

УДК 539.374

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ВЕРШИНЕ
РАЗРЕЗА ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

E. I. Шемякин

(Новосибирск)

В анализе напряженно-деформированного состояния горного массива в окрестности разреза с помощью упругой модели рассматриваются решения, описывающие сколь угодно большие значения напряжений и деформаций в вершине разреза (решение с особенностью). Вместо упругой модели, которая приводит к таким решениям, можно рассмотреть упругопластическую модель, при правильном выборе которой можно ожидать более точного описания реальных значений напряжений и деформаций в вершине разреза.

В этой задаче, для которой известно точное решение для упругопластической модели в напряжениях [1], необходимо вычислить деформации.

Приведенное точное решение описывает напряженно-деформированное состояние без особенностей и дает интерпретацию предельных напряжений (усилий) как усилий сцепления, препятствующих раскрытию разреза. Это позволяет предложить критерий прочности материала при сдвиговых деформациях.

Решение может быть пригодным при оценке размеров очага и энергии при изучении горных ударов или мелкофокусных землетрясений.

1. Пусть упругая среда разрезана по полуплоскости xz ($x < 0$) так, что на берегах разреза отлична от нуля только компонента перемещения W (проекция на ось z), которая принимает равные по величине и противоположные по знаку значения на берегах разреза. При $x > 0$ на оси $y = 0$ перемещение равно нулю, ось y перпендикулярна плоскости разреза, начало координат проходит через вершину разреза [1].

Деформации ε_{xz} , ε_{yz} связаны с перемещением

$$(1.1) \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y}$$

и определяют состояние чистого сдвига; главные деформации

$$(1.2) \quad \varepsilon_1 = \Gamma / 2, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -\Gamma / 2, \quad \Gamma = \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}$$

где Γ — главный сдвиг на площадках, проходящих через второе главное направление

$$(1.3) \quad \varepsilon_{xz} / \varepsilon_{yz} = -\operatorname{tg} \psi(x, y)$$

ψ — угол второго главного направления с осью x ; второе главное направление перпендикулярно оси z .

Главные напряжения

$$(1.4) \quad \sigma_1 = T, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -T, \quad T = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$$

где T — максимальное касательное напряжение в точке, действующее на

площадке, проходящей через второе главное направление тензора напряжений

$$(1.5) \quad \tau_{xz} / \tau_{yz} = - \operatorname{tg} \varphi (x, y)$$

φ — угол второго главного напряжения с осью x .

В случае упругого деформирования из уравнения равновесия

$$(1.6) \quad \partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y = 0$$

и (1.1), а также из закона Гука

$$(1.7) \quad \tau_{xz} = \mu \varepsilon_{xz}, \quad \tau_{yz} = \mu \varepsilon_{yz}$$

(μ — модуль сдвига) следует, что W, τ_{xz}, τ_{yz} — гармонические функции в плоскости xy с разрезом вдоль отрицательной полуоси y .

При упругом деформировании главные направления тензоров напряжений и деформаций в изотропном теле совпадают.

2. Рассмотрим решение упругой задачи

$$(2.1) \quad W(x, y) = A \sqrt{r} \sin \theta / 2, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg y / (x-a)$$

где A, a — постоянные.

Гармоническая функция $W(x, y)$ описывает упругое перемещение точек среды вдоль оси z ; вершина разреза перенесена в точку $(a, 0)$ в плоскости xy (фиг. 1). Решение (2.1) отвечает следующим краевым условиям: при $y = 0$ задано граничное значение гармонической функции W , при $x < a$ задана параболическая форма разреза

$$(2.2) \quad \begin{aligned} W(x, 0) &= A \sqrt{r}, \quad y = +0 \\ W(x, 0) &= -A \sqrt{r}, \quad y = 0 \end{aligned}$$

при $x > a$ перемещение $W(x, 0) = 0$.

Напряжения и деформации, соответствующие (2.1)

$$(2.3) \quad \tau_{xz} = \mu \varepsilon_{xz} = -\frac{A \mu}{2 \sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \tau_{yz} = \mu \varepsilon_{yz} = \frac{A \mu}{2 \sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

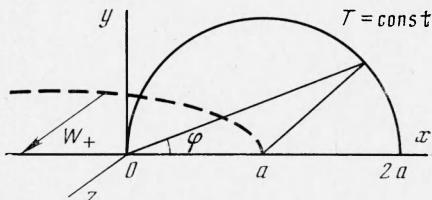
указывают на интегрируемую особенность в точке $(a, 0)$ и на следующие граничные значения на оси $y = 0$: $\tau_{xz} = 0$ при $x > a$ и $\tau_{xz} \neq 0$ и принимает противоположные по знаку, но равные по величине значения на берегах разреза; $\tau_{yz} = 0$ на берегах разреза, но $\tau_{yz} \neq 0$ при $x > a$.

Отметим, что согласно [1, 2] величина максимального касательного напряжения T постоянна на окружностях $r = \text{const}$. В частности, при $r = a$

$$(2.4) \quad T = A \mu / 2 \sqrt{a}$$

Вычислим разрыв перемещения при $x = 0, y = 0$ и величины (2.3) там же

$$(2.5) \quad W_+ - W_- = 2A \sqrt{2}$$



Фиг. 1

Знаки плюс и минус относятся к верхнему и нижнему берегам разреза, величина (2.5) определяет разрыв перемещений на разрезе при $r = a$

$$(2.6) \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} = \begin{cases} A/2\sqrt{a}, & y = +0, \quad x \leq 0 \\ A/2\sqrt{a}, & y = -0, \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Свойство упругого решения, отмеченное в (2.4), позволяет рассмотреть упругопластическую задачу. Если принять за предел упругости величину $T = T_e = \text{const}$

$$(2.7) \quad T_e = \mu \Gamma_e$$

где Γ_e — предельное упругое значение главного сдвига, и положить радиус пластической зоны равным a , можно заменить упругое распределение напряжений и деформаций внутри круга радиуса упругопластическим полем напряжений и деформаций.

Найдем A из (2.4) и (2.7)

$$(2.8) \quad A = 2\Gamma_e \sqrt{a} = 2T_e \mu^{-1} \sqrt{a}$$

и введем в соответствии с (1.5)

$$(2.9) \quad \tau_{xz} = -T_e \sin \varphi, \quad \tau_{yz} = T_e \cos \varphi$$

Величины (2.9) всюду внутри области $r \leq a$ удовлетворяют условиям plasticности. Из уравнения равновесия (1.6) следует уравнение для $\varphi(x, y)$:

$$(2.10) \quad \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

имеющее характеристики

$$(2.11) \quad dy/dx = \operatorname{tg} \varphi$$

Из непрерывности напряжений на упругопластической границе следует:

$$(2.12) \quad \operatorname{tg} \varphi|_{r=a} = \operatorname{tg} \theta_0 / 2, \quad \theta_0 = \arctan \frac{dy}{dx}|_{r=a}$$

или

$$(2.13) \quad \varphi|_{r=a} = \frac{1}{2}\theta_0|_{r=a}$$

Из (2.11) и (2.13) следует, что напряжения описывается центрированным полем — веером прямолинейных характеристик, проходящих через начало координат и имеющих угол наклона $\theta_0/2$. При этом напряжения (2.9)

$$(2.14) \quad \tau_{xz} = -T_e y (x^2 + y^2)^{-1/2}, \quad \tau_{yz} = T_e x (x^2 + y^2)^{-1/2}$$

удовлетворяют уравнению равновесия, условию plasticности и граничным условиям на окружности $r = a$.

На оси $y = 0$ в пластической области (фиг. 2) компонента $\tau_{xz} = 0$, а $\tau_{yz} = T_e$ вплоть до особой точки $(x = 0, y = 0)$.

В этой точке при изменении φ в диапазоне от $-\pi/2$ до $\pi/2$ (два поддиапазона $(-\pi/2, 0)$ и $(\pi/2, 0)$ — два смыкающихся непрерывно веера характеристик) напряжение τ_{xz} изменяется от T_e до $-T_e$, напряжение τ_{yz} обращается в нуль в концах промежутка $(-\pi/2, \pi/2)$. При

переходе от одной характеристики к другой напряжения получают приращения

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \Delta t_{xz} &= -T_e \Delta \varphi \cos \varphi \\ \Delta \tau_{yz} &= -T_e \Delta \sin \varphi, \quad \Delta \tau_{xz} / \Delta \tau_{yz} = \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned}$$

так что вторые главные направления тензоров напряжений и приращений напряжений ортогональны.

В точках пластической зоны сохраняется главное направление тензора напряжений, которое имело место при наступлении пластического состояния; нагружение является «простым» [3]. В этих условиях изотропные модели деформационного типа (и типа теории течения) в рассматриваемой задаче приводят к следствию — непрерывными оказываются не только перемещения на упругопластической границе, но и компоненты тензора деформации. В результате получаем решение с повышенной гладкостью в окрестности упругопластической границы, которое не следует из постановки задачи.

3. При определении деформаций в пластической зоне примем следующую модель упругопластического тела:

1) при развитии пластических деформаций сдвига $\Gamma_e \ll \Gamma \ll \Gamma_c$ будем считать соосными тензоры напряжений и деформаций (поскольку в элементе сохраняется напряжение площадки скольжения);

2) при достижении $\Gamma = \Gamma_c$ может произойти разрушение в некоторой области, так что можно отказаться от условия соосности, заменив его всюду в области разрушения условием $\Gamma = \Gamma_c$ [4]. В соответствии с моделью рассмотрим область $r \leq a$, в которой может реализоваться $\Gamma \geq \Gamma_e$. Из условия соосности

$$(3.1) \quad \varepsilon_{xz} / \varepsilon_{yz} = \tau_{xz} / \tau_{yz}$$

и (1.2) и (2.14) следует уравнение для [5]:

$$(3.2) \quad x \partial \Gamma / \partial x + y \partial \Gamma / \partial y + \Gamma = 0$$

Можно установить, что это уравнение справедливо для компонент деформаций $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ в пластической области. Интегрируя уравнение (3.2) и подчиняя общее решение условию $\Gamma = \Gamma_e$ при $r = a$ (или на линии)

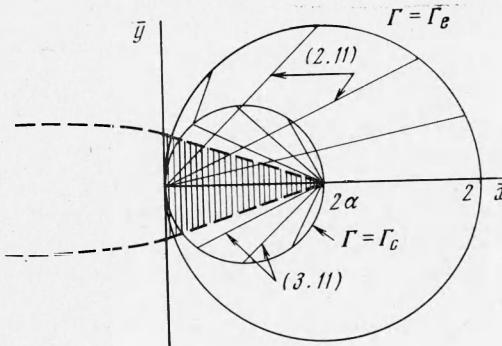
$$(3.3) \quad (x^2 - 2ax + y^2 = 0)$$

находим

$$(3.4) \quad \Gamma = 2\Gamma_e x / (x^2 + y^2), \quad x = x/a, \quad y = y/a$$

Компоненты деформации $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ в пластической области имеют вид

$$(3.5) \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\Gamma y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{2\Gamma_e \bar{x} y}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{3/2}}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{2\Gamma_e \bar{x}^2}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{3/2}}$$



Фиг. 2

Непосредственной постановкой можно убедиться, что компоненты деформации удовлетворяют условию совместности и краевым условиям на упругопластической границе.

Вычисляя перемещения в пластической зоне, находим

$$dW = \varepsilon_{xz}dx \neq \varepsilon_{yz}dy = \varepsilon_{xz}dx(1 + (\varepsilon_{xz}/\varepsilon_{xz})(dy/dx))$$

или $W = \text{const} = W|_{r=a}$ вдоль характеристик (2.11), вдоль которых

$$1 + (\varepsilon_{yz}/\varepsilon_{xz})(dy/dx) = 0$$

Из выражения для Γ в пластической области следует, что величина $\Gamma = \text{const}$ на окружностях

$$(3.6) \quad (\bar{x} - \Gamma_e/\Gamma)^2 + \bar{y}^2 = (\Gamma_e/\Gamma)^2$$

Вдоль этих окружностей

$$\Gamma = 2\Gamma_e/\bar{x}, \quad 0 < \bar{x} < 2$$

Отсюда следует, что при переходе от $\Gamma = \Gamma_e$ к $\Gamma > \Gamma_e$, точка максимальных значений Γ находится на биссектрисе $y = x$. Если исследовать изменение Γ вдоль линии $y = \text{const}$ в пластической зоне, то можно установить, что Γ изменяется от $\Gamma = \Gamma_e$ до максимального достигаемого значения Γ на этой линии при $y = x$, а затем убывает до $\Gamma = \Gamma_e$.

Это означает, что если рассматривать задачу о движущемся разрезе, то на линии $y = x$ необходимо перейти к уравнениям для области разгрузки [6].

Если не вводить область, в которой $\Gamma = \Gamma_c$, то решение (3.4) описывает особенность в точке $x = 0, y = 0$, вблизи которой главный сдвиг (например, при $y = 0$)

$$\Gamma/\Gamma_e = 2/x$$

Поэтому введем в рассмотрение область $\Gamma = \Gamma_c$ и будем считать, что элементы среды в ней могут быть разрушены. Из (3.4) или (3.6) следует, что условие $\Gamma = \Gamma_c$ выполнено на окружности

$$(3.7) \quad (x - \alpha)^2 + \bar{y}^2 = \alpha^2, \quad \alpha = \Gamma_e/\Gamma_c < 1$$

Распределение напряжений всюду в области $r \leq a$, в том числе и внутри окружности (3.7), остается прежним в силу уравнения равновесия и условия пластичности (см. (2.14)). Для нахождения распределения деформаций вместе с условием совместности (1.1) будет использовано условие «разрушения» $\Gamma = \Gamma_c$ или

$$(3.8) \quad \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2} = \Gamma_e$$

Это условие замыкает систему уравнений в области разрушения вместо условия соосности (3.1) в пластической области.

Введем ($y > 0$)

$$(3.9) \quad \varepsilon_{xz} = \partial W / \partial x = \Gamma_e \cos \psi_1, \quad \varepsilon_{yz} = \partial W / \partial y$$

и из условия (1.1) получим

$$(3.10) \quad \cos \psi_1 \partial \psi_1 / \partial x + \sin \psi_1 \partial \psi_1 / \partial y = 0$$

совпадающее с (2.10) и имеющее характеристики

$$(3.11) \quad \partial y / \partial x = \operatorname{tg} \psi_1$$

Здесь $\psi_1 = \psi + \pi / 2$, т. е. характеристики (3.11) и (2.11) ортогональны в точках контура $\Gamma = \Gamma_c$, где $\varphi = \psi$ со стороны упругопластической области. На контуре $\Gamma = \Gamma_c$ должно быть выполнено условие непрерывности перемещений. На этом контуре перемещения вычислены со стороны упругопластической области. Из (3.9) следует, что $W = \text{const}$ вдоль характеристики (3.11), т. е. при $\psi_1 = \text{const}$, и $\psi_1 = \pi / 2$ ($\psi = 0$) есть линия разрыва. Эти факты позволяют построить решение для компонент деформаций в виде двух центрированных полей с общей вершиной (особой точкой) в точке $(2\alpha, 0)$ (фиг. 2).

При $y > 0$ ($\pi \geq \psi_1 > \pi / 2$) имеем

$$(3.12) \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\Gamma_c (\bar{x} - 2\alpha)}{\sqrt{(\bar{x} - 2\alpha)^2 + \bar{y}^2}}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\Gamma_c \bar{y}}{\sqrt{(\bar{x} - 2\alpha)^2 + \bar{y}^2}}$$

а при $y < 0$ ($0 \leq \psi_1 < \pi / 2$)

$$(3.13) \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\Gamma_c (\bar{x} - 2\alpha)}{\sqrt{(\bar{x} - 2\alpha)^2 + \bar{y}^2}}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\Gamma_c \bar{y}}{\sqrt{(\bar{x} - 2\alpha)^2 + \bar{y}^2}}$$

и перемещения с обеих сторон линии $y = 0$ на отрезке $0 \leq x \leq 2\alpha$

$$(3.14) \quad W = \pm \Gamma_c a \sqrt{(\bar{x} - 2\alpha)^2 + \bar{y}^2}$$

Знаки плюс и минус относятся к точкам области с ординатами $y \geq 0$ соответственно.

Можно указать следующий графический прием вычисления напряжений и деформаций в области $\Gamma_c = \text{const}$. В точку (x, y) вдоль характеристики (2.11) переносится значение напряжения с контура $r = a$, а вдоль характеристики (3.11) — значение перемещения и деформаций с контура (3.7).

На фиг. 2 указана форма, которую имеет разрез в присутствии упругопластического шарнира и с описанием возможного разрушения при достижении $\Gamma = \Gamma_c$. Так, в пластической области $\Gamma_e \leq \Gamma \leq \Gamma_c$ перемещение $W = 0$ вплоть до точки $(2\alpha, 0, \alpha < 1)$. На линии разреза интенсивность напряжений T_e . На участке $0 < x < 2\alpha$ происходит раскрытие разреза с углом при вершине, равным Γ_c , так что в начале координат величина $W_c = W_+ - W_-$ равна $4a\Gamma_e = 4\alpha\Gamma_c$. Значение этой величины может быть использовано в качестве критерия разрушения [2, 7]. Постоянство $T = T_e$ на этом участке можно интерпретировать как постоянство интенсивности сил сцепления,держивающих берега вместе до раскрытия разреза при $W = W_c$.

Построенное упругопластическое решение интересно тем, что позволяет рассмотреть закон текучести при нарушении условия соосности: вплоть до критических значений $\Gamma = \Gamma_c$ в данной задаче имеет место совпадение главных направлений тензоров напряжений и деформаций, при $\Gamma = \Gamma_c$ максимальное касательное напряжение и главный сдвиг имеют наибольшие значения на разных площадках. Это означает, что закон текучести следует представить в виде линии в пространстве T, Γ, θ , где θ — угол разности главных направлений [3].

Изучая напряженно-деформированное состояние элементов на линии $|y| = \text{const}$, можно указать для них последовательные состояния вдоль линии $|y| < a$ и обратно при переходе от элементов впереди вершины разреза $x > 0$ к элементам вблизи берегов разреза.

В модели упругопластического тела с критерием прочности $\Gamma = \Gamma_c$ можно рассмотреть наиболее простой вариант $\Gamma_e = \Gamma_c$ — идеальный «хрупкий» материал [4]. В этом случае условие $\Gamma = \Gamma_c$ достигается на окружности $r = a$ и все результаты для области «разрушения» распространяются на круг $r = a$. Это решение пригодно для медленно движущегося разреза в каждом элементе вблизи разреза ($y \leq a$), мимо которого проходит вершина разреза, имеет место следующий цикл: нагрузка по упругому закону до $\Gamma_e = \Gamma_c$ и разгрузка по упругому закону. Это решение имеет смысл при оценке размеров очага и энергии при горных ударах и землетрясениях.

Для исследования устойчивости материала в области $\Gamma = \Gamma_c$ вычислим работу приращений напряжений на приращениях деформаций [6]

$$\Delta\tau_{xz} \Delta\varepsilon_{xz} + \Delta\tau_{yz} \Delta\varepsilon_{yz} = T_e \Gamma_c \cos(\varphi - \psi) \Delta\varphi \Delta\psi$$

На границе с областью $\Gamma = \Gamma_c$ будет $\varphi = \psi$ (равновесие устойчиво), а на концах отрезка $0 < x < 2\alpha$, где $\varphi = 0$, $\psi = \pi/2$ или $\varphi = \pi/2$, $\psi = 0$ (равновесие неустойчиво). На этом основании можно сделать вывод, что для возникновения разрушения необходимо выполнение критерия $\Gamma = \Gamma_c$ в неустойчивом состоянии равновесия.

Поступила 30 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Мекклинток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. М., «Мир», 1970.
2. Костров В. Б., Никитин Л. В. Применение методов теории разрушения к изучению очагов землетрясений. В сб. «Физические основания поисков методов прогноза землетрясений». М., «Наука», 1970.
3. Христианович С. А., Шемякин Е. И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 5.
4. Шемякин Е. И. Напряженно-деформированное состояние в вершине разреза при антиплоской деформации горных пород. Физ.-техн. пробл. разр. пол. иск., 1973, № 1.
5. Машуков В. И. Об упруго-пластической деформации твердых тел и горных пород в случае антиплоской деформации. Физ.-техн. пробл. разр. пол. иск., 1973, № 2.
6. Слепян Л. И. Деформация у края растущей трещины. Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 4.
7. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі. Прикл. механіка, 1959, т. 5, № 4.