

УДК 532.58

Повышение давления жидкости в замкнутом объеме при тепловом воздействии через стенки

В.Ш. Шагапов¹, Ю.А. Юмагулова²

¹Институт механики Уфимского научного центра РАН

²Бирский филиал Башкирского государственного университета

E-mail: shagapov@rambler.ru, ym_julia@mail.ru

Рассмотрена задача о повышении давления при тепловом воздействии через недеформируемую стенку на жидкость, находящуюся в замкнутом объеме. Для случаев плоской, радиально-симметричной и сферически-симметричной постановок задачи получены решения, описывающие изменение давления вследствие термического расширения и фазовых переходов. Проанализировано влияние начального состояния жидкости и формы замкнутого объема на темп изменения давления.

Ключевые слова: повышение давления, термическое расширение, парообразование.

Введение

Тепловое воздействие на жидкость, находящуюся в замкнутом объеме, сопровождается термическим расширением и фазовыми переходами, которые могут способствовать ее разрушению в результате сильного повышения давления. В случае, когда температура стенки не превышает температуры кипения жидкости для исходного давления, причиной возникновения подобных ситуаций является объемное расширение жидкости. Но особенно быстрый и сильный рост давления (тепловой удар) может реализоваться вследствие фазовых переходов при больших тепловых нагрузках. Поэтому при конструировании, а также при расчете надежности и прочности различных технических систем, таких как гидравлические машины и другие устройства, которые работают в условиях сильных температурных перепадов, необходимо учитывать термическое расширение используемой жидкости и возможные фазовые переходы.

1. Повышение давления жидкости в замкнутом объеме вследствие ее термического расширения

Рассмотрим задачу о нагревании жидкости с начальной температурой T_{l0} , находящейся в замкнутом объеме при давлении p_0 , через боковые стенки. Пусть на границе $r = b$ ($t > 0$) поддерживается постоянная температура T_e , причем она меньше температуры кипения для начального давления p_0 ($T_e < T_s(p_0)$). Тогда повышение давления будет происходить только вследствие термического расширения ($0 < r < b$), где $r = 0$ — координата оси или центра симметрии.

Для теоретического описания процесса повышения давления в объеме при нагреве запишем уравнения неразрывности, теплопроводности и состояния жидкости в линейном приближении [1, 2]:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} (r^n \rho_l v_l) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + v_l \frac{\partial T_l}{\partial r} = \frac{v_l^{(T)}}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial T_l}{\partial r} \right), \quad (1.2)$$

$$\rho_l = \rho_{l0} \left(1 - \alpha^{(T)} (T_l - T_{l0}) + \alpha^{(p)} (p - p_0) \right), \quad (1.3)$$

где ρ_l , $v_l^{(T)}$, v_l , T_l , p — плотность, температуропроводность, скорость, температура и давление жидкости, нижний индекс 0 здесь и далее соответствует начальным значениям параметров жидкости, $\alpha^{(T)}$ — коэффициент термического расширения жидкости, $\alpha^{(p)} = 1/(\rho_{l0} C_l^2)$ — коэффициент сжимаемости, определяемый скоростью звука в жидкости C_l и ее плотностью, значения $n = 0, 1$ и 2 соответствуют плоской, радиальной и сферической постановкам задачи. Отметим, что такая постановка справедлива в основном на начальном этапе, когда конвективным течением вследствие гравитационных эффектов и неоднородностью поля плотности можно пренебречь.

Из анализа уравнений (1.1) и (1.2) следует, что отношение слагаемого в уравнении (1.2), соответствующего конвективному переносу тепла, к слагаемому, отвечающему за молекулярную теплопроводность, составляет величину порядка отношения $\Delta \rho / \rho_{l0}$, где $\Delta \rho$ — характерное изменение плотности жидкости вследствие термического расширения, причем максимальная величина этого отношения всегда ниже, чем значение $\alpha^{(T)} (T_e - T_{l0})$, которое в рассматриваемой задаче значительно меньше единицы. Следовательно, в уравнении (1.2) слагаемым, связанным с конвективным переносом тепла, можно пренебречь.

Приведенную систему уравнений необходимо дополнить граничными и начальными условиями. Для скорости и температуры жидкости на границах $r = b$ и $r = 0$ примем условия

$$\begin{aligned} r = b, \quad t > 0: v_l = 0, \quad T_l = T_e, \\ r = 0, \quad t > 0: v_l = 0, \quad \partial T_l / \partial r = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В начальном состоянии ($t = 0$) температура и давление жидкости равны $T_l = T_{l0}$, $p = p_0$.

При гипотезе однородности давления (условие гомобаричности $\partial p / \partial r = 0$) из уравнения неразрывности (1.1) и теплопроводности (1.2) с учетом линейного уравнения состояния (1.3) можно получить

$$\alpha^{(p)} r^n \frac{dp}{dt} = \alpha^{(T)} v_l^{(T)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho_{l0}} \frac{\partial}{\partial r} (r^n \rho_l v_l). \quad (1.5)$$

Интегрирование уравнения (1.5) по координате от 0 до b приводит к следующему дифференциальному уравнению, описывающему изменение давления жидкости:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(n+1) \alpha^{(T)} v_l^{(T)}}{\alpha^{(p)} b} \left(\frac{\partial T_l}{\partial r} \right) \Big|_{r=b}. \quad (1.6)$$

Для задания теплового потока на границе $r = b$ в уравнении (1.6) воспользуемся решениями уравнения теплопроводности (1.2), удовлетворяющими условиям (1.4), которые для $n = 0, 1$ и 2 соответственно имеют вид [3]:

$$T(r, t) = \frac{2}{b} \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\nu_l^{(T)} (2m+1)^2 \pi^2 t}{4b^2}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi r}{2b}\right) \times \left\{ \int_0^b T_{l0} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi r'}{2b}\right) dr' + \frac{(2m+1)\pi \nu_l^{(T)} (-1)^m}{2b} \int_0^t T_e \exp\left(\frac{\nu_l^{(T)} (2m+1)^2 \pi^2 \tau}{4b^2}\right) d\tau \right\}, \quad (1.7)$$

$$T(r, t) = T_e - \frac{2(T_e - T_{l0})}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\nu_l^{(T)} \alpha_m^2 t) \frac{J_0(r\alpha_m)}{\alpha_m J_1(b\alpha_m)}, \quad (1.8)$$

$$T(r, t) = \frac{2}{br} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\nu_l^{(T)} m^2 \pi^2 t}{b^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi r}{b}\right) \times \left\{ \int_0^b r' T_{l0} \sin\left(\frac{m\pi r'}{b}\right) dr' - (-1)^m m\pi \nu_l^{(T)} \int_0^t T_e \exp\left(\frac{\nu_l^{(T)} m^2 \pi^2 \tau}{b^2}\right) d\tau \right\}, \quad (1.9)$$

где $J_0(r)$, $J_1(r)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка, α_m — положительные корни уравнения $J_0(b\alpha) = 0$.

Подставляя решения (1.7)–(1.9) в уравнение (1.6), получим:

$$p = p_0 + \frac{8\alpha^{(T)} (T_e - T_{l0})}{\alpha^{(p)} \pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \left(1 - e^{-\nu_l^{(T)} (2m+1)^2 \pi^2 t / (4b^2)}\right), \quad n = 0, \quad (1.10)$$

$$p = p_0 + \frac{4\alpha^{(T)} (T_e - T_{l0})}{\alpha^{(p)} b^2 \sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \left(1 - e^{-\nu_l^{(T)} \alpha_m^2 t}\right), \quad n = 1, \quad (1.11)$$

$$p = p_0 + \frac{6\alpha^{(T)} (T_e - T_{l0})}{\alpha^{(p)} \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(1 - e^{-\nu_l^{(T)} m^2 \pi^2 t / b^2}\right), \quad n = 2. \quad (1.12)$$

Для значения максимального давления жидкости $p^{(M)}$ в замкнутом объеме, предельным переходом при $t \rightarrow \infty$ из решений (1.10)–(1.12), получим:

$$p^{(M)} = p_0 + \frac{\alpha^{(T)}}{\alpha^{(p)}} (T_e - T_{l0}). \quad (1.13)$$

Отметим, что это конечное предельное значение $p^{(M)}$ следует также непосредственно из уравнения состояния (1.3) подстановкой $T_l = T_e$ и $\rho_l = \rho_{l0}$. Несмотря на то, что с использованием значения давления $p^{(M)}$ можно оценить величину окончательного теплового удара, решения (1.10)–(1.12) позволяют установить динамику процесса роста давления жидкости в замкнутом объеме.

На основе уравнения (1.6) с учетом решений (1.10)–(1.12) выполнены численные расчеты применительно к нагреву объема воды. Для параметров, характеризующих

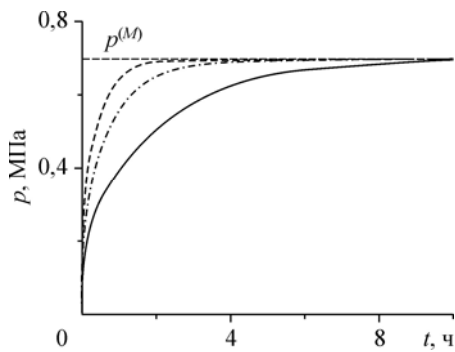


Рис. 1. Динамика роста давления воды вследствие ее термического расширения.

физические свойства воды, приняты следующие значения [4]: $\alpha^{(T)} = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\alpha^{(p)} = 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, $\nu_l^{(T)} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

На рис. 1 представлены расчетные зависимости давления от времени при $T_e = 80 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{l0} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_0 = 0,1 \text{ МПа}$, $b = 0,05 \text{ м}$. Здесь и в дальнейшем сплошные, штрихпунктирные

и пунктирные линии соответствуют случаям плоской, радиально-симметричной и сферически-симметричной постановкам задачи. Штриховая горизонтальная линия соответствует величине максимального давления жидкости, определяемого формулой (1.13).

Видно, что при нагревании воды в замкнутой емкости, которая препятствует ее расширению, давление увеличивается почти в десять раз. При этом темп роста давления на начальном этапе, когда толщина прогретого слоя значительно меньше линейного размера объема, сильно зависит от геометрии задачи. Это связано с тем, что при переходе от сферической задачи к плоской удельный объем, компенсирующий изменение давления вследствие термического расширения жидкости в приповерхностном слое, увеличивается примерно в три раза. Поэтому темп роста давления на начальном этапе для сферического объема выше.

2. Тепловой удар, сопровождаемый парообразованием жидкости вблизи границы

Рассмотрим ситуацию, когда при нагревании емкости с жидкостью через боковые стенки может происходить ее вскипание вблизи границы. Для этого температура стенки должна быть выше температуры кипения жидкости при исходном давлении p_0 ($T_e > T_s(p_0)$). В этом случае будет образовываться слой пара вблизи стенки толщиной $\delta = b - r_{(s)}$, где $r_{(s)}$ — координата границы пар-жидкость.

Для состояния пара примем уравнение Менделеева-Клапейрона

$$p_v = \rho_v R_v T_v, \quad (2.1)$$

где p_v , T_v — давление и температура пара, R_v — приведенная постоянная для пара.

Для распределения температуры в слое пара, который для рассматриваемого процесса будет тонким ($\delta \ll b$), примем линейный закон

$$T_v = T_e + \frac{(T_s(p) - T_e)(b - r)}{\delta}. \quad (2.2)$$

На межфазной границе $r = r_{(s)}$ температуры непрерывны и равны равновесной температуре фазовых переходов для текущего значения давления $T_v = T_l = T_s(p)$, которая определяется из выражения

$$T_s(p) = T_* / \ln(p_*/p), \quad (2.3)$$

где $T_* = l/R_v$, p_* — эмпирические параметры, определяемые на основе табличных данных [2].

Кроме того, на этой границе ($r = r_{(s)}$) выполняются условия баланса массы и тепла

$$\rho_v (\nu_v - \dot{r}_{(s)}) = \rho_l (\nu_l - \dot{r}_{(s)}), \quad (2.4)$$

$$\lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial r} - \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r} = \rho_v \dot{r}_{(s)} l, \quad (2.5)$$

где λ_v и ρ_v — теплопроводность и плотность пара, l — удельная теплота парообразования.

На границах $r = b$ и $r = 0$ примем условия $T_v = T_e$ и $\partial T_l / \partial r = 0$ соответственно.

Начальное состояние ($t = 0$) характеризуется температурой жидкости T_{l0} ($0 < r < b$), давлением p_0 и равенством нулю толщины парового слоя ($\delta = 0$).

Аналогично предыдущему случаю, уравнение для изменения давления жидкости будет иметь вид (1.5), интегрирование его по координате от 0 до $r_{(s)}$ с учетом малости слоя пара ($\delta \ll b$), плотности последнего ($\rho_v \ll \rho_l$) и условия баланса массы (2.4) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\alpha^{(p)} b}{(n+1)} \frac{dp}{dt} = \alpha^{(T)} \nu_l^{(T)} \left(\frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_b + \frac{d\delta}{dt}. \quad (2.6)$$

Здесь в силу тонкости слоя пара граничное условие для температуры жидкости снесено на стенку объема ($r_{(s)} \approx b$).

Уравнение для закона изменения толщины парового слоя следует из условия теплового баланса (2.5) с учетом (2.1), (2.2) и (2.3) в виде:

$$\frac{d\delta}{dt} = - \frac{\lambda_l}{p \ln(p^*/p)} \left(\frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_b + \frac{\lambda_v (T_e - T^* / \ln(p^*/p))}{p \ln(p^*/p) \delta}. \quad (2.7)$$

Согласно системе (2.6) и (2.7) рост давления происходит вследствие термического расширения жидкости и изменения толщины слоя пара, скорость которого определяется тепловыми потоками со стороны жидкости и пара.

Для начального момента времени ($t = 0$) система уравнений (2.6) и (2.7) имеет особенность, поскольку $\delta(0) = 0$. Учитывая этот факт, на начальном этапе, в течение которого изменение давления в объеме Δp ($\Delta p = p - p_0$) незначительно ($\Delta p \ll p_0$), можно использовать решение автомодельной задачи об образовании пара на границе жидкости при внезапном повышении температуры выше равновесной для текущего значения давления ($T_e \geq T_s(p_0)$) в плоскоодномерной постановке. Согласно такой постановке, толщина слоя пара будет определяться по формуле $\delta = \xi_{(s)} \sqrt{\nu_l^{(T)} t}$, где значение $\xi_{(s)}$ является положительным решением квадратного уравнения

$$\frac{\text{Ja}}{2} \xi_{(s)}^2 + \frac{\Delta \theta_l}{\sqrt{\pi}} \xi_{(s)} + \tilde{\lambda} \Delta \theta_e = 0,$$

где $\Delta \theta_e = (T_s(p_0) - T_e) / T_{l0}$, $\Delta \theta_l = (T_s(p_0) - T_{l0}) / T_{l0}$, $\tilde{\lambda} = \lambda_v / \lambda_l$, $\text{Ja} = \rho_{v0} l \nu_l^{(T)} / (\lambda_l T_{l0})$ — безразмерные параметры.

Данное решение для роста δ можно использовать для $\Delta p \ll p_0$. Из этого условия можно получить $\delta \ll \delta_*$, где $\delta_* = bp_0 / (\rho_{l0} C_l^2)$, которое необходимо для определения промежутка времени t_0 , соответствующего начальному этапу. В дальнейшем это значение t_0 и соответствующее ему δ используются как начальные условия Коши общей системы уравнений (2.6) и (2.7).

Следовательно, алгоритм численного расчета предполагает, что рассматриваемый процесс состоит из двух этапов. На первом этапе, считая давление постоянным p_0 , решается задача роста толщины парового слоя в автомоделной постановке. На втором этапе, для определения теплового потока со стороны жидкости в уравнениях (2.6) и (2.7), уравнение теплопроводности (1.2) можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (метод прямых [5]). Для этого строится сетка равноотстоящих точек $T_i = T(r_i)$, $r_i = ih$, $i = 1, \dots, m$, где $h = b/m$ — шаг по координате. В уравнении теплопроводности при «замороженном» значении переменной t дифференциальные операторы по координате заменяются разностными аналогами по формуле симметричной аппроксимации. Тем самым уравнение теплопроводности (1.2) с учетом (2.3) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1(t)}{dt} &= \frac{v_l^{(T)}}{h^2} \left[\frac{T_*}{\ln(p_*/p)} - 2T_1(t) + T_2(t) \right], \\ \frac{dT_i(t)}{dt} &= \frac{v_l^{(T)}}{h^2} [T_{i-1} - 2T_i(t) + T_{i+1}(t)], \quad i = 2, \dots, m-2, \\ \frac{dT_{m-1}(t)}{dt} &= \frac{v_l^{(T)}}{h^2} [T_{m-2} - T_{m-1}(t)]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, решается задача Коши для совместной системы дифференциальных уравнений, состоящих из системы (2.6)–(2.8), для которой начальные данные ($t = t_0$) для толщины парового слоя и распределения температуры жидкости вблизи межфазной поверхности берутся из автомоделного решения.

В численных расчетах для теплофизических параметров воды и пара приняты величины [4]: $\lambda_v = 0,024$ Вт/(м·К), $\lambda_l = 0,56$ Вт/(м·К), $\rho_{v0} = 0,598$ кг/м³, $\rho_{l0} = 10^3$ кг/м³, $l = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, $C_l = 1500$ м/с, $T_* = 5,05 \cdot 10^3$ К, $p_* = 7,67 \cdot 10^{10}$ Па.

На рис. 2 представлены зависимости давления, температуры межфазной границы и толщины слоя пара от времени при $b = 0,5$ м, $p_0 = 0,1$ МПа, $T_e = 200$ °С, $T_{l0} = 20$ °С, $\delta = 10^{-6}$ м и $t_0 = 10^{-4}$ с. Правая часть рис. 2 представляет собой увеличенные фрагменты для начального этапа.

Видно, что из-за образования парового слоя происходит более быстрый рост давления по сравнению с предыдущим случаем, когда повышение давления полностью происходило только вследствие термического расширения жидкости. Из-за повышения давления будет расти равновесная температура $T_s(p)$ на межфазной поверхности, что приведет к снижению теплового потока со стороны пара и некоторой стабилизации толщины парового слоя. При этом толщина образовавшегося парового слоя и величина давления жидкости зависят от формы замкнутого объема. В частности, для сферического объема давление на этом этапе почти в полтора раза выше, чем в объеме с плоскопараллельными стенками (а для толщины слоя пара все наоборот). Объяснение этому аналогично предыдущему случаю, когда рост давления происходит вследствие термического расширения жидкости. На следующем этапе процесс характеризуется наличием

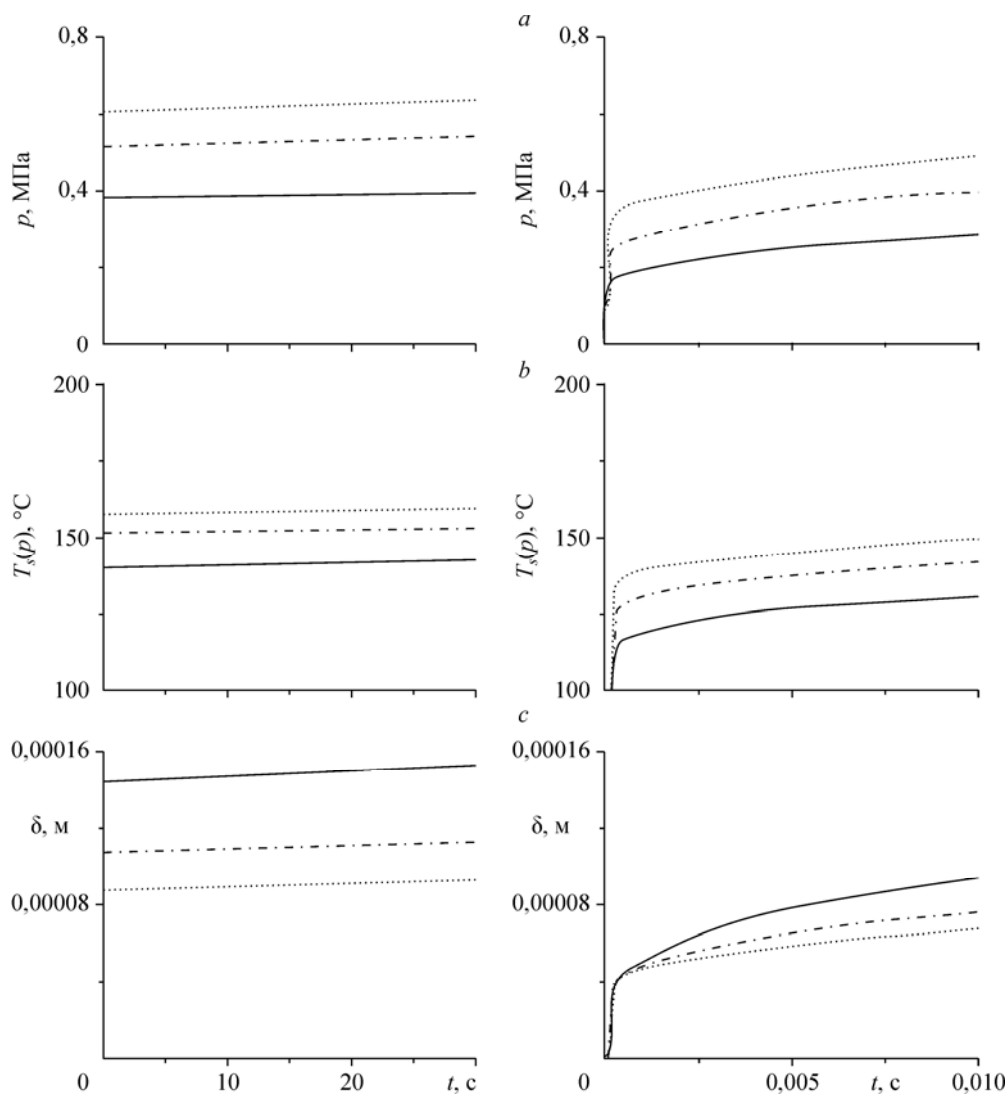


Рис. 2. Динамика роста давления p (а), температуры межфазной поверхности $T_s(p)$ (б) и толщины слоя пара δ (с).

стабильного парового слоя, препятствующего поступлению жидкости к поверхности нагревания. Это приводит к значительному снижению темпа изменения давления, толщины слоя пара и значения температуры межфазной поверхности. На конечном этапе, при достижении температурой межфазной границы значения T_e и по мере прогревания жидкости вследствие ее термического расширения начнется снижение парового слоя до полного исчезновения. При этом жидкость полностью перейдет в состояние с температурой T_e и давлением $p^{(M)}$, определяемым формулой (1.13).

Заключение

В настоящей работе для случаев плоской, радиальной и сферической форм объема получены аналитические и численные решения, описывающие повышение давления жидкости в замкнутом объеме вследствие термического расширения и возможного парообразования.

Показано, что при нагревании жидкости на границе замкнутого объема возможны два режима повышения давления. При первом режиме, когда температура границы нагревания меньше температуры кипения для исходного давления жидкости, повышение давления происходит вследствие ее термического расширения. Второй режим характеризуется возникновением парового слоя, что приводит к более быстрому и сильному повышению давления жидкости на начальном этапе и замедлению процессов теплопереноса (пар начинает действовать как теплоизолятор).

Оба режима нагрева приводят к росту давления в объеме до некоторой предельной величины, определяемой значением граничной температуры. Однако образование парового слоя оказывает определяющее значение на темп роста давления на начальном этапе.

Список литературы

1. **Шаганов В.Ш., Ильясов У.Р., Насырова Л.А.** Тепловой удар в пористой среде, насыщенной жидкостью // Теплофизика и аэромеханика. 2003. Т. 10, № 3. С. 411–422.
2. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. В 2 ч. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 359 с.
3. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
4. **Варгафтик Н.Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
5. **Вержбицкий В.М.** Численные методы. М.: Высшая школа, 2001. 382 с.

*Статья поступила в редакцию 23 июля 2012 г.,
после переработки — 1 марта 2013 г.*