right\}, \quad [r_0, 1], |\tau| \geq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a_j^2 \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} e^{-i\tau t} dt &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{a_j^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u(r, t) e^{-i\tau t} dt \right\}, \quad r \in (0, r_0) \cup (r_0, 1), j = 1, 2, \end{aligned}$$

где i — мнимая единица.

3. Постановка обратной граничной задачи

Предположим, что в условии (4) функция $q(t)$ не известна, а вместо нее в точке r_0 измеряется температура $f(t)$, соответствующая данному процессу

$$u_2(r_0, t) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (33)$$

Требуется, используя $f(t)$, определить функцию $q(t)$ такую, что при подстановке ее в условие (4) решение $u(r, t)$ задачи (1)–(6) удовлетворяет соотношению (33).

Пусть $M_d \subset L_2[0; \infty)$,

$$M_d = \left\{ q(t) : q(t) \in C^2(0; \infty), \int_0^{+\infty} |q(t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |q''(t)|^2 dt \leq d^2 \right\},$$

где d — известное положительное число.

Так как обратная задача некорректно поставлена, то дополнительно предположим, что при $f(t) = f_0(t) \in C[0, \infty)$ существует решение $q_0(t)$ обратной задачи (1)–(3), (5), (6), (33), принадлежащее множеству M_d , но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in C[0; \infty) \cap L_1[0, \infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\int_0^\infty |f_\delta(t) - f_0(t)|^2 dt \leq \delta^2. \quad (34)$$

Требуется, используя f_δ, δ и M_d , определить приближенное решение q_δ задачи (1)–(3), (5), (6), (33) и оценить величину $\|q_\delta - q_0\|_{L_2[0, \infty)}$.

3.1. Сведение обратной граничной задачи (1)–(3), (5), (6), (33) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

При решении обратной граничной задачи очень важно не только получить приближенное решение, но и оценить его погрешность. Для этого будем использовать преобразование Фурье функции $u(r, t)$ по переменной t . Введем оператор F , отображающий $L_2[0; \infty)$ в $L_2(-\infty; \infty)$ и определяемый формулой:

$$F[q(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty q(t) e^{-it\tau} dt, \quad |\tau| \geq 0, \quad q(t) \in L_2[0; \infty). \quad (35)$$

В формуле (35) подразумевается, что $q(t) = 0$ при $t \leq 0$. Оператор F определяет преобразование Фурье. Из теоремы 3 следует применимость преобразования F , определяемого формулой (35), к решению задачи (1)–(3), (5), (6), (33). Таким образом, сведем ее к следующей задаче:

$$i\tau \hat{u}_1(r, \tau) = a_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 \hat{u}_1(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{u}_1(r, \tau)}{\partial r} \right\}, \quad r_0 < r < r_1, \quad \tau \in (-\infty, \infty), \quad (36)$$

$$i\tau \hat{u}_2(r, \tau) = a_2^2 \left\{ \frac{\partial^2 \hat{u}_2(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{u}_2(r, \tau)}{\partial r} \right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad \tau \in (-\infty, \infty), \quad (37)$$

$$\hat{u}_2(r_0, \tau) = \hat{f}(\tau), \quad \hat{u}_1(r_0, \tau) = \hat{u}_2(r_0, \tau), \quad a_1 \frac{\partial \hat{u}_1(r_0, \tau)}{\partial r} = a_2 \frac{\partial \hat{u}_2(r_0, \tau)}{\partial r}, \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (38)$$

Решения уравнений (36), (37) имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{u}_1(r, \tau) &= A_2(\tau) \frac{a_1^2}{i\mu} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{r\sqrt{\mu}}{a_1}\right)}{r}, \\ \hat{u}_2(r, \tau) &= B_1(\tau) \frac{a_2^3}{i\sqrt{\mu^3}} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{r\sqrt{\mu}}{a_2}\right)}{r} + B_2(\tau) \frac{a_2^2}{i\mu} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{r\sqrt{\mu}}{a_2}\right)}{r},\end{aligned}$$

где $\mu = i\tau$, $\hat{u}_1(r, \tau) = F[u_1(r, t)]$, $\hat{u}_2(r, \tau) = F[u_2(r, t)]$, $\hat{u}(r, \tau) = \begin{cases} \hat{u}_1(r, \tau), & r \in [r_0, r_1], \\ \hat{u}_2(r, \tau), & r \in [r_1, r_2]. \end{cases}$

Решая задачу (36)–(38), сведем ее к задаче вычисления значений неограниченного оператора T :

$$T(\tau)\hat{f}(\tau) = \hat{q}(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (39)$$

$T(\tau)$

$$= \frac{r_0\sqrt{\mu} \operatorname{sh} \frac{r_0\sqrt{\mu}}{a_1} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\mu}}{a_2} + \operatorname{sh} \frac{(1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_2} \left[r_0\sqrt{\mu} \operatorname{ch} \left(\frac{r_0\sqrt{\mu}}{a_1} - \frac{r_0\sqrt{\mu}}{a_2} \right) + (a_2 - a_1) \operatorname{sh} \frac{r_0\sqrt{\mu}}{a_1} \operatorname{ch} \frac{r_0\sqrt{\mu}}{a_2} \right]}{\sqrt{\mu} \operatorname{sh} \frac{r_0\sqrt{\mu}}{a_1} \operatorname{ch} \frac{r_0\sqrt{\mu}}{a_2}}. \quad (40)$$

В дальнейшем, учитывая, что $|T(\tau)| \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, воспользуемся положительной ветвью $\sqrt{i\tau}$

$$D(T) = \left\{ \hat{f}(\tau) : \hat{f}(\tau) \in L_2[0, \infty), T\hat{f}(\tau) \in L_2[0, \infty) \right\}. \quad (41)$$

Из (40) и (41) следует, что оператор T линеен неограничен замкнут и инъективен.

Пусть $\hat{q}_0(\tau) = T\hat{f}_0(\tau)$, $\hat{f}_0(\tau) = F[f_0(t)]$, $\hat{f}_\delta(\tau) = F[f_\delta(t)]$. Из формулы (34) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta - \hat{f}_0\| \leq \delta. \quad (42)$$

Множество M_d при преобразовании F перейдет в множество $\widehat{M}_d \supset F[M_d]$, определяемое формулой

$$\widehat{M}_d = \left\{ \hat{q}(\tau) : \hat{q}(\tau) \in L_2[0, \infty), \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \tau^4) |\hat{q}(\tau)|^2 d\tau \leq 2d^2 \right\}. \quad (43)$$

Из того, что $q_0(t) \in M_d$, получаем $\hat{q}_0(\tau) \in \widehat{M}_d$.

Теорема 4. При условиях, сформулированных в теореме 2, прямая задача (1)–(6) имеет единственное решение в пространстве X .

4. Решение задачи (39)–(43)

Для решения задачи (39)–(43) используем метод проекционной регуляризации (см. [16, гл. 4, п. 4.1]). В основе этого метода лежит регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha : \alpha > 0\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha \hat{f}(\tau) = \begin{cases} T\hat{f}(\tau), & |\tau| \leq \alpha, \\ 0, & |\tau| > \alpha. \end{cases} \quad (44)$$

Регуляризующее значение $\hat{q}_\delta^\alpha(\tau)$ задачи (39) определим как

$$\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha \hat{f}_\delta(\tau), \quad |\tau| \geq 0. \quad (45)$$

Для выбора параметра регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta, r)$ в формуле (45), рассмотрим оценку

$$\|\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \leq \|\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{q}_0^\alpha(\tau)\| + \|\hat{q}_0^\alpha(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\|, \quad (46)$$

где $\hat{q}_0^\alpha(\tau) = T_\alpha \hat{f}_0(\tau)$. Так как из (42), (44) и (45) следует, что

$$\|\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{q}_0^\alpha(\tau)\| \leq \|T_\alpha\| \delta,$$

то перейдем к оценке $\|T_\alpha\|$.

Лемма 7. Пусть $a_1, a_2 > 0$, а оператор T_α определен формулой (44). Тогда существует $\alpha_3 > 0$ такое, что для любых α , $|\alpha| \geq \alpha_3$, справедливы соотношения:

$$\frac{1}{6} r_0 e^{\frac{(1-r_0)\sqrt{\alpha/2}}{a_2}} \leq \|T_\alpha(\tau)\| \leq 6 r_0 e^{\frac{(1-r_0)\sqrt{\alpha/2}}{a_2}}.$$

Доказательство. По определению норма оператора $\|T_\alpha\| = \sup_{|\tau| \geq \alpha} |T(\tau)|$. Из (40) следует, что

$$|T(\tau)| \leq \frac{\left| r_0 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\mu}}{a_2} \right|}{\left| \operatorname{ch} \frac{r_0 \sqrt{\mu}}{a_2} \right|} + r_0 \frac{\left| \operatorname{sh} \frac{(1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_2} \right| \left| \operatorname{ch} \left(\frac{r_0 \sqrt{\mu}}{a_1} - \frac{r_0 \sqrt{\mu}}{a_2} \right) \right|}{\left| \operatorname{sh} \frac{r_0 \sqrt{\mu}}{a_1} \right| \left| \operatorname{ch} \frac{r_0 \sqrt{\mu}}{a_2} \right|} + \frac{|a_2 - a_1| \left| \operatorname{sh} \frac{(1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_2} \right|}{|\sqrt{\mu}|}.$$

Так как $\sqrt{\mu} = (1+i)\sqrt{\tau}/\sqrt{2}$, а $|\sqrt{\mu}| = \sqrt{\tau}$, то для получения оценки сверху воспользуемся формулами $|\operatorname{ch} z_1| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x_1 - \sin^2 y_1}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $|\operatorname{sh} z_2| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x_2 - \cos^2 y_2}$, $z_2 = x_2 + iy_2$ для числителя и $|\operatorname{ch} z_3| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x_3 + \cos^2 y_3}$, $z_3 = x_3 + iy_3$ для знаменателя. В результате получим оценку сверху:

$$|T(\tau)| \leq \frac{r_0 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\tau/2}}{a_2}}{\operatorname{sh} \frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_2}} + r_0 \frac{\operatorname{ch} \frac{(1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_2} \operatorname{ch} \left(\frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_1} - \frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_1} \operatorname{sh} \frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_2}} + \frac{|a_2 - a_1| \operatorname{ch} \frac{(1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_2}}{\sqrt{\tau}}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} & \frac{r_0 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\tau/2}}{a_2}}{\operatorname{sh} \frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_2}} + r_0 \frac{\operatorname{ch} \frac{(1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_2} \operatorname{ch} \left(\frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_1} - \frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_1} \operatorname{sh} \frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_2}} + \frac{|a_2 - a_1| \operatorname{ch} \frac{(1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_2}}{\sqrt{\tau}} \\ &= e^{\frac{(1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_2}} \left[r_0 \frac{1 + e^{\frac{-2\sqrt{\tau/2}}{a_2}}}{1 - e^{\frac{-2r_0\sqrt{\tau/2}}{a_2}}} + \right. \\ & \quad r_0 \frac{e^{\frac{-2r_0\sqrt{\tau/2}}{a_2}} + e^{-2\left(\frac{(1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_2} + \frac{r_0\sqrt{\tau/2}}{a_1}\right)}}{1 + e^{-2\left(\frac{r_0\sqrt{\tau/2}}{a_1} + \frac{r_0\sqrt{\tau/2}}{a_2}\right)}} + e^{\frac{-2r_0\sqrt{\tau/2}}{a_1}} + e^{\frac{-2\sqrt{\tau/2}}{a_2}} + \\ & \quad \left. |a_2 - a_1| \frac{1 + e^{\frac{-2(1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_2}}}{2\sqrt{\tau}} \right]. \quad (48) \end{aligned}$$

Из (48) следует, что второе и третье слагаемые в соотношении (47) будут бесконечно малыми по сравнению с первым слагаемым, поэтому сначала получим оценку сверху для первого слагаемого.

Из (48) будем иметь существование τ_1 такого, что для любого τ , $|\tau| \geq \tau_1$, справедливо

$$\frac{r_0 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\tau/2}}{a_2}}{\operatorname{sh} \frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_2}} \leq \frac{2r_0 e^{\frac{\sqrt{\tau/2}}{a_2}}}{\frac{1}{2} e^{\frac{r_0 \sqrt{\tau/2}}{a_2}}} \leq 4r_0 e^{\frac{(1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_2}}. \quad (49)$$

Так как второе и третье слагаемые являются бесконечно малыми, то существует $\tau_2 > \tau_1$ такое, что для любого τ , $|\tau| \geq \tau_2$, второе и третье слагаемые в формуле (47) по модулю не превосходят $r_0 e^{\frac{(1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_2}}$.

Учитывая вышесказанное, получим существование $\alpha_2 = \tau_2$ такого, что для всех α , $|\alpha| \geq \alpha_2$, справедлива формула

$$\|T_\alpha(\tau)\| \leq 6r_0 e^{\frac{(1-r_0)\sqrt{\alpha/2}}{a_2}}.$$

Аналогично доказывается существование α_3 , $\alpha_3 > \alpha_2$, такого, что для любого α , $|\alpha| \geq \alpha_3$, справедлива оценка снизу

$$\|T_\alpha(\tau)\| \geq \frac{1}{6} r_0 e^{\frac{(1-r_0)\sqrt{\alpha/2}}{a_2}}. \quad \square$$

Теперь получим оценку для $\|\hat{q}_0^\alpha(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\|$ в формуле (46). Пусть

$$\Delta_1^2(\alpha) = \sup \left\{ \int_{-\infty}^{-\alpha} |\hat{q}_0(\tau)|^2 d\tau + \int_{\alpha}^{\infty} |\hat{q}_0(\tau)|^2 d\tau : \hat{q}_0(\tau) \in \hat{M}_d \right\}. \quad (50)$$

Из (43) получаем, что при условии $\hat{q}_0(\tau) \in \hat{M}_d$

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} (1 + \tau^4) |\hat{q}_0^2(\tau)|^2 d\tau + \int_{\alpha}^{\infty} (1 + \tau^4) |\hat{q}_0^2(\tau)|^2 d\tau \leq 2d^2. \quad (51)$$

Из (50) и (51) следует, что $\Delta_1^2(\alpha) \leq 2d^2/(1 + \alpha^4)$.

Таким образом, из (46), (51), предыдущего соотношения и леммы 7 получим, что

$$\|\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \leq \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{1 + \alpha^4 + 6r_0 e^{\frac{(1-r_0)\sqrt{\alpha/2}}{a_2}} \sqrt{\alpha/2}} \delta}.$$

Параметр регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ в формуле (45) выберем из условия

$$\sqrt{1 + \alpha^4} \|T_\alpha\| \delta = \sqrt{2}d. \quad (52)$$

Учитывая вышесказанное, получим

$$\|\hat{q}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \leq \frac{2\sqrt{2}d}{\sqrt{1 + \bar{\alpha}^4(\delta)}}. \quad (53)$$

Так как функция $\sqrt{1 + \alpha^4} e^{\frac{(1-r_0)\sqrt{\alpha/2}}{a_2}} \sqrt{\alpha/2}$ строго возрастает по α и изменяется от α_3 до ∞ (α_3 введено в лемме 7), то существует единственное решение $\bar{\alpha}(\delta, d)$ уравнения (52) и $\bar{\alpha}(\delta, d) \geq \alpha_3$.

Ввиду того, что уравнение (52) не имеет решения в элементарных функциях, то аппроксимируем его парой уравнений

$$e^{\frac{(1-r_0)}{a_2}\sqrt{\alpha/2}} = \frac{6r_0d}{\delta}, \quad e^{\frac{2(1-r_0)}{a_2}\sqrt{\alpha/2}} = \frac{dr_0}{6\delta}. \quad (54)$$

Решения уравнений (54) обозначим через $\bar{\alpha}_1(\delta, d)$ и $\bar{\alpha}_2(\delta, d)$ соответственно. Тогда при достаточно малых значениях δ справедливо

$$\bar{\alpha}_2(\delta, d) \leq \bar{\alpha}(\delta, d) \leq \bar{\alpha}_1(\delta, d). \quad (55)$$

Из (54) будем иметь

$$\bar{\alpha}_1(\delta, d) = \frac{2a_2^2}{(1-r_0)^2} \ln^2 \frac{6r_0d}{\delta}, \quad \bar{\alpha}_2(\delta, d) = \frac{a_2^2}{2(1-r_0)^2} \ln^2 \frac{r_0d}{6\delta},$$

а из (55) получается

$$\bar{\alpha}(\delta, d) \sim \ln^2 \delta \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (56)$$

Решение задачи (39)–(43) определим формулой $\hat{q}_\delta(\tau) = \hat{q}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta, d)}(\tau)$. Тогда из соотношения (53) следует, что

$$\|\hat{q}_\delta(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \leq \frac{2d}{\sqrt{1 + \bar{\alpha}_1^4(\delta, d)}}. \quad (57)$$

Обозначим через $\hat{\omega}(\tau, d)$ модуль условной корректности задачи (39)–(43) (модуль непрерывности оператора T множества $\hat{M}_d^\alpha$):

$$\hat{\omega}(\tau, d) = \sup \left\{ \|T\hat{f}\| : T\hat{f} \in \hat{M}_d, \|\hat{f}\| \leq \tau \right\}, \quad \tau, d > 0. \quad (58)$$

Теорема 5. *Задача (39)–(43) условно-корректна, и для модуля условной корректности этой задачи при достаточно малых значениях δ справедлива оценка*

$$\hat{\omega}(\tau, d) \leq \frac{4d}{\sqrt{1 + \alpha_1^4(\tau, d)}}.$$

Доказательство следует из формул (57), (58).

Следствие. *Из теоремы 5 и изометричности преобразования Фурье в пространстве L_2 следует аналогичное утверждение для задачи (1)–(3), (5), (6), (33).*

Окончательно, решение $q_\delta(t)$ обратной задачи (1)–(3), (5), (6), (33) определим формулой

$$q_\delta(t) = \begin{cases} \operatorname{Re} F^{-1}[\bar{q}_\delta(\tau)], & t \in [0, t_0], \\ 0, & t > t_0, \end{cases}$$

где F^{-1} оператор, обратный F .

Учитывая вышесказанное, для $q_\delta(t)$ будет справедлива оценка

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\| \leq \frac{2d}{\sqrt{1 + \bar{\alpha}_1^4(\delta, d)}}. \quad (59)$$

Из (56) и (59) следует существование числа $l > 0$ такого, что для любого достаточно малого δ справедлива оценка

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\| \leq ld \ln^{-4} \delta.$$

5. Численное решение задачи (1)–(3), (5), (6), (33) методом проекционной регуляризации для модельного примера

Для иллюстрации эффективности математической модели, учитывающей неоднородность материала, приведем несколько численных примеров. На рисунках 1 и 2 приведены графики решения обратной задачи. Сплошная линия показывает приближенное решение задачи, пунктирная — точное.

В модельном примере параметры задачи выбирались следующим образом: $a_1 = 0.01$, $a_2 = 1$, $r_0 = 0.9$. Функция $q(t)$ выбиралась в виде $q(t) = te^{-0.03t}$. По результатам решения прямой задачи определялось граничное решение $f(t)$ и вносилась погрешность δ . После этого решалась обратная задача и определялось граничное значение $q_\delta(t)$ (сплошная линия на рисунках).

На рис. 1 приведено приближенное решение задачи без погрешности исходных данных при $\delta = 0$.

На рис. 2 приведено приближенное решение задачи при погрешности исходных данных 2 %.

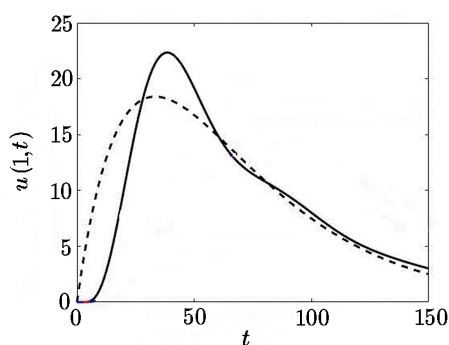


Рис. 1. Пунктирной линией указано точное значение температуры на внешней границе шара. Сплошная линия — график приближенного решения $u(1,t) = q_\delta(t)$ при $\delta = 0$

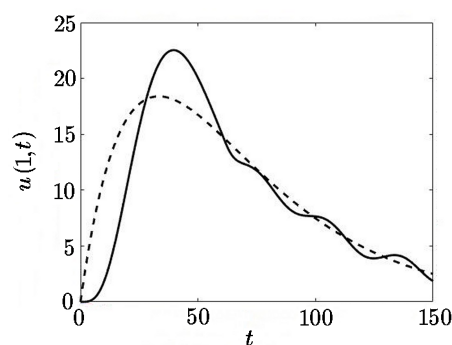


Рис. 2. Пунктирной линией указано точное значение температуры на внешней границе шара. Сплошная линия — график приближенного решения $u(1,t) = q_\delta(t)$ при $\delta = 2\%$

Из графиков следует удовлетворительная точность используемого метода и достаточно хорошая помехоустойчивость. Для повышения точности метода необходимо увеличить уровень гладкости искомого граничного условия.

6. Заключение

В работе поставлена и решена обратная граничная задача теплопроводности для неоднородного шара. Исследование гладкости решения прямой задачи позволило поставить обратную граничную задачу теплопроводности как условно корректную. Методом проекционной регуляризации получены приближенные решения обратной задачи и оценка погрешности этого решения. Полученные результаты могут быть использованы в приборостроении при конструировании высокотемпературных термпар.

Литература

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. — М.: Наука, 1988.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964.
3. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. — М.: Наука, 1976.
4. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, 1995.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
6. Денисов В.Я. Введение в теорию обратных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1994.
7. Леонов А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. — М.: Либроком, 2013.
8. Ягола А.Г., Степанова И.Э., Титаренко В.Н., Ван Я. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014.
9. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. К вопросу о методах определения температуры поверхности тела // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1967. — Т. 7, № 4. — С. 910–914.
10. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некоторые задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980. Перевод: Lavrent'ev M. M., Romanov V.G. and Shishatsky S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analyses. — М.: Nauka Publ., 1980.
11. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. Перевод: Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. — Novosibirsk: Siberian Academic Press, 2009.
12. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. Перевод: Ivanov V.K., Vasin V.V. and Tanana V.P. Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications. — The Netherlands: VSP, 2002.
13. Ландис Е.М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 2, № 1. — С. 21–85.
14. Танана В.П. О сведении обратной граничной задачи к последовательному решению двух некорректных задач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 2. — С. 219–232. Перевод: Tanana V.P. On reducing an inverse boundary-value problem to the synthesis of two ill-posed problems and their solution // Numerical Analysis and Applications. — 2020. — Vol. 13, № 2. — P. 180–192.
15. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2. — М.: Наука. Физматлит, 1968.
16. Tanana V., Sidikova A. Optimal Methods for Ill-Posed Problems with Applications to Heat Conduction. — De Gruyter, 2018.

Поступила в редакцию 5 октября 2019 г.

После исправления 23 декабря 2020 г.

Принята к печати 14 апреля 2021 г.

Литература в транслитерации

1. Alifanov O.M., Artyuhin E.A., Rumyantsev S.V. Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach i ih prilozheniya k obratnym zadacham teploobmena. — М.: Nauka, 1988.
2. Carslaw G., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel. — М.: Nauka, 1964.
3. Chudnovskii A.F. Teplofizika pochv. — М.: Nauka, 1976.

4. **Tihonov A.N., Leonov A.S., Yagola A.G.** Nelineinye nekorrektnye zadachi. — M.: Nauka, 1995.
5. **Tihonov A.N., Arsenin V.YA.** Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1979.
6. **Denisov V.YA.** Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach. — M.: Izd-vo MGU, 1994.
7. **Leonov A.S.** Reshenie nekorrektno postavlennykh obratnykh zadach. Ocherk teorii, prakticheskie algoritmy i demonstratsii v MATLAB. — M.: Librokom, 2013.
8. **Yagola A.G., Stepanova I.E., Titarenko V.N., Van Ya.** Obratnye zadachi i metody ih resheniya. Prilozheniya k geofizike. — M.: Binom. Laboratoriya znaniy, 2014.
9. **Tikhonov A.N., Glasko V.B.** K voprosu o metodah opredeleniya temperatury poverhnosti tela // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1967. — T. 7, № 4. — S. 910–914.
10. **Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P.** Nekotorye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza. — M.: Nauka, 1980. Perevod: Lavrent'ev M.M., Romanov V.G. and Shishatsky S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analyses. — M.: Nauka Publ., 1980.
11. **Kabanikhin S.I.** Obratnye i nekorrektnye zadachi. — Novosibirsk: Sib. nauch. izd-vo, 2009. Perevod: Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. — Novosibirsk: Siberian Academic Press, 2009.
12. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya. — M.: Nauka, 1978. Perevod: Ivanov V.K., Vasin V.V. and Tanana V.P. Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications. — The Netherlands: VSP, 2002.
13. **Landis E.M.** Nekotorye voprosy kachestvennoi teorii ellipticheskikh i parabolicheskikh uravnenii // Uspekhi mat. nauk. — 1959. — T. 2, № 1. — S. 21–85.
14. **Tanana V.P.** O svedenii obratnoi granichnoi zadachi k posledovatel'nomu resheniyu dvuh nekorrektnykh zadach // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2020. — T. 23, № 2. — S. 219–232. Perevod: Tanana V.P. On reducing an inverse boundary-value problem to the synthesis of two ill-posed problems and their solution // Numerical Analysis and Applications. — 2020. — Vol. 13, № 2. — P. 180–192.
15. **Fih tengol'ts G.M.** Osnovy matematicheskogo analiza. T. 2. — M.: Nauka. Fizmatlit, 1968.
16. **Tanana V., Sidikova A.** Optimal Methods for Ill-Posed Problems with Applications to Heat Conduction. — De Gruyter, 2018.