УДК 532.135 + 532.137

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: pukhnachev@gmail.com

Рассматриваются неустановившиеся движения несжимаемого вязкоупругого континуума Максвелла с постоянным временем релаксации. Так как в несжимаемой сплошной среде давление не является термодинамической переменной, а с точностью до множителя совпадает со следом тензора напряжений, то, выделяя из этого тензора шаровую часть, можно предположить, что оставшаяся часть тензора напряжений имеет нулевой след. В случае несжимаемой среды уравнения для скорости, давления и тензора напряжений образуют замкнутую систему уравнений первого порядка, имеющую как вещественные, так и комплексные характеристики, что осложняет постановку начально-краевых задач. Тем не менее удается доказать разрешимость задачи Коши в классе аналитических функций. В классах функций конечной гладкости установлена однозначная разрешимость линеаризованной задачи. Изучен класс эффективно-одномерных движений, для которых подсистема трех уравнений является гиперболической. Из результатов асимптотического анализа последней следует возможность образования разрывов в процессе эволюции решения. Общая система уравнений движения допускает бесконечномерную псевдогруппу Ли, которая содержит расширенную группу Галилея. С целью получения точных решений задач со свободными поверхностями доказана теорема об инвариантности условий на априори неизвестной свободной границе. В качестве примера приложения этой теоремы рассмотрена задача о деформации вязкоупругой полосы под действием касательных напряжений, приложенных к свободной границе. В этой задаче обнаружен масштабный эффект коротковолновой неустойчивости, вызванный отсутствием диагонального преобладания девиатора тензора напряжений.

Ключевые слова: вязкоупругая среда, несжимаемость, соотношение Максвелла, группа Галилея, задачи со свободной границей.

Введение. Модель вязкоупругой среды Максвелла является предметом многочисленных математических исследований [1–4]. На основе этой модели описываются поведение металлов под действием импульсных нагрузок и движение расплавов и растворов полимеров. Однако если в первом случае необходимо учитывать сжимаемость среды, то при исследовании течения полимеров фактор сжимаемости существенной роли не играет, поэтому поле скоростей течения можно считать соленоидальным. Данная работа посвящена изучению математических свойств несжимаемого вязкоупругого континуума Максвелла. Материальными характеристиками такой среды являются ее плотность ρ, динамическая вязкость μ и время релаксации τ. Обозначим через $\boldsymbol{v}$, p, P и D вектор скорости, давление, тензор напряжений и тензор скоростей деформаций соответственно. Далее предполагает-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00168) и в рамках программы № 14.3 Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН.

ся, что на среду не действуют внешние объемные силы или действуют внешние силы, имеющие потенциал.

Система уравнений, связывающих искомые функции, состоит из трех уравнений: скалярного уравнения неразрывности, векторного уравнения импульса и тензорного реологического соотношения. Если первые два уравнения имеют универсальный вид (см., например, [5]), то в выборе последнего уравнения имеется произвол [1, 3]. В п. **2** рассматривается проблема рационального выбора реологического соотношения для несжимаемой вязкоупругой максвелловской среды.

1. Уравнения движения. Уравнение неразрывности несжимаемой сплошной среды имеет вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.1}$$

Уравнение импульса любой сплошной среды, удовлетворяющей принципу напряжений Коши, записывается в виде

$$\rho(\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}) = \operatorname{div} P. \tag{1.2}$$

Для формулировки замыкающего реологического соотношения тензор напряжений представим в форме

$$P = -pI + S, \tag{1.3}$$

где I — единичный тензор. Предположение о несжимаемости среды позволяет сделать вывод, что давление уже не является термодинамической переменной, а возникает как реакция связи механической системы на кинематическую связь — соленоидальность поля скоростей. Физический смысл величины p в несжимаемой жидкости подробно обсуждается в работе [5], где использовано понятие среднего давления

$$\bar{p} = -(1/3) \operatorname{tr} P \tag{1.4}$$

и показано, что среднее давление $\bar{p}$ совпадает с обычным давлением p тогда и только тогда, когда связь между тензорами D и P линейна. Ниже предполагается, что линейное соотношение между этими тензорами имеет место и для релаксирующей среды, в частности для континуума Максвелла. В этом случае по аналогии с ньютоновской несжимаемой вязкой жидкостью отождествим среднее давление с обычным. Тогда из (1.3), (1.4) и равенства $p = \bar{p}$ следует, что

$$\operatorname{tr} S = 0. \tag{1.5}$$

Иными словами, тензор S является девиатором тензора напряжений P. В отличие от случая сжимаемой среды Максвелла, когда релаксационное соотношение записывается для всего тензора P [1–4], будем предполагать, что этому соотношению подчиняется лишь девиаторная часть S тензора P:

$$\tau \frac{\tilde{d}S}{dt} + S = 2\mu D. \tag{1.6}$$

Здесь $\tilde{d}/dt$ — одна из инвариантных, или объективных, производных тензора [1, 3]. Выбор такой производной неоднозначен: это может быть верхняя или нижняя конвективная производная, вращательная производная Яуманна или их комбинация. Важно, чтобы при таком выборе соотношение (1.6) являлось инвариантным относительно вращения с произвольной угловой скоростью.

О правильности сделанного предположения свидетельствуют рассуждения, в основе которых лежат результаты работ [6, 7]. В работе [6] изучалось движение по инерции вокруг своей оси вертикального цилиндра, помещенного в сосуд большого диаметра, заполненный водой. Влияние вязкости обусловливает уменьшение угловой скорости цилиндра со временем, что и наблюдалось в эксперименте. Однако оказалось, что на заключительной стадии вращения скорость вращения цилиндра изменяется немонотонно. Обнаружены затухающие колебания с периодом около получаса. В работе [7] исследовано инерционное вращение твердого диска, помещенного на свободную поверхность воды в цилиндрическом сосуде, а также обнаружен режим затухающих колебаний. Подобные режимы наблюдались и в других рабочих жидкостях. Это дает основание предполагать, что наряду с вязкостью существенным фактором, определяющим поведение воды при малых скоростях деформаций сдвига порядка 10^{-3} с$^{-1}$, является упругость. В работе [6] получена оценка модуля сдвига воды G при малых скоростях деформаций порядка 10^{-6} Н/м^2. Близкую оценку величины G можно получить при анализе результатов работы [7]. В то же время модуль всестороннего сжатия воды $K \gg G$ можно оценить, зная скорость звука, поскольку $K = \rho c^2$.

Подставляя в последнюю формулу значение $c = 1500$ м/с, получаем $K = 2{,}25 \cdot 10^9$ Н/м^2. В механике вязкоупругих сред принято считать, что время релаксации напряжений имеет порядок отношения вязкости к модулю упругости. Если время релаксаций напряжений всестороннего сжатия обозначить через τ^*, то получим оценку $\tau^* = \tau G K^{-1}$, где τ — время релаксации напряжений сдвига. Полагая $G = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ Н/м^2, $\tau = 1{,}5 \cdot 10^3$ с, имеем $\tau^* = 10^{-12}$ с. При создании модели, описывающей поведение воды и близких к ней жидкостей в условиях экспериментов [6, 7], будем считать, что напряжения сжатия релаксируют мгновенно. В несжимаемой жидкости шаровая часть тензора напряжений определяется давлением. Сказанное выше объясняет, почему в соотношение (1.6) давление не входит. Имеются основания ожидать, что излагаемая модель вязкоупругой среды Максвелла может быть использована при исследовании движения жидкостей в условиях микрогравитации, микромасштабных движений жидкостей и для описания финальной стадии приближения текучей среды к состоянию равновесия.

Рассмотрим соотношение (1.6), выбирая в качестве инвариантной производной вращательную производную Яуманна:

$$\tau\Big(\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla S - W \cdot S + S \cdot W\Big) + S = 2\mu D \qquad (1.7)$$

(W — антисимметричная часть тензора $\nabla\boldsymbol{v}$). Тогда для любого симметричного тензора S имеем

$$\operatorname{tr}(S \cdot W - W \cdot S) = 0.$$

В силу уравнения (1.1) $\operatorname{tr} D = 0$. Из этого соотношения и равенства (1.6) для функции $\operatorname{tr} S$ получаем уравнение

$$\tau\Big(\frac{\partial \operatorname{tr} S}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \operatorname{tr} S\Big) + \operatorname{tr} S = 0.$$

Если в момент $t = 0$ $\operatorname{tr} S = 0$, то в силу последнего уравнения $\operatorname{tr} S = 0$ при любых t.

Запишем равенство (1.6) с верхней конвективной производной:

$$\tau\Big(\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla S - \nabla\boldsymbol{v} \cdot S - S \cdot \nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\Big) + S = 2\mu D. \qquad (1.8)$$

Вычисляя след от обеих частей (1.8), получаем уравнение

$$\tau\Big(\frac{\partial \operatorname{tr} S}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \operatorname{tr} S\Big) + \operatorname{tr} S = 2\tau D : S.$$

Последнее соотношение совместимо с (1.5) только при выполнении условия $D : S = 0$, что приводит к переопределенности уравнений движения. Тот же результат получается, если в равенстве (1.6) в качестве $\tilde{d}/dt$ принять нижнюю конвективную производную. Таким образом, равенства (1.5), (1.6) будут согласованы лишь в случае выбора яуманновской объективной производной.

Итак, получена замкнутая система уравнений (1.1)–(1.3), (1.5), (1.7) для функций $\boldsymbol{v}$, p, S. В общем случае трехмерного движения эта система содержит девять квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, а в случае плоского движения их количество уменьшается до пяти.

2. Энергетическое тождество. Ниже $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ обозначает материальный объем, а Σ_t — ограничивающую его поверхность. Уравнение (1.2) умножим скалярно на вектор $\boldsymbol{v}$, а в равенстве (1.6) после деления на 2μ выполним свертку с тензором S. Полученные соотношения сложим и проинтегрируем по области Ω_t. В результате имеем энергетическое тождество

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t}\Big(\frac{1}{2}\,\rho|\boldsymbol{v}|^2+\frac{\tau}{4\mu}\,S:S\Big)\,d\Omega=\int\limits_{\Sigma_t}\boldsymbol{v}\cdot(-p\boldsymbol{n}+S\cdot\boldsymbol{n})\,d\Sigma-\frac{1}{2\mu}\int\limits_{\Omega_t}S:S\,d\Omega. \tag{2.1}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ_t. Из соотношения (2.1) следует, что если Σ_t — твердая непроницаемая и неподвижная поверхность, то на ней выполнено условие прилипания

$$\boldsymbol{v}=0, \qquad x\in\Sigma_t, \quad t>0, \tag{2.2}$$

если Σ_t — свободная граница, то на ней выполнены кинематическое и динамическое условия

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=V_n, \qquad x\in\Sigma_t, \quad t>0; \tag{2.3}$$

$$-(p-p_0)\boldsymbol{n}+S\cdot\boldsymbol{n}=2\sigma H\boldsymbol{n}, \qquad x\in\Sigma_t, \quad t>0. \tag{2.4}$$

Здесь V_n — скорость перемещения поверхности Σ_t в направлении внешней нормали; p_0 — атмосферное давление; H — средняя кривизна поверхности Σ_t; σ — коэффициент поверхностного натяжения. Если выполнено условие (2.2), то в тождестве (2.1) поверхностный интеграл исчезает. Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t}\Big(\frac{1}{2}\,\rho|\boldsymbol{v}|^2+\frac{\tau}{4\mu}\,S:S\Big)\,d\Omega=\frac{1}{2\mu}\int\limits_{\Omega_t}S:S\,d\Omega. \tag{2.5}$$

То же происходит при выполнении на этой поверхности условий (2.3), (2.4). Тождество (2.5) означает, что в обоих случаях подынтегральный член в его левой части монотонно убывает со временем и остается неизменным только при $S=0$. Этот случай соответствует движению максвелловской среды как недеформируемого твердого тела.

Подынтегральные выражения в левых частях равенств (2.1), (2.5) есть не что иное, как сумма кинетической энергии материального объема Ω_t и энергии упругих напряжений сдвига. Если ввести обозначение $\mu\tau^{-1}=G$ и отождествить G с модулем сдвига, то выражение $(4G)^{-1}S:S$ будет совпадать с выражением для плотности энергии напряжений сдвига.

Обозначим через U удельную внутреннюю энергию среды. Полная внутренняя энергия представляет собой сумму тепловой и упругой энергий:

$$\rho U=\rho cT+\frac{\tau}{4\mu}\,S:S \tag{2.6}$$

(T — абсолютная температура; c — теплоемкость среды, которая считается постоянной). Полагая, что процесс переноса тепла в среде Максвелла подчиняется закону Фурье с постоянным коэффициентом теплопроводности $\varkappa$, уравнение энергии можно записать в виде

$$\rho\,\frac{dU}{dt}=\varkappa\Delta T+S:D, \tag{2.7}$$

где d/dt — конвективная производная по времени. Второе слагаемое в правой части (2.7) есть диссипативная функция.

Как отмечено в конце п. **1**, уравнения (1.1)–(1.3), (1.5), (1.7) образуют замкнутую систему для определения функций $\boldsymbol{v}$, p, S. Если ее решение известно, то температура среды определяется из уравнения (2.7), в которое подставляется выражение (2.6). Не рассматривая подробно этот вопрос, заметим, что влияние вязкой диссипации на нагрев среды в опытах, описанных в [6, 7], крайне незначительно вследствие малости скоростей течения.

Таким образом, изучение температурных эффектов в данной работе не имеет смысла. Однако подлежит проверке совместимость предлагаемой модели несжимаемой среды Максвелла со вторым началом термодинамики. Запишем основное термодинамическое тождество:

$$\rho\,\frac{dU}{dt} = \rho T\,\frac{ds}{dt} + S : D \tag{2.8}$$

(s — удельная энтропия). В соотношении (2.8) отсутствует давление, поскольку в случае несжимаемой среды оно не является термодинамической переменной. Из (2.7), (2.8) следует соотношение

$$\rho T\,\frac{ds}{dt} = \varkappa\Delta T \tag{2.9}$$

(уравнение производства энтропии). Согласно (2.8) упругие деформации, вследствие их обратимости, не участвуют в производстве энтропии.

Предположим, что материальный объем Ω_t теплоизолирован. Тогда в силу (2.9) энтропия движущегося объема

$$L(\Omega_t) = \int\limits_{\Omega_t} \rho s\,dt$$

подчиняется уравнению

$$\frac{dL}{dt} = \int\limits_{\Omega_t} \frac{\varkappa}{T}\,|\nabla T|^2\,dt.$$

Таким образом, энтропия изолированного материального объема не убывает со временем, а ее сохранение возможно лишь в случае изотермических процессов. Отметим, что вопросы термодинамики деформирования вязкоупругих сред наиболее полно рассмотрены в работах [4, 8].

3. Двумерное движение среды Максвелла. Система уравнений (1.1)–(1.3), (1.5), (1.7), описывающая движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла в общем трехмерном случае, сложна для исследования. Проблема не только в ее квазилинейности и высоком порядке, но и в том, что эта система не имеет определенного типа. Ниже рассматриваются двумерные движения. Введем следующие обозначения:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad v_1 = u, \quad v_2 = v, \quad S_{11} = -S_{22} = A, \quad S_{12} = S_{21} = B.$$

Функции u, v, p, A, B удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}
u_x + v_y = 0,\\
\rho(u_t + uu_x + vu_y) + p_x - A_x - B_y = 0,\\
\rho(v_t + uv_x + vv_y) + p_y - B_x + A_y = 0,\\
\tau[A_t + uA_x + vA_y + B(v_x - u_y)] - 2\mu u_x + A = 0,\\
\tau[B_t + uB_x + vB_y - A(v_x - u_y)] - \mu(u_y + v_x) + B = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Пусть равенство $\varphi(x,y,t)=0$ задает характеристическую поверхность системы (3.1). Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\begin{gathered}\varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y=\pm\Big[\frac{\mu}{\rho\tau}\,(\varphi_x^2+\varphi_y^2)-\frac{2B}{\rho}\,(\varphi_x\varphi_y)\Big]^{1/2},\\ \varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y=0,\qquad \varphi_x=\pm i\varphi_y.\end{gathered}\tag{3.2}$$

Уместно провести аналогию между характеристиками системы (3.1) и характеристиками системы уравнений плоскопараллельного движения идеальной несжимаемой жидкости. Последняя содержит три уравнения первого порядка и имеет две комплексные и одну траекторную характеристики. Уравнения этих характеристик совпадают с тремя последними уравнениями в (3.2). Наличие комплексных характеристик у обеих систем обусловлено несжимаемостью среды. Первые две характеристики (3.2) вязкоупругой среды следовало бы назвать звуковыми, однако выполнение в начальный момент неравенства $|B|\leqslant\mu\tau^{-1}$, обеспечивающего неотрицательность подкоренного выражения в двух первых уравнениях (3.1), не гарантирует того, что это неравенство будет выполнено в процессе движения. При выполнении неравенства $|B|>\mu\tau^{-1}$ возможно развитие коротковолновой неустойчивости типа неустойчивости Адамара. В работе [9] рассмотрена модифицированная модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла, полученная добавлением в правую часть уравнения импульса (1.2) вязкого члена $\mu\Delta\boldsymbol{v}$. Одним из результатов работы [9] является доказательство глобальной однозначной разрешимости двумерной начально-краевой задачи для модифицированной системы с условиями прилипания на границе области течения. Уравнения характеристик для системы уравнений трехмерного движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла без предположения $\operatorname{tr} S=0$ приведены в работе [10]. Там же обсуждается постановка начально-краевых задач для этой системы.

4. Аналитические решения. Специфика системы (3.1) состоит в том, что она не является эволюционной по отношению к давлению, поэтому для нее нельзя ставить задачу Коши с начальными данными при $t=0$. Однако указанная система может быть разрешена относительно производных всех искомых функций по переменной x или по переменной y.

Рассмотрим следующую задачу Коши для системы (3.1):

$$u=u_0(y,t),\quad v=v_0(y,t),\quad p=p_0(y,t),\quad A=A_0(y,t),\quad B=B_0(y,t)\quad\text{при}\quad x=0.\tag{4.1}$$

Справедливо следующее

Утверждение. *Пусть функции u_0, v_0, p_0, A_0, B_0 аналитичны в некоторой окрестности точки (y_0,t_0) и, кроме того, выполнено неравенство $u_0\neq 0$ в этой окрестности. Тогда задача* (3.1), (4.1) *имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки* (x_0,y_0,t_0). *Это решение единственно в классе аналитических функций.*

Данное утверждение является следствием теоремы Коши — Ковалевской.

5. Линейная модель двумерного движения. С физической точки зрения более естественной, чем задача (3.1), (4.1), является начально-краевая задача для системы (3.1) с начальными данными для функций u, v, A, B и условиями прилипания (2.2) на границе Σ области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Не имея доказательств разрешимости такой задачи для исходной квазилинейной системы (3.1), рассмотрим ее линеаризованный вариант.

Введем функцию тока $\psi(x,y,t)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\psi_y=u,\qquad \psi_x=-v.$$

Линеаризуя систему (3.1) в состоянии покоя, получим уравнение

$$\tau\Delta\psi_{tt}+\Delta\psi_t=\nu\Delta\Delta\psi,\qquad (x,y)\in\Omega,\quad t>0.\tag{5.1}$$

Здесь $\nu = \mu\rho^{-1}$ — кинематическая вязкость. Условия прилипания в терминах функции тока записываются в форме

$$\psi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \qquad (x, y) \in \Sigma, \tag{5.2}$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали к кривой Σ. Уравнение (5.1) имеет второй порядок по t, и поэтому для него требуется задать два начальных условия:

$$\psi = \psi_0(x, y), \qquad \psi_t = \psi_1(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega, \quad t = 0. \tag{5.3}$$

Первое условие в (5.3) задает скорость точек среды в момент $t = 0$, второе — их ускорения. При этом проявляется различие между течением вязкой жидкости в приближении Стокса (что соответствует $\tau = 0$ в уравнении (5.1)) и движением вязкоупругой среды. В последнем случае в начальный момент помимо поля скоростей необходимо задать компоненты девиатора тензора напряжений

$$A = A_0(x, y), \qquad B = B_0(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega, \quad t = 0. \tag{5.4}$$

Тогда функция ψ_1, содержащаяся во втором условии (5.3), находится как решение задачи Дирихле для уравнения

$$\rho\Delta\psi_1 - 2A_{0,xy} + B_{0,xx} - B_{0,yy} = 0.$$

Обозначим через Q_N цилиндрическую область $Q_N = \{x, y, t\colon (x, y) \in \Omega,\ t \in (0, N)\}$. Сформулируем утверждение о разрешимости задачи (5.1)–(5.3).

Сделаем следующие предположения: 1) *кривая Σ принадлежит классу C^2;* 2) *функции ψ_0 и ψ_1 удовлетворяют условиям $\Delta\psi_0 \in H^1(\Omega)$, $\Delta\psi_1 \in L^2(\Omega)$;* 3) *выполнены условия $\psi_0 = 0$, $\partial\psi_0/\partial n = 0$, $(x, y) \in \Sigma$. Тогда для любого $N > 0$ существует, и притом единственное, решение задачи* (5.1)–(5.3), *такое что $\Delta\psi \in H^{1,1}(Q_N)$.*

Доказательство данного утверждения не вызывает существенных затруднений и в данной работе не приводится. Если функция ψ найдена, то функции A и B определяются из двух последних уравнений системы (3.1) после их линеаризации. Фактически доказательство сводится к решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями (5.4), в которые x и y входят как параметры.

6. Групповые свойства системы (3.1). Наиболее широкая группа, допускаемая системой (3.1), вычислена в работе [11]. Базисные операторы этой группы имеют вид

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_t, \qquad X_2 = y\,\partial_x - x\,\partial_y + v\,\partial_u - u\,\partial_v + 2B\,\partial_A - 2A\,\partial_B, \\ X_3 = \alpha(t)\,\partial_x + \dot\alpha(t) - \rho x\ddot\alpha(t)\,\partial_p, \qquad X_4 = \beta(t)\,\partial_y + \dot\beta(t)\,\partial_v - \rho y\ddot\beta(t)\,\partial_p, \\ X_5 = \gamma(t)\,\partial_p, \end{gathered} \tag{6.1}$$

где α, β, γ — произвольные функции t класса C^∞; точки означают дифференцирование по аргументу. Таким образом, допускаемая группа является бесконечномерной, поэтому уместно говорить не о группе, а о псевдогруппе Ли. Оператор X_1 соответствует переносу по времени, а оператор X_2 — согласованным вращениям в плоскостях (x, y), (u, v) и (A, B). Операторы X_3, X_4, X_5 специфичны для уравнений несжимаемой сплошной среды [12]. Первые два из них соответствуют переходу в неинерциальную систему координат, движущуюся вдоль оси x (или y) со скоростью $\dot\alpha$ (или $\dot\beta$). Наличие среди базисных операторов оператора X_5 означает, что давление в системе (3.1) определено с точностью до произвольной функции времени.

Полагая в (6.1) последовательно $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = t$, $\beta = t$, получаем операторы переноса и галилеева переноса по осям x и y

$$Y_1 = \partial_x, \qquad Y_2 = \partial_y, \qquad Y_3 = t\,\partial_x + \partial_u, \qquad Y_4 = t\,\partial_y + \partial_v. \tag{6.2}$$

Допускаемая системой (3.1) псевдогруппа Ли является источником ее точных решений, простейшими из которых являются слоистые течения.

7. Слоистые течения. Ниже рассматривается решение системы (3.1), инвариантное относительно группы переносов по оси y. В таком решении все искомые функции зависят лишь от x и t. Без потери общности можно считать, что $u = 0$. Функции v, A, B удовлетворяют замкнутой системе уравнений

$$\rho v_t = B_x, \qquad \tau(A_t + Bv_x) + A = 0, \qquad \tau(B_t - Av_x) + B = \mu v_x. \tag{7.1}$$

Если решение системы (7.1) известно, то функция p находится с помощью квадратуры из первого уравнения системы (3.1), в котором следует положить $u = 0$, $B_y = 0$.

В отличие от исходной системы (3.1) система уравнений (7.1) является эволюционной по отношению ко всем искомым функциям. Условием ее гиперболичности является выполнение неравенства $\tau A + \mu > 0$. Для изучения свойств решения системы (7.1) рассмотрим случай, когда время релаксации τ и динамическая вязкость μ одновременно стремятся к бесконечности, причем $\mu\tau^{-1} = \sigma = \mathrm{const}$. В этом случае строится формальное разложение решения системы (7.1) по малому параметру τ^{-1}. Уравнения для главных членов разложения (сохраним для них прежние обозначения) имеют вид

$$\rho v_t = B_x, \qquad A_t = -Bv_x, \qquad B_t = (\sigma + A)v_x. \tag{7.2}$$

Система (7.2) имеет интеграл

$$(\sigma + A)^2 + B^2 = F^2(x), \tag{7.3}$$

где F — произвольная функция x. Для упрощения дальнейших преобразований положим $F = \sigma$ и исключим из системы (7.2) с помощью (7.3) функцию A, а в полученных уравнениях для функций v, B перейдем к безразмерным переменным x', t', v', B' с использованием формул

$$x = lx', \qquad t = l\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}t', \qquad v = \rho^{-1/2}\sigma^{1/2}v', \qquad B = \sigma B',$$

где l — некоторая постоянная, имеющая размерность длины. Далее штрихи над переменными в результирующей системе уравнений опускаются:

$$v_t = B_x, \qquad B_t = (1 - B^2)^{1/2}v_x. \tag{7.4}$$

(Случай, когда при извлечении квадратного корня в правой части второго уравнения в (7.4) возникает знак “минус”, сводится к рассмотренному выше заменой B на $-B$.)

Теория систем квазилинейных гиперболических уравнений, подобных (7.4), хорошо изучена (см., например, [13]). Как известно, для этих уравнений характерно образование сильных разрывов решения при любой гладкости начальных данных. Для системы (7.4) разрывы можно обнаружить, изучая ее решения типа простых волн, т. е. решения, в которых функции v и B связаны функциональной зависимостью $v = f(B)$. Тогда в силу (7.4) $f = \pm(1 - B^2)^{-1/4}$, а для функции B при выборе знака “минус” получается уравнение

$$B_t = -(1 - B^2)^{1/4}B_x.$$

В результате подстановки $B = (1 - w^4)^{1/2}$ это уравнение сводится к известному уравнению Хопфа

$$w_t + ww_x = 0,$$

для которого достаточным условием возникновения сильного разрыва в решении задачи Коши является монотонное убывание начальной функции.

Остается нерешенным вопрос о выборе условия Гюгонио на сильном разрыве, гарантирующего единственность решения задачи Коши. Этот вопрос нетривиален, поскольку исходное реологическое соотношение (1.6) не имеет форму закона сохранения. Другой важный вопрос связан с доказательством существования в малом по времени классического решения задачи Коши для системы (7.1). Для доказательства достаточно привести систему (7.1) к симметрическому виду, однако вопрос о возможности симметризации этой системы также остается нерешенным.

8. Точные решения задач со свободной границей. Из сказанного выше следует, что даже в фиксированной области задачи для системы (1.1)–(1.3), (1.5), (1.7) и ее двумерного аналога (3.1) достаточно сложны. Ситуация еще более осложняется, если ограничивающая материальный объем поверхность является свободной, т. е. априори неизвестна. В этом случае возрастает значение точных решений.

Универсальный инструмент для построения точных решений дает групповой анализ дифференциальных уравнений [14]. Способ построения инвариантных и частично инвариантных решений задач со свободной границей для уравнений Навье — Стокса, предложенный в работе [15], основан на свойстве инвариантности условий на свободной границе по отношению к преобразованиям некоторой подгруппы, допускаемой системой уравнений Навье — Стокса. Оказалось, что специфика указанной системы несущественна. Это позволяет распространить данный подход на задачи со свободной границей для изучаемой модели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла.

Рассмотрим систему (3.1), описывающую двумерные движения среды Максвелла, и допускаемую этой системой псевдогруппу Ли с базисными операторами (6.1). Обозначим через G_6 подгруппу данной псевдогруппы, порожденную операторами X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 (см. (6.2)).

Теорема. *Пусть H — произвольная подгруппа группы G_6, а свободная поверхность Σ_t — неособое инвариантное многообразие H. Тогда условия* (2.3), (2.4)*, выполненные на этой поверхности, также инвариантны по отношению к H.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 [12. Гл. 6] и в данной работе не приводится. Имеется естественное обобщение этой теоремы на случай трехмерных движений среды Максвелла со свободной границей. Одно из инвариантных решений уравнений (1.1)–(1.3), (1.5), (1.7), описывающее процесс заполнения сферической полости в среде Максвелла под действием постоянного давления на бесконечности, рассмотрено в работе [16].

Следует отметить, что сформулированная теорема позволяет строить не только инвариантные, но и частично инвариантные решения, а также их обобщения. В качестве примера рассмотрим подгруппу H_2 группы G_6 с базисными операторами Y_1, Y_3. Инвариантного относительно H_2 решения система (3.1) не имеет, так как ранг соответствующей матрицы Якоби [14] в (3.1) меньше числа искомых функций в этой системе. Класс частично инвариантных решений оказывается непустым, но достаточно узким. Как показано в работе [17], множество точных решений значительно расширяется, если не требовать выполнения условия инвариантности относительно группы H_2 части искомых функций. В [17] условие $\operatorname{tr} S = 0$ не предполагалось выполненным. Ниже это условие считается выполненным. Опуская процедуру построения решения, приведем окончательный результат, подлежащий непосредственной проверке.

Рассматривается задача о симметричной деформации вязкоупругой полосы с прямолинейными свободными границами, на которых выполнены кинематическое условие (2.3) и условие равенства нормального напряжения атмосферному давлению (одно из условий (2.4)). Касательные напряжения на границах полосы распределены по линейному закону. Область течения есть $\Omega_t = \{x, y\colon x \in \mathbb{R},\ |y| < l(t)\}$, линии $y = \pm l(t)$ являются свободными границами. Решение представляется в виде

$$u = xh(t), \qquad v = -yh(t), \qquad p = r(y,t), \qquad A = q(y,t), \qquad B = Cxy \exp{(-t/\tau)}.$$

Здесь C — заданная постоянная; функция $h(t)$ — решение задачи Коши

$$\rho(h' + h^2) = C \exp(-t/\tau), \quad t > 0, \qquad h(0) = h_0.$$

Выражение для $h(t)$ в терминах функций Бесселя приведено в [17]. Начальная ширина полосы задана и равна $2l_0$. Задание постоянной h_0 определяет начальное поле скоростей, которое оказывается линейным. Данное решение является обобщением известного решения Овсянникова [18], описывающего деформацию полосы идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами. Начальное поле напряжений определяется формулами

$$A = q_0(y), \qquad B = Cxy,$$

где $q_0(y)$ — заданная функция. Если функция $h(t)$ известна, то $q_0(y)$ определяется из решения линейной задачи для параболического уравнения второго порядка. Давление $r(y,t)$ определяется с помощью квадратуры. Наконец, представление функции $l(t)$ (полуширина полосы) имеет вид

$$l(t) = l_0 \exp\Big(-\int\limits_0^t h(z)\,dz\Big).$$

В полученном решении длина полосы не ограничена. При достаточно больших значениях x в этом решении нарушается условие отсутствия комплексных "звуковых" характеристик $\tau|B| < \mu$. Это позволяет сделать вывод о развитии коротковолновой неустойчивости решения на больших расстояниях от линии $x = 0$. Однако можно рассматривать сужение данного решения на область $\omega_t = \{x, y\colon |x| < b(t),\ |y| < l(t)\}$, где $b(t)$ — заданная функция. На заданных границах области ω_t следует обеспечить выполнение краевых условий, согласованных с формой точного решения. Если начальная длина полосы $2b_0$ достаточно мала, так что $C\tau b_0 l_0 < \mu$, то неустойчивость Адамара будет подавлена.

Автор выражает благодарность С. Л. Гаврилюку, В. А. Городцову и С. Н. Коробейникову за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Астарита Дж.** Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Марручи. М.: Мир, 1978.
2. **Жермен П.** Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983.
3. **Joseph D. D.** Fluid dynamics of viscoelastic liquids. N. Y. etc.: Springer Verlag, 1990.
4. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошных сред и законы сохранения / С. К. Годунов, Е. И. Роменский. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
5. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
6. **Апакашев Р. А., Павлов В. В.** Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 3–7.
7. **Коренченко А. Е., Бескачко В. П.** Определение модуля сдвига воды в экспериментах с плавающим диском // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 100–103.
8. **Городцов В. А., Леонов А. И.** О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 1. С. 70–94.
9. **Lions P.-L., Masmoudi N.** Global solutions for some oldroyd models of non-Newtonian flows // Chinese Ann. Math. 2000. V. 2, N 1. P. 131–146.

10. **Gerritsma M. I., Phillips T. N.** On the characteristics and compatibility equations for the UCM model fluid // Z. angew. Math. und Mech. 2008. Bd 88, N 7. S. 523–539.
11. **Meshcheryakova E. Yu., Pukhnachov V. V.** Beyond partially invariant solutions // Abstr. of Intern. conf. "Symmetry in nonlinear mathematical physics", Kiev (Ukraine), June 21–27, 2009. [Electron. resource]. http://www.imath.kiev.ua/∼appmath/Abstracts2009/Meshcheryakova.html.
12. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Сиб. издат. фирма "Наука", 1994.
13. **Рождественский Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. М.: Наука, 1978.
14. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
15. **Пухначев В. В.** Инвариантные решения уравнений Навье — Стокса, описывающие движения со свободными границами // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 2. С. 302–305.
16. **Осипов С. В., Пухначев В. В.** Задача о заполнении сферической полости в несжимаемой вязкоупругой среде Максвелла // Успехи механики сплошных сред. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 583–591.
17. **Пухначев В. В.** Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 16–23.
18. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. С. 5–75.

Поступила в редакцию 14/I 2010 г.