

УДК532.517.5; 551. 511. 32

Турбулентная циркуляция над поверхностным источником тепла в устойчиво стратифицированной окружающей среде*

А.Ф. Курбацкий¹, Л.И. Курбацкая²

¹*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

²*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск*

E-mail: kurbat@itam.nsc.ru

Представлены результаты численного моделирования турбулентной структуры проникающей конвекции над городским островом тепла малого относительного удлинения в устойчиво стратифицированной покоящейся среде. Используются представления градиентной диффузии для турбулентных потоков импульса и тепла, зависящие от трех параметров — кинетической энергии турбулентности, скорости ее спектрального расходования и дисперсии температурных флуктуаций. Эти параметры находятся из замкнутых дифференциальных уравнений баланса в RANS-приближении описания турбулентности. Распределения осредненных полей скорости и температуры, а также турбулентных характеристик хорошо согласуются с данными измерений.

Ключевые слова: турбулентность, планетарный пограничный слой, городской остров тепла, крупномасштабная циркуляция, численное моделирование.

Введение

Циркуляция воздуха над городским островом тепла генерируется за счет энергии антропогенных источников в пределах городской черты (рис. 1). Наиболее интенсивной она становится в ночное время при ясном небе и слабом ветре. Фундаментальными характеристиками, отражающими структуру ночного городского острова тепла, являются распределения полей скорости и температуры, а также интенсивностей турбулентности. Вертикальный турбулентный тепловой факел от локализованного источника (острова тепла) и связанная с ним циркуляция развиваются вследствие различия температур между островом тепла и его окружением, которое имеет более низкую температуру.

Типичный тепловой факел городского острова тепла имеет малое относительное удлинение ($z_i/D \ll 1$), т.е. малое отношение высоты перемешивания (z_i) к линейному размеру острова тепла (D) (рис. 2). В измерениях [1] высота перемешивания z_i определяется как

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-05-00006 и частично № 14-01-00125) и комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН № 11.2П.

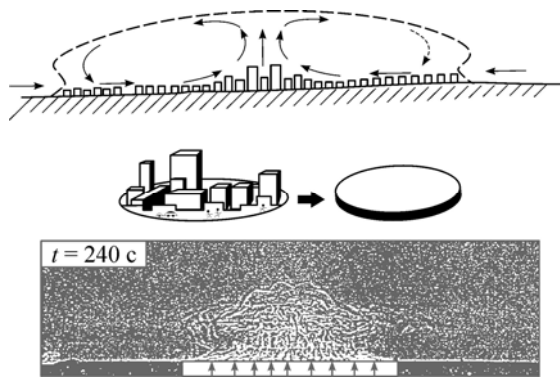


Рис. 1. Схема реализации в лабораторном эксперименте [1] циркуляции над городским островом тепла в устойчиво стратифицированном городском пограничном слое при слабом ветре.

На среднем фрагменте справа — нагреваемая пластина в форме диска, моделирующая прототип (слева); теньевая фотография внизу показывает тепловой факел над локализованным источником тепла (нагреваемой пластиной) в квазиустановившемся состоянии; рабочая среда в лабораторной установке — термически устойчиво стратифицированная вода [1, 2].

высота, на которой достигается максимальная отрицательная разность между температурой в центре факела и окружающей температурой (плотностью), как показано на рис. 2. Натурные измерения в ночном пограничном слое показывают в качестве типичных значений: $z_i \approx 200$ м, $D \approx 20$ км. Малость отношения z_i/D для прототипа представляет основное ограничение лабораторного эксперимента. Вследствие значительного уменьшения линейного масштаба в лабораторном моделировании трудно разрешить структуру течения во всем диапазоне высот — от поверхности до верхней границы факела. Характерное число Рейнольдса моделируемого течения на несколько порядков меньше, чем для прототипа. Поэтому лабораторное моделирование ограничивается воспроизведением крупномасштабной циркуляции над островом тепла внутри городского пограничного слоя; процессы в вязком подслое (в приземном слое шероховатости) не рассматриваются. Однако при слабом ветре турбулентное движение в центре городского острова тепла доминирует за счет работы флуктуирующей силы плавучести. Механическое же воздействие городской шероховатости и сдвига ветра менее важны.

Для получения теплового факела малого относительного удлинения в лабораторной установке [1] (120×124×45 см) требовалось создать большие потоки тепла от нагреваемого диска (рис. 1) и сильные градиенты температуры в рабочей среде, в качестве которой для моделирования турбулентной конвекции использовалась вода, как это впервые было предложено для моделирования конвекции в планетарном пограничном слое в работе [2]. Но в работе [1] не удалось получить типичную область малых значений отношения z_i/D и малого числа Фруда Fr (определение последнего будет приведено ниже), ожидаемых для реального острова тепла в ночном городском пограничном слое.

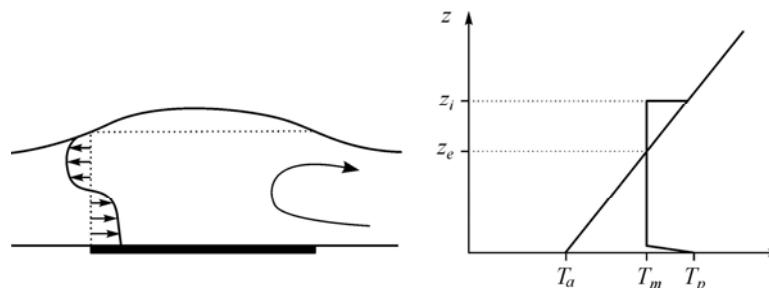


Рис. 2. Схема циркуляции над островом тепла.

Слева — распределение горизонтальной скорости, справа — вертикальный профиль температуры в окружающей среде; z_i — высота перемешанного слоя, z_e — равновесная высота, T_m — температура на оси теплового факела, T_a — температура окружающей среды вблизи поверхности, T_p — температура в окружающей среде на высоте перемешанного слоя.

В эксперименте были достигнуты значения $z_i/D \cong 0,09$ и $Fr = 0,03$, которые едва достигали верхних значений в атмосфере. Важное следствие наблюдения в эксперименте указанных условий состояло, в частности, в том, что высота перемешивания z_i , поля скорости и температуры были функциями времени после начала нагревания. Спустя несколько минут с момента начала нагревания диска наблюдалось квазиустановившееся состояние, поскольку интенсивность острова тепла $\Delta T_m = T_m - T_0$ и поток тепла с поверхности оставались постоянными во времени. Эксперимент по существу ограничивался первыми несколькими минутами квазиустановившегося состояния, пока индуцируемая циркуляция не достигала боковых стенок установки и последние не начинали оказывать влияние на циркуляцию. Численная модель городского острова тепла формулируется с учетом отмеченных выше ограничений в лабораторном моделировании.

В настоящем исследовании для моделирования турбулентной циркуляции над островом тепла и воспроизведения полей скорости и температуры, а также структуры турбулентности используется RANS-приближение, включающее в себя осредненные уравнения термогидродинамики. Для турбулентных потоков импульса и тепла формулируются аппроксимации градиентной диффузии, зависящие от трех параметров: кинетической энергии турбулентности, скорости ее спектрального расходования (диссипации) и дисперсии турбулентных температурных флуктуаций. Эти параметры определяются из решения замкнутых дифференциальных уравнений баланса [3], приведенных в Приложении.

Основное отличие настоящей модели острова тепла от других теоретических и численных моделей заключается в описании турбулентной конвекции. Так, например, в двумерной численной модели [4] учитываются различия между шероховатостью города и окружающей среды, однако турбулентность рассматривается в параметризованном виде, что не позволяет в полной мере учесть структуру эволюционирующего теплового факела и получить распределения в пространстве и во времени основных характеристик острова тепла. Такие распределения важны для моделирования атмосферной диффузии примесей.

1. Определяющие уравнения

Проникающая турбулентная конвекция, инициируемая постоянным потоком тепла H_0 с поверхности пластины диаметра D (рис. 1, 2), моделирует в лабораторном эксперименте прототип городского острова тепла малого относительного удлинения ($z_i/D \ll 1$) при слабом ветре в устойчиво стратифицированной окружающей среде: $(\partial T_a / \partial z) = \gamma_z > 0$. Движение среды рассматривается как обладающее осевой симметрией. На основании обработки данных измерений [1] для горизонтальной (радиальной) скорости выбран масштаб $w_D = (\beta g D H_0 / \rho_0 c_p)$, где β — коэффициент термического расширения среды, g — ускорение силы тяжести, c_p — удельная теплоемкость. Величина w_D несколько отличается от конвективного масштаба скорости, введенного Дирдорфом [2], поскольку диаметр нагреваемой пластины D используется в качестве базового контролируемого параметра длины. В качестве характерного масштаба температуры принимается величина $w_D N / g \beta$, масштаба времени — величина D / w_D . Число Фруда $Fr = w_D / (N \cdot D)$, величина $N = [\beta g (\partial T / \partial z)_0]^{1/2}$ — частота Брента–Вяйсяля.

Основные уравнения гидродинамики для описания циркуляции над островом тепла малого относительного удлинения могут быть взяты в гидростатическом приближении [5]. Без учета силы Кориолиса и радиации эти уравнения в безразмерной форме для осредненных значений скорости и температуры в приближении Буссинеска имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rU)U + \text{Fr} \frac{\partial}{\partial z} UW = \text{Fr}^{-1} \int_z^h \frac{\partial T}{\partial r} dz - \frac{\partial(\overline{u^2})}{\partial r} - \frac{\partial(\overline{uw})}{\partial z} + \frac{\overline{u^2} - \overline{v^2}}{r} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} rU + \text{Fr} \frac{\partial}{\partial z} rW = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rUT) + \text{Fr} \frac{\partial}{\partial z} (WT) = (\text{Re} \cdot \text{Pr})^{-1} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \left[-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \overline{u\theta} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w\theta} \right], \quad (3)$$

здесь U — осредненная горизонтальная скорость, W — осредненная вертикальная скорость, u — горизонтальная турбулентная скорость, w — вертикальная турбулентная скорость, v — азимутальная турбулентная скорость, T — осредненная температура, θ — турбулентная пульсация температуры, $\text{Re} = (w_D D)/\nu$ — число Рейнольдса, λ — коэффициент температуропроводности, ν — кинематическая вязкость, $\text{Pr} = \nu/\lambda$ — число Прандтля, h — заданная высота стратифицированного слоя среды. В уравнениях (1)–(3) и далее прописными буквами и чертой сверху обозначаются осредненные значения величин, а строчными буквами — турбулентные флуктуации величин.

2. Турбулентные потоки тепла и импульса

Уравнения (1)–(3) включают в качестве неизвестных величин компоненты турбулентных напряжений $\overline{u_i u_j}$ (нормальные и касательные) и вектор турбулентного потока тепла $\overline{u_i \theta}$. Физически корректное описание воздействия стратификации среды на турбулентную структуру циркуляции над островом тепла можно получить в приближении локально-равновесной турбулентности [3], при этом турбулентные потоки параметризуются соотношениями градиентной диффузии. Такой подход минимизирует сложность описания турбулентности стратифицированных течений окружающей среды и затраты на численную реализацию модели.

Точное уравнение для вектора турбулентного потока тепла $\overline{u_i \theta}$ имеет вид [6]:

$$\frac{D\overline{u_i \theta}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v \cdot \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \lambda \cdot \overline{u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j \theta} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\overline{\theta}}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} - (\lambda + \nu) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{\theta^2}. \quad (4)$$

Для случая больших турбулентных чисел Рейнольдса уравнение (4) в замкнутой форме записывается в виде:

$$\frac{D\overline{u_i \theta}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ c_{s\theta} \frac{E}{\varepsilon} \left(\overline{u_i u_\alpha} \frac{\partial \overline{u_k \theta}}{\partial x_\alpha} + \overline{u_k u_\alpha} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_\alpha} \right) \right\} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{1\theta} \frac{\overline{u_i \theta}}{\sqrt{2\tau\tau_\theta}} + c_{2\theta} \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + c_{3\theta} g_i \beta \overline{\theta^2} - g_i \beta \overline{\theta^2}, \quad (5)$$

где $E = (1/2)\overline{u_i u_i}$ — кинетическая энергия турбулентности и ε — скорость ее диссипации, $\tau_\theta = \overline{\theta^2}/2\varepsilon_\theta$ — масштаб времени турбулентного температурного поля, $\tau = E/\varepsilon$ — масштаб времени турбулентного поля скорости. В уравнении (5) диссипация турбулентного потока тепла $\overline{u_i \theta}$ принята равной нулю по соображениям отсутствия изотропного тензора первого ранга. В рамках этого допущения полагается, что $c_{3\theta} = c_{2\theta}$; численные значения коэффициентов $c_{1\theta}, c_{2\theta}, c_{3\theta}$ будут приведены ниже.

Полностью явная градиентная модель для вектора турбулентного потока тепла может быть выведена из уравнения (5) в приближении слаборавновесной турбулентности [3]. В настоящем исследовании используется упрощенный вариант модели для вектора турбулентного потока тепла, получаемый в приближении равновесной турбулентности из уравнения (5) первоначально в неявном виде, поскольку $\overline{u_i \theta}$ входит в правую часть выражения (6):

$$-\overline{u_i \theta} = \frac{\sqrt{2}}{c_{1\theta}} \sqrt{\tau \tau_\theta} \left\{ \left[\overline{u_i u_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + (1 - c_{2\theta}) \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] + (1 - c_{2\theta}) g_i \beta \overline{\theta^2} \right\}. \quad (6)$$

Получение полностью явных аппроксимаций для турбулентных потоков импульса и тепла в общем трехмерном случае представляет непростую задачу [7]. В двумерном случае матрица линейных алгебраических уравнений (6) может быть обращена для искомых турбулентных потоков тепла и импульса с привлечением символической алгебры. Такая стратегия позволит получить полностью явные выражения градиентной диффузии для турбулентных потоков [3, 8]. Для записи уравнения (6) в явном виде используются простые модели градиентной диффузии Буссинеска для потоков импульса ($-\overline{u_i u_j}$) и тепла ($\overline{u_i \theta}$), входящих в правую часть (6):

$$-\overline{u_i u_j} = 2K_m S_{ij} - \frac{2}{3} E \delta_{ij}, \quad -\overline{u_j \theta} = K_h \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (7)$$

где $S_{ij} = 1/2(\partial U_i/\partial x_j + \partial U_j/\partial x_i)$ — осредненный тензор скоростей деформации, $K_m = c_\mu E^2/\varepsilon$ — вихревой коэффициент диффузии импульса, $K_h = c_\lambda \sqrt{2R} \cdot E^2/\varepsilon$ — вихревой коэффициент диффузии тепла, $R = \tau_\theta/\tau$ — параметр отношения временных масштабов температурного (τ_θ) и динамического (τ) турбулентных полей температуры и скорости соответственно. Численные значения коэффициентов в (6) откалиброваны при решении «предельных» задач стратифицированных течений [9, 10]: $c_\mu = 0,09$, $c_\lambda = 0,095$, $c_{1\theta} = 3,28$, $c_{2\theta} = c_{3\theta} = 0,40$, $R = 0,6$ [11].

Подстановка (7) в (6) приводит к полностью явному выражению для вектора турбулентного потока тепла:

$$\begin{aligned} -\overline{u_i \theta} = c_\lambda \frac{E^2}{\varepsilon} \sqrt{2R} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\sqrt{2R}}{c_{1\theta}} \cdot \frac{E}{\varepsilon} [\{ 2K_m + (1 - c_{2\theta}) K_h \} S_{ij} + \\ + (1 - c_{2\theta}) K_h \Omega_{ij}] \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{1 - c_{2\theta}}{c_{1\theta}} \sqrt{2R} \frac{E}{\varepsilon} g_i \beta \overline{\theta^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Omega_{ij} = (\partial U_i/\partial x_j - \partial U_j/\partial x_i)/2$ — средний тензор вращения. Градиентная модель (8) в явной форме выражает вектор потока $-\overline{u_i \theta}$ через средние градиенты, коэффициенты вихревой диффузии импульса и тепла, а также дисперсию флуктуаций температуры $\overline{\theta^2}$.

Из (8) следуют выражения для нормализованных потоков тепла — вертикального ($\overline{w\theta}$) и горизонтального ($\overline{u\theta}$):

$$\begin{aligned} -\overline{w\theta} = c_\lambda \frac{E^2}{\varepsilon} \sqrt{2R} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\sqrt{2R}}{c_{1\theta}} \cdot \frac{E}{\varepsilon} \left[K_m \left(\text{Fr} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + (1 - (1 - c_{2\theta}) K_h \text{Fr}) \frac{\partial W}{\partial r} \right] \frac{\partial T}{\partial r} - \\ - \frac{1 - c_{2\theta}}{c_{1\theta}} \sqrt{2R} \frac{E}{\varepsilon} \overline{\theta^2} \cdot \text{Fr}^{-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$-\overline{u\theta} = c_\lambda \frac{E^2}{\varepsilon} \sqrt{2R} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\sqrt{2R}}{c_{1\theta}} \cdot \frac{E}{\varepsilon} \left[K_m \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \text{Fr} \frac{\partial W}{\partial r} \right) + (1 - c_{2\theta}) K_h \frac{\partial U}{\partial z} \right] \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (10)$$

Подстановка (9) и (10) в (3) приводит к замкнутой форме уравнения для осредненной температуры. Можно заметить, что модель Буссинеска (7) для потока тепла дает нулевой горизонтальный поток тепла для течений с нулевым продольным градиентом средней температуры. В выражении (10) при обращении градиента $\partial T/\partial r$ в нуль поток тепла может быть и не равным нулю (из-за второго слагаемого в (10)) вследствие взаимодействия турбулентных вихрей с градиентом средней температуры, нормальным к направлению основного течения.

Для нормальных турбулентных напряжений, входящих в правую часть уравнения (1), используется простая модель градиентной диффузии Буссинеска, сохраняющая некоторую анизотропию нормальных напряжений:

$$\overline{u^2} = \frac{2}{3} E - 2K_m \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \overline{w^2} = \frac{2}{3} E - 2K_m \text{Fr} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \overline{v^2} = \frac{2}{3} E - 2K_m \frac{U}{r}. \quad (11)$$

Подстановка (11) в (1) позволяет записать уравнение (1) в замкнутой форме. Выражения (11) с учетом уравнения неразрывности (2) дают в сумме кинетическую энергию турбулентности. Для касательного турбулентного напряжения модель градиентной диффузии (7) имеет вид:

$$-\overline{uw} = K_m \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \text{Fr} \frac{\partial W}{\partial r} \right). \quad (12)$$

Вертикальная осредненная скорость W в численной модели находится квадратурой из уравнения неразрывности (2).

3. Начальные и граничные условия

Задача о развитии циркуляции над островом тепла решается в осесимметричной постановке. Область интегрирования представляет собой цилиндр заданной высоты h . Нагреваемая пластина диаметром D расположена в центре нижней поверхности цилиндра (рис. 1, 2). Внешняя граница располагается на расстоянии $1,5D$ от оси цилиндра. В начальный момент времени среда находится в состоянии покоя и устойчиво стратифицирована.

Согласно результатам лабораторного эксперимента численно моделируется крупномасштабная проникающая конвекция над островом тепла без разрешения течения в вязком подслое; для радиальной скорости U используется условие прилипания на нижней поверхности. Заданный поток тепла от источника ($0 < r/D \leq 0,5$)

$$-\rho c_p \lambda (\partial T/\partial z)_{z=0} = H_0 \quad (13)$$

используется в качестве граничного условия при записи конечно-разностного аналога уравнения (3) для температуры в приграничных узлах разностной сетки. Вне нагревателя ($0,5 < r/D \leq 1,5$) температура полагается равной заданной температуре поверхности T_0 :

$$T|_{z=0} = T_0, \quad (14)$$

что согласуется с условиями лабораторного эксперимента (стенка проводит тепло).

Граничные условия для вторых моментов поля скорости и температуры (кинетической энергии турбулентности E , скорости ее диссипации ε и дисперсии флуктуаций температуры $\overline{\theta^2}$, определяемых уравнениями (А.1)–(А.4) Приложения) формулируются на первом расчетном слое от поверхности ($z = z_1$) с учетом условий термической устойчивости среды отдельно для областей неустойчивой стратификации (над источником тепла) и устойчивой стратификации среды (вне источника тепла). Для неустойчивой стратификации граничные значения для E , ε над источником тепла (при $0,5 < r/D \leq 0,5$) взяты в виде [12]:

$$E_1 = u_*^2 \left[\left(7 + 0,52 \frac{z_1}{|L|} \right)^{2/3} + 0,85 \left(1 + 3 \frac{z_1}{|L|} \right)^{2/3} \right], \quad (15)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{u_*^2}{k z_1} \left[1 + 0,5 \left(z_1 / |L| \right)^{2/3} \right]^{3/2}. \quad (16)$$

Условие (16) хорошо согласуется с данными канзасского эксперимента [13] и удовлетворяет предельным условиям нейтральной стратификации ($\varepsilon = u_*^3 / k z_1$) и сильно неустойчивой стратификации ($\varepsilon = 0,35 \beta g H_0$). В (15), (16) величина $L = u_*^3 / (k \beta g H_0 / \rho c_p)$ — масштаб Монина–Обухова, $k \approx 0,40$ — постоянная Кармана, u_* — турбулентная скорость трения, g — ускорение силы тяжести. Масштаб Монина–Обухова $L = -u_*^3 / (\beta g k \cdot \overline{w\theta})$ определяет высоту, выше которой доминирующим механизмом генерации кинетической энергии турбулентности является работа флуктуирующей силы плавучести, а порождение этой энергии сдвигом скорости малó.

Граничное условие для дисперсии $\overline{\theta^2}$ при $0 < r/D \leq 0,5$ на первом расчетном слое ($z = z_1$) получено из уравнения (А.4) в приближении локального баланса «порождение = деструкции» с использованием выражения (9) для турбулентного потока тепла:

$$\overline{\theta_1^2} = \frac{\text{Fr}^2 \left[\left(H_0 / \rho c_p \right) \beta g D / w_D^3 \right]^2 \sqrt{2R} / (c_\lambda E_1)}{\left\{ 1 + 2R(1 - c_{2\theta}) / (c_{1\theta} c_\lambda \varepsilon_1) \left[\left(H_0 / \rho c_p \right) \beta g (D / w_D^3) \right] \right\}}. \quad (17)$$

Вне нагревателя ($0,5 < r/D \leq 1,5$) задается «фоновый» уровень дисперсии температуры по отношению к значению над нагреваемой пластиной на первом расчетном слое ($z = z_1$):

$$\overline{\theta^2} (0,5 < r/D \leq 1,5)_1 = 0,01 \cdot \overline{\theta^2} (0 < r/D \leq 0,5)_1. \quad (18)$$

Можно заметить, что варьирование численного коэффициента в (18) не оказывало сколь-нибудь заметного влияния на поведение профиля $\overline{\theta^2}$ при $z > z_1$.

В работе [14] на основе гипотез подобия Монина–Обухова для приземного слоя атмосферного пограничного слоя [15] было предложено безытерационное приближение

для нахождения поверхностных турбулентных масштабов скорости u_* и температуры θ_* . В решаемой задаче масштаб θ_* не потребуется и формула для его вычисления не приводится. Турбулентная скорость трения u_* на расстоянии $z = z_1$ от поверхности (первый расчетный слой) находится по формуле

$$u_*^2 = C_{D_s} \cdot U^2 \cdot f_m(\text{Ri}_B, z/z_0), \quad (19)$$

$$\text{Ri}_B = \beta g z \frac{\Delta T}{U^2}, \quad (20)$$

где Ri_B — объемное число Ричардсона, $C_{D_s} = (u_*^2 / U^2) = k^2 / [\ln(z/z_0)]^2$ — коэффициент трения для нейтральных условий, z_0 — параметр шероховатости поверхности. Форма функции f_m должна быть совместима с логарифмическим профилем скорости. Необходимое требование совместимости: $f_m(\text{Ri}_B \rightarrow 0, z/z_0) = 1$.

Для функции устойчивости f_m в работе [14] были получены аналитические аппроксимации:

– в случае неустойчивой стратификации ($\text{Ri}_B < 0$)

$$f_m^{(1)} = 1 - \left(b \text{Ri}_B / (1 + c |\text{Ri}_B|^{1/2}) \right), \quad (21)$$

– в случае устойчивой стратификации ($\text{Ri}_B > 0$)

$$f_m^{(2)} = 1 / (1 + b_1 \text{Ri}_B)^2, \quad (22)$$

где $b = 2b_1 = 9,4$, $c = 7,4 C_{D_s} \cdot b (z/z_0)^{1/2}$.

Таким образом, турбулентная скорость трения u_* на расстоянии $z = z_1$ от поверхности может быть вычислена по формуле (19) с $f_m^{(1)}$ над источником тепла ($0 < r/D \leq 0,5$) и с $f_m^{(2)}$ вне источника тепла ($0,5 < r/D \leq 1,5$).

Вне поверхностного источника тепла ($0,5 < r/D \leq 1,5$) граничные значения для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации ε имеют вид [16]:

$$E_1 = c_\mu^{-1/2} u_*^2, \quad (23)$$

$$\varepsilon_1 = u_*^3 / k z_1 (1 + 4z_1/L). \quad (24)$$

В вычислениях граничное условие (17) реализовано в виде: $\varepsilon_1 = u_*^3 / k z_1$. Согласно [17], величина масштаба Монина–Обухова составляет порядка высоты устойчивого пограничного слоя и для условий решаемой задачи соответствует $z_1 \ll L$.

Условия симметрии

$$\partial U / \partial r = \partial E / \partial r = \partial \varepsilon / \partial r = \partial T / \partial r = \partial \overline{\theta^2} / \partial r = 0 \quad (25)$$

задаются как на оси теплового факела ($r/D = 0$), так и на внешней границе ($r = 1,5D$), а на верхней границе ($z = h$) ставится условие отсутствия потоков через границу:

$$\partial U / \partial z = \partial E / \partial z = \partial \varepsilon / \partial z = \partial \overline{\theta^2} / \partial z = 0. \quad (26)$$

Граничное условие для температуры на верхней границе формулируется в виде равенства вертикального градиента температуры в двух последних узлах разностной сетки

$$\left(\partial T / \partial z \right)_{z=z_{j-1}} = \left(\partial T / \partial z \right)_{z=z_j}. \quad (27)$$

Это условие определяет значение температуры на верхней границе, соответствующее термической стратификации среды в лабораторном эксперименте — линейному закону возрастания с высотой температуры окружающей среды.

Численное моделирование выполнялось для двух реализаций эксперимента [1]. Результаты вычисления характеристик поля скорости (случай I) получены при «слабой» стратификации, а характеристик поля температуры (случай II) при «сильной» стратификации: $H_0 = 1,81 \text{ Вт/см}^2$, $w_D = 1,51 \text{ см/с}$, $\gamma_z = 1,4 \text{ }^\circ\text{C/см}$, $Fr = 0,088$, $Re = 4500$, $h = 16 \text{ см}$.

Для случая I в работе [1] приведены данные измерений средних скоростей и стандартных отклонений для турбулентных пульсаций радиальной и вертикальной скоростей, а для случая II — распределения средней температуры и дисперсии турбулентных флуктуаций температуры. В разделе 5 сравнение численных результатов с экспериментальными данными представлено для указанных случаев I и II.

4. Численная реализация

Система уравнений (1)–(3) вместе с дифференциальными уравнениями баланса (A.1)–(A.4) для вторых моментов E , ε и $\overline{\theta^2}$ (см. Приложение) решается при заданных начальных и граничных условиях методом конечных разностей по полуявной схеме переменных направлений (вторая схема с разностями против потока [18]) на разностной сетке со смещенными узлами. Для достижения квазиустановившегося состояния циркуляции над островом тепла требовалось примерно $2,8 \cdot 10^4$ шагов по времени для ситуации со «слабой» стратификацией (случай I) и около $5 \cdot 10^4$ шагов по времени для ситуации с «сильной» стратификацией (случай II). Вычисления проводились на сетке с 25 узлами по радиальной координате, по вертикали сетка имела 120 узлов при высоте слоя $h = 20 \text{ см}$ для случая I и 135 узлов при высоте слоя $h = 16 \text{ см}$ для случая II. Число узлов сетки в радиальном направлении могло варьироваться путем изменения линейного размера области интегрирования. Шаг по времени был выбран из условия сохранения точности численного решения.

5. Результаты численного моделирования. Сравнение с экспериментом

В эксперименте [1] спустя несколько минут после начала поступления тепла от нагревателя в окружающую устойчиво стратифицированную среду формировалось квазиустановившееся состояние термической циркуляции, при котором интенсивность острова тепла $\Delta T_m = T_m - T_0$ и поверхностный поток тепла оставались неизменными с течением времени (T_m и T_0 — температуры поверхности в центре острова тепла и вне его соответственно). Эксперимент ограничивался первыми несколькими минутами квазиустановившегося состояния, до тех пор пока индуцируемая островом тепла циркуляция среды не достигала боковых стенок установки и не сказывалось влияние последних. Представленные ниже численные результаты соответствуют такому квазиустановившемуся состоянию циркуляции над островом тепла.

5.1. Поле скорости

На рис. 3 показаны два крупномасштабных вихря (см. рис. 1) с вращением левого вихря против часовой стрелки, правого — по часовой стрелке, которые формируют основное восходящее движение в центре, простирающееся до слоя вовлечения ($z/z_i \approx 1$), и нисходящее движение на периферии. При этом высота теплового факела подавляется устойчивой стратификацией среды, боковое движение и турбулентность факела увеличиваются.

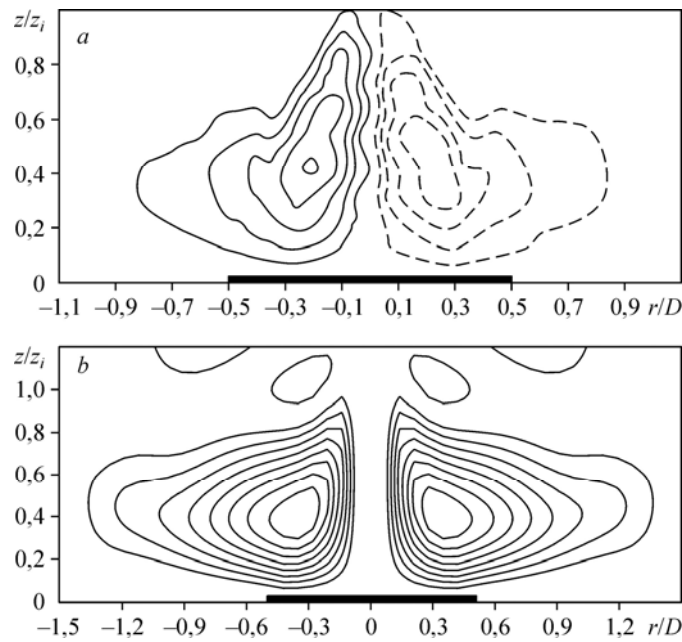


Рис. 3. Картины линий тока над островом тепла.
 Эксперимент [1] (a) и расчет (RANS приближение) (b)
 при $H_0 = 0,65 \text{ вт/см}^2$, $Fr = 0,077$, $Re = 8280$, $(\partial T/\partial z)_a = 0,5 \text{ }^\circ\text{C/см}$.

На рис. 4 представлены профили радиальной скорости. Вблизи поверхности скорость потока, натекающего с периферии острова тепла, возрастает в направлении к центру, достигая максимума, примерно, при $r/D \approx 0,25$, убывая затем до нуля в центре острова тепла. Скорость оттекающего потока наверху возрастает с удалением от центра, достигая максимума при $r/D \approx 0,25$.

На рис. 5 показано наблюдаемое в эксперименте и вычисленное распределения вертикальной скорости поперек факела на различных высотах от источника тепла. Ширина области восходящего потока, приближенно, постоянна в интервале высот $z/z_i = 0,2-0,6$. На равновесной высоте ($z/z_i \approx 0,7$) наблюдается стационарная волна. Это является следствием превышения термическим факелом его равновесной высоты в устойчиво стратифицированной окружающей среде, что можно видеть на рис. 6, где показаны вычисленные векторное поле скорости и изотермы температурного поля. Верхняя часть факела приобретает форму «шляпы», как и в квазиустановившемся состоянии на теневой фотографии рис. 1. Эффект возвышения центральной части факела (swelling) будет рассматриваться ниже, в разделе 5.2.

Структура турбулентности теплового факела представлена на рис. 7 распределениями среднеквадратичных флуктуаций горизонтальной $\left(\sigma_u = \left(\overline{u^2} \right)^{1/2} / w_D \right)$ и вертикальной $\left(\sigma_w = \left(\overline{w^2} \right)^{1/2} / w_D \right)$ турбулентных скоростей в центре факела. Данные лабораторных измерений и результаты численного моделирования показывают, что большие значения σ_u/w_D и σ_w/w_D внутри перемешанного слоя быстро убывают с ростом высоты выше слоя вовлечения ($z > z_i$). Как измеренный, так и вычисленный профили σ_w/w_D имеют максимум вблизи верхней границы перемешанного слоя ($z/z_i \approx 1$) σ_u/w_D . Область вычисленного максимального значения σ_u/w_D простирается по горизонтали дальше

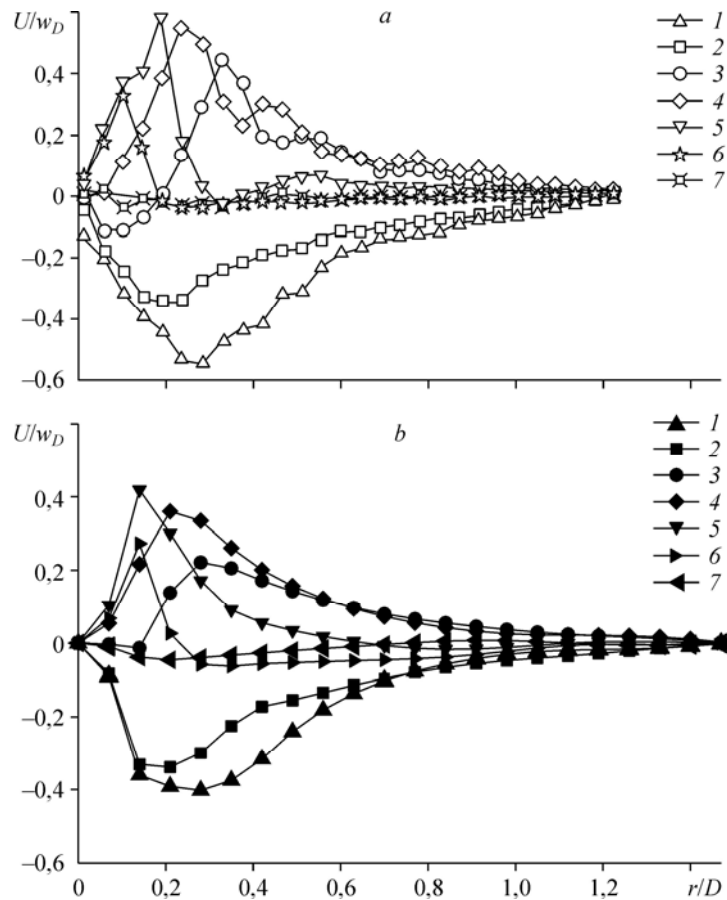


Рис. 4. Профили горизонтальной (радиальной) средней скорости U на различных высотах над островом тепла.

Эксперимент [1] (a) и расчет (RANS-приближение) (b)

при $H_0 = 0,65 \text{ Вт/см}^2$, $Fr = 0,077$, $Re = 8280$, $(\partial T/\partial z)_a = 0,5 \text{ }^\circ\text{C/см}$;

a — $z/z_i = 0,05$ (1), 0,26 (2), 0,47 (3), 0,68 (4), 0,89 (5), 1,11 (6), 1,32 (7),

b — $z/z_i = 0,06$ (1), 0,3 (2), 0,6 (3), 0,75 (4), 0,97 (5), 1,12 (6), 1,32 (7).

максимального значения σ_w/w_D вследствие горизонтального дивергентного течения, вызываемого устойчивой стратификацией в верхней части факела. В работе [1] отмечалось, что конечные размеры экспериментальной установки все же оказывали влияние на циркуляцию, подавляя горизонтальное движение и, таким образом, понижая уровень значений σ_u/w_D .

Представленные результаты вычисления турбулентной структуры теплового факела показывают, что в рассматриваемой задаче простые параметризации турбулентных потоков импульса и тепла (7), (9), (10) не только правильно описывают характерные особенности распределений σ_u/w_D и σ_w/w_D , но и удовлетворительно отражают их анизотропный характер.

На рис. 8 представлено распределение турбулентной скорости трения $u_*(r, z_1)$ в зависимости от радиальной координаты r для квазиустановившегося состояния турбулентной циркуляции над островом тепла. Результаты вычисления по формулам (19)–(22) показаны для параметра шероховатости $z_0 = 0,01 \text{ см}$. Вне острова тепла ($r/D > 0,5$) при устойчивой стратификации окружающей среды ($\partial T/\partial z = 0,5 \text{ C/см}$) скорость трения мало отличается от скорости трения для нейтральных условий ($Ri = 0$).

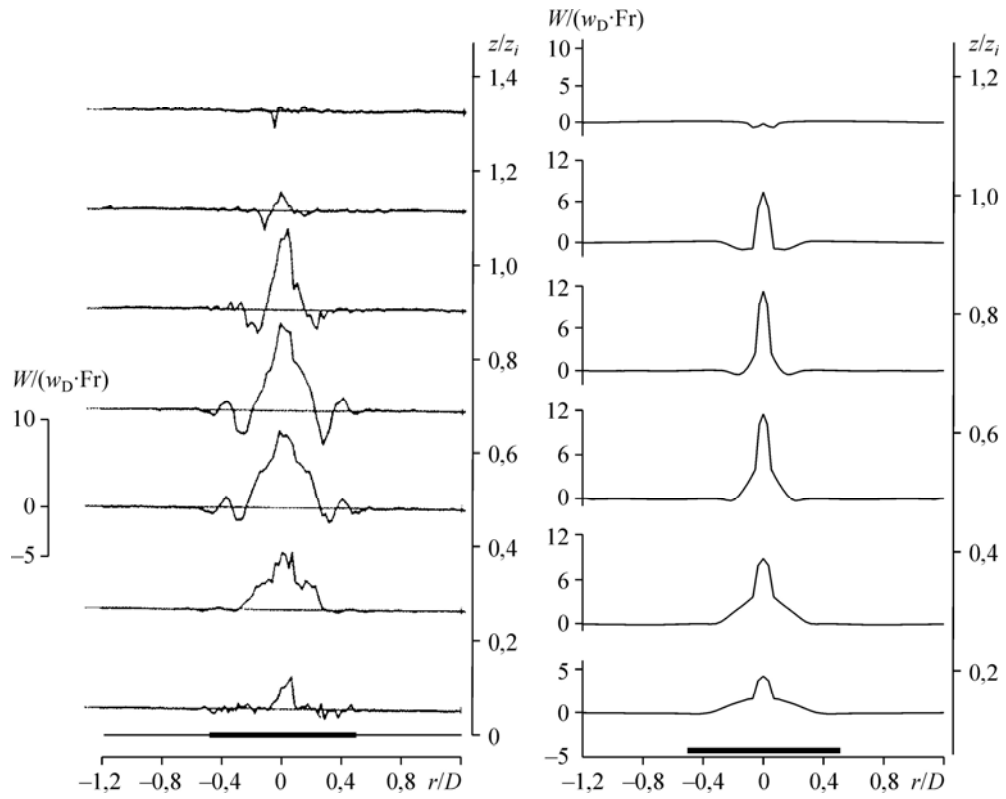


Рис. 5. Нормализованная вертикальная скорость $W/(w_D \cdot Fr)$ над источником тепла. Слева — эксперимент [1], справа — расчет (RANS-приближение); стационарная волна фиксируется на равновесной высоте ($z/z_i \approx 0,7$) вследствие превышения центральной части факела (см. рис. 6).

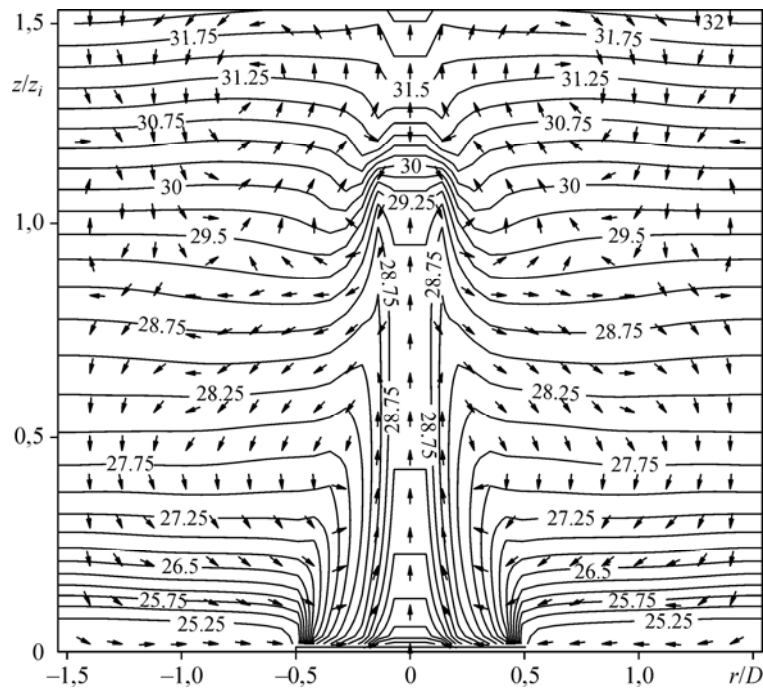


Рис. 6. Картина векторного поля скорости и поля изотерм над источником тепла в квазиустановившемся состоянии, полученная в результате настоящих вычислений.

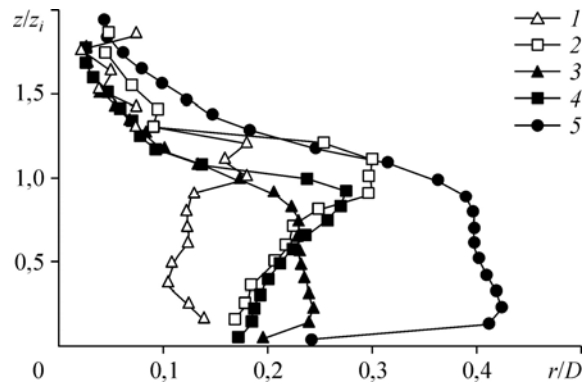


Рис. 7. Распределения горизонтальной (σ_u/w_D) и вертикальной (σ_w/w_D) дисперсий турбулентной скорости на оси факела ($r/D = 0$) над островом тепла при $H_0 = 0,65 \text{ Вт/см}^2$, $Fr = 0,077$, $Re = 8280$, $(\partial T/\partial z)_a = 0,5 \text{ }^\circ\text{C/см}$.

1, 2 — эксперимент [1], 3, 4 — вычисление по трехпараметрическому RANS-приближению,

5 — вычисленное распределение интенсивности турбулентности $\sqrt{u_i u_i}$;

1 — $\langle u^2 \rangle^{1/2}/w_D$, $r/D = 0$ [1], 2 — $\langle w^2 \rangle^{1/2}/w_D$, $r/D = 0$ [1], 3 — $\langle u^2 \rangle^{1/2}/w_D$, $r/D = 0$, 4 — $\langle w^2 \rangle^{1/2}/w_D$, $r/D = 0$, 5 — $(2E)^{1/2}$.

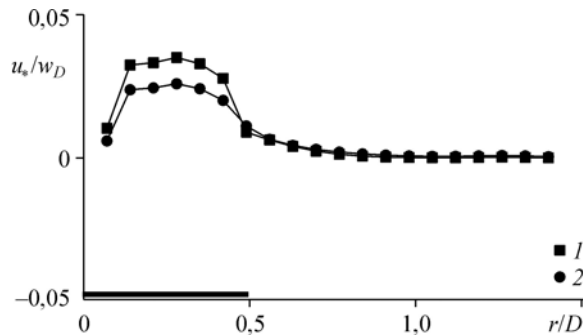


Рис. 8. Турбулентная скорость трения u_* вблизи поверхности на высоте $z = z_i$ как функция радиальной координаты r в квазиустановившемся состоянии турбулентной циркуляции над островом тепла (отмечено толстой черной линией на оси абсцисс).

1 — RANS-вычисление для стратифицированной среды,

2 — вычисление для нейтрально стратифицированной среды.

5.2. Поле температуры

Вертикальные профили безразмерной температуры (рис. 9) указывают на наличие области сильной положительной плавучести в нижней части факела и области слабой отрицательной плавучести вблизи высоты перемешивания ($z/z_i \approx 1$). Лабораторные измерения, как и натурные наблюдения, фиксируют универсальную форму безразмерного вертикального распределения температуры, не зависящую от чисел Re и Fr . На рис. 10 показаны измеренные в лабораторном эксперименте (рис. 10a) и вычисленные (рис. 10b) вертикальные распределения температуры над островом тепла. Данные измерений, приведенные на рис. 10a, соответствуют «сильной» стратификации (случай II) на момент времени, равный 8 минутам. Результаты вычислений, представленные на рис. 10b, соответствуют тем же условиям. Вычисленные вертикальные распределения температуры при $r/D = 0$ и $r/D = 0,20$ подобны измеренным значениям и указывают на хорошее перемешивание в нижней и центральной части факела. Такой характер распределения

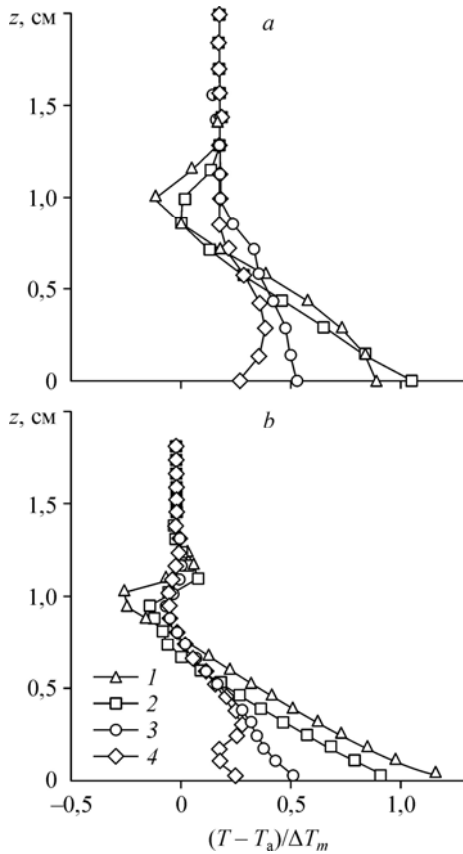


Рис. 9. Нормализованные профили температуры в различных сечениях над островом тепла.
 $H_0 = 1,81 \text{ Вт/см}^2$, $Fr = 0,088$, $Re = 4500$, $(\partial T/\partial z)_a = 1,4 \text{ }^\circ\text{C/см}$;
 эксперимент [1] (a) и расчет (b)
 при $r/D = 0$ (1), 0,2 (2), 0,4 (3), 1,0 (4).

температуры с высотой относится к тем реальным ночным планетарным пограничным слоям, в которых преобладают неустойчивые (конвективные) условия, возникающие вследствие восходящего потока тепла от урбанизированной поверхности, и небольшие скорости движения окружающего воздуха. В отсутствие сильного потока тепла, направленного вверх, или значительных скоростей движения окружающего воздуха приближенно нейтральные или слегка устойчивые условия могут преобладать внутри городского пограничного слоя. На рис. 10a и 10b видно, что профили температуры внутри факела имеют характерное «вздутие»: температура внутри факела оказывается ниже температуры вне его на той же высоте, что указывает на область отрицательной плавучести, возникающей из-за

возвышения факела в центре. Это возвышение связано с эффектом перекрещивания, обнаруженным в вертикальных профилях температуры город–сельская местность. Высота возвышения максимальна на оси факела и уменьшается с увеличением расстояния от его центра. Такой характер вертикального распределения температуры соответствует шпирен-фотографии теплового факела в лабораторном эксперименте на рис. 1: факел имеет куполообразную верхнюю часть в форме «шляпы» (см. также рис. 6).

Рис. 10. Профили температуры в различных сечениях над островом тепла.
 $H_0 = 1,81 \text{ Вт/см}^2$, $Fr = 0,088$, $Re = 4500$,
 $(\partial T/\partial z)_a = 1,4 \text{ }^\circ\text{C/см}$; эксперимент [1] (a)
 и расчет (b) при $r/D = 0$ (1), 0,2 (2), 0,4 (3),
 1,0 (4); начальный профиль (5).

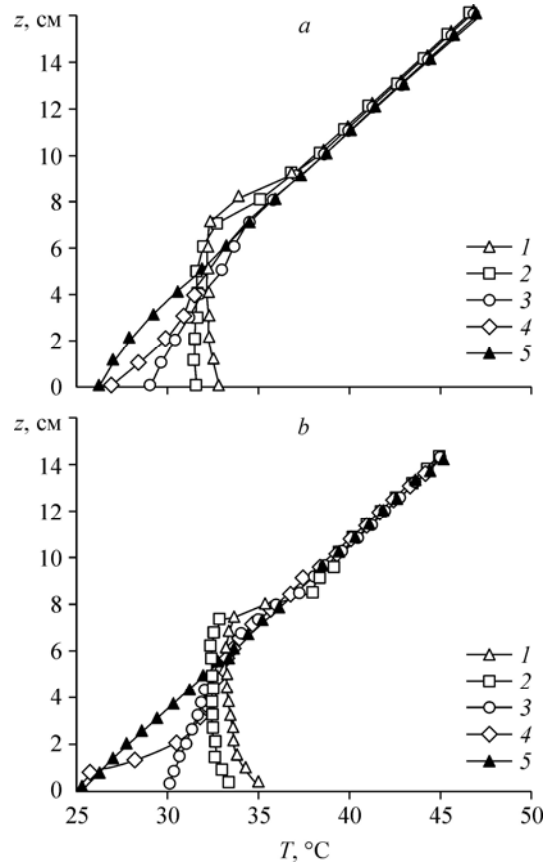


Рис. 11. Вертикальный профиль дисперсии температурных турбулентных флуктуаций над островом тепла на оси факела ($r/D = 0$).

$H_0 = 1,81 \text{ Вт/см}^2$, $Fr = 0,088$, $Re = 4500$,
 $(\partial T/\partial z)_a = 1,4 \text{ }^\circ\text{C/см}$; 1 — эксперимент [1],
 2 — результаты вычисления в RANS-приближении.

Турбулентная структура температурного поля представлена на рис. 11 распределением среднеквадратичных флуктуаций σ_T/T_D , где

$T_D = H_0 / (\rho c_p w_D)$ — конвективный масштаб температурного поля.

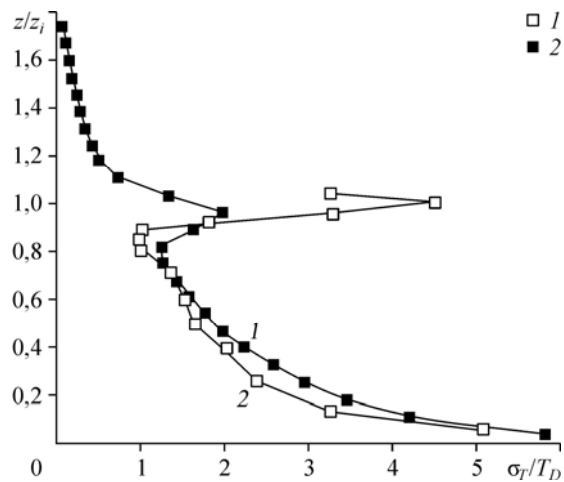
Профиль имеет характерный вид с убыванием от максимального значения вблизи поверхности до минимального значения при $z/z_i \approx 0,85$ как в эксперименте, так и в RANS-приближении с вычисляемыми из уравнений баланса параметрами $E = (1/2)\overline{u_i u_i}$, ε и $\overline{\theta^2}$. Второй максимум вблизи слоя вовлечения ($z/z_i \approx 1$) обусловлен большим градиентом скорости генерации $\overline{\theta^2}$, что подтверждается вертикальным распределением температуры на рис. 9 и 10. Различие в профилях дисперсии температуры в верхней части перемешанного слоя ($z/z_i \approx 1$) связано с известным дефектом использования упрощенной, градиентного типа, аппроксимации процессов турбулентной диффузии (третьих моментов термогидродинамических полей) в RANS-приближении моделирования турбулентности с замыканием на уровне вторых моментов.

Заключение

Сформулирована математическая модель городского острова тепла. Описание турбулентности теплового факела в RANS-приближении с включением в качестве искомым моментов термогидродинамических полей второго порядка позволяет воспроизвести структурные особенности проникающей турбулентной конвекции над островом тепла, включая такие тонкие эффекты, как перекрещивание вертикальных профилей температуры теплового факела с образованием области отрицательной плавучести, свидетельствующей о развитии куполообразной формы верхней части факела в виде «шляпы» (рис. 1).

Полученные значения вертикальной дисперсии турбулентной скорости удовлетворительно согласуются с опытными данными, в то время как вычисленные значения радиальной дисперсии турбулентной скорости превосходят экспериментальный аналог в пределах слоя перемешивания ($0 < z/z_i \leq 1$), что может быть связано с влиянием вертикальных стенок лабораторной установки [1], воздействие которых в квазиустановившемся состоянии, вероятно, подавляло горизонтальное движение, понижая уровень горизонтальной дисперсии турбулентной скорости.

В рассматриваемой задаче простая модель градиентной диффузии для турбулентных потоков не только правильно описывает характерные особенности распределений вертикальной и горизонтальной дисперсий турбулентной скорости, но и удовлетворительно отражает их анизотропный характер.



В приложении приводятся уравнения баланса для величин E , ε и $\overline{\theta^2}$ в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rUE) + \text{Fr} \frac{\partial}{\partial z} (WE) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\text{Re}^{-1} + \frac{K_m}{\sigma_E} \right] \frac{\partial E}{\partial r} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ r \left[\text{Re}^{-1} + \frac{K_m}{\sigma_E} \right] \frac{\partial E}{\partial z} \right\} + P + G - \varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rU\varepsilon) + \text{Fr} \frac{\partial}{\partial z} (W\varepsilon) - \frac{1}{r} \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\text{Re}^{-1} + \frac{K_m}{\sigma_\varepsilon} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right\} + \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ r \left[\text{Re}^{-1} + \frac{K_m}{\sigma_\varepsilon} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right\} \right\rangle = -\Xi, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где $P = \left(2K_m \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{3} E \right) \frac{\partial U}{\partial r} + \left(2K_m \text{Fr} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2}{3} E \right) \text{Fr} \frac{\partial W}{\partial z} + K_m \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \text{Fr} \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2$ — генерация кинетической энергии турбулентности за счет сдвига скорости, $G = \beta g \overline{w\theta}$ — генерация кинетической энергии турбулентности за счет работы флуктуирующей силы плавучести, σ_E и σ_ε — турбулентные числа Прандтля ($\sigma_E = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$).

В функцию

$$\Xi = \frac{1}{2} \Xi_0 \frac{\varepsilon^2}{E} + \frac{1}{2} \Xi_1 \frac{\varepsilon}{E} (P + G) + \Xi_2 \left[\text{Fr}^{-1} \cdot \overline{u\theta} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{w\theta} \frac{\partial W}{\partial z} \right] \quad (\text{A.3})$$

по сравнению с её стандартным представлением [19] в виде суммы членов линейных относительно среднего сдвига скорости $\partial U_i / \partial x_j$ вектора плавучести βg_i включен квадратичный член с коэффициентом Ξ_2 для учета эффектов взаимодействия между средним сдвигом скорости и анизотропией термического поля, в том числе для ночного и переходного периодов планетарного пограничного слоя [20]. Воздействие же среднего сдвига скорости и плавучести учитывается членами первого порядка в (A.3). Коэффициенты в (A.3) имеют численные значения, отобранные при решении различных задач планетарного пограничного слоя [20]: $\Xi_0 = 3,8$, $\Xi_1 = 2,4$, $\Xi_2 = 0,3$.

Уравнение баланса для дисперсии температурных флуктуаций в замкнутом виде запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rU\overline{\theta^2}) + \text{Fr} \frac{\partial}{\partial z} (W\overline{\theta^2}) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[c_{\theta 2} \frac{E}{\varepsilon} \overline{\theta^2} \right] \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial r} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ r \left[c_{\theta 2} \frac{E}{\varepsilon} \overline{w^2} \right] \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial z} \right\} - 2\overline{u\theta} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - 2\overline{w\theta} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\varepsilon}{E} \overline{\theta^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

здесь $R = \tau_\theta / \tau = (1/2) \overline{\theta^2} / \varepsilon_\theta / (E/\varepsilon) = 0,6$ [11], $c_{\theta 2} = 0,11$ [10].

Список литературы

1. Lu J., Arya P., Snyder W.H., Lawson R.E. A laboratory study of the urban heat island in a calm and stably stratified environment. Part I, II // J. Appl. Meteor. 1997. Vol. 36, No. 10. P. 1377–1402.
2. Willis G.E., Deardorff J.W. A laboratory model of the unstable planetary boundary layer // J. Atmos. Sci. 1974. Vol. 31. P. 1297–1307.
3. Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И. Трехпараметрическая модель турбулентности для атмосферного пограничного слоя над урбанизированной поверхностью // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42, No. 4. P. 476–494.
4. Byun D.W., Araya S.P.S. A two-dimensional mesoscale numerical model an urban mixed layer. I. Model formulation, surface energy budget, and mixed layer dynamic // Atmospheric Environment. 1990. Vol. 24A, No. 4. P. 829–844.
5. Pielke R.A. Mesoscale meteorological modeling. 2nd edition. Academic Press, 2002. 676 p.
6. Курбацкий А.Ф. Моделирование нелокального турбулентного переноса импульса и тепла. Новосибирск: Наука, 1988. 240 с.
7. Speziale C.G. Modeling of turbulent transport equations // Simulation and Modeling of Turbulent Flows / Eds. T.B. Gatski, M.Y. Hussaini, J.L. Lumley. Oxford University Press, 1996. P. 185–242.
8. Cheng Y., Canuto V.M., Howard A.M. An improved model for the turbulent PBL // J. Atmos. Sci. 2002. Vol. 59, No. 9. P. 1550–1565.
9. Sommer T.P., So R.M.C. On the modeling of homogeneous turbulence in a stably stratified flow // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7, No. 11. P. 2766–2777.
10. Jin L.H., So R.M.C., Gatski T.B. Equilibrium states of turbulent homogeneous buoyant flows // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 482. P. 207–233.
11. Beguier C., Dekeyser I., Launder B.E. Ratio of scalar and velocity dissipation time scales in shear flow temperature // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21, No. 3. P. 307–310.
12. Panofsky Y.A., Tennekes Y., Lenschow D.Y., Wyngaard J.C. The characteristics of turbulent velocity components in the surface layer under convective conditions // Boundary Layer Meteor. 1977. Vol. 11. P. 353–361.
13. Businger J.A., Wyngaard J.C., Izumi Y., Bradley E.F. Flux profile relationship in the atmospheric surface layer // J. Atmos. Sci. 1971. Vol. 28. P. 181–189.
14. Louis J.-F. A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere // Boundary-Layer Meteor. 1979. Vol. 17, No. 2. P. 187–202.
15. Мони́н А.С., Ягло́м А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. СПб: Гидрометеоздат, 1992. 694 с.
16. Andre J.C., de Moor G., Laccarere F., Therry G., du Vachat R. Modeling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer // J. Atmos. Sci. 1979. Vol. 35. P. 1861–1885.
17. Duynkerke P.G. Application of the ϵ - ϵ turbulence closure model to the neutral and stable atmospheric boundary layer // J. Atmos. Sci. 1988. Vol. 45, No. 5. P. 865–879.
18. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
19. Земан О., Ламли Дж.Л. Эффекты плавучести в турбулентных пограничных слоях: исследование замыкания второго порядка // Турбулентные сдвиговые течения. М.: Машиностроение, 1982. С. 310–332.
20. Andren A.A.A. TKE dissipation model for the atmospheric boundary layer // Boundary Layer Meteor. 1992. Vol. 56. P. 207–221.

*Статья поступила в редакцию 27 декабря 2015 г.,
после доработки — 12 января 2016 г.*