

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.2

ОЦЕНИВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО АЛГОРИТМА ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ю. Е. Воскобойников

¹Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,
630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

²Новосибирский государственный технический университет,
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20

E-mail: voscob@mail.ru

В большинстве используемых алгоритмов вейвлет-фильтрации коэффициенты разложения обрабатываются с использованием пороговых функций, что не позволяет учитывать «энергетическую» особенность каждого коэффициента разложения. В определённой степени этот недостаток устраняется в одном классе мультипликативных алгоритмов, которые учитывают энергию коэффициентов разложения, находящихся в заданной близости от обрабатываемого коэффициента разложения. Однако для эффективной минимизации ошибок вейвлет-фильтрации изображений в данные алгоритмы обработки необходимо ввести параметр, выбор оптимальной величины которого остаётся нерешённой задачей. Поэтому решается задача оценивания оптимальной величины такого параметра, минимизирующего среднеквадратическую ошибку фильтрации. Выполненные исследования показали эффективность предлагаемого алгоритма оценивания и возможность его использования на практике.

Ключевые слова: вейвлет-представление изображений, мультипликативные алгоритмы вейвлет-фильтрации изображений, фильтрующие множители, выбор оптимального параметра фильтрующих множителей.

DOI: 10.15372/AUT20170413

Введение. В последние два десятилетия для фильтрации изображений часто используются алгоритмы, основанные на представлении фильтруемого изображения в базисе вейвлет-функций [1, 2]. Такие алгоритмы состоят их трёх этапов:

- вычисление прямого дискретного вейвлет-преобразования (нахождение коэффициентов разложения по зашумлённым значениям изображения);
- обработка зашумлённых коэффициентов разложения;
- вычисление обратного дискретного вейвлет-преобразования от обработанных коэффициентов разложения (нахождение отфильтрованных значений изображения).

Совокупность этих этапов принято называть вейвлет-фильтрацией. Очевидно, что качество фильтрации зашумлённого изображения определяется алгоритмами обработки, используемыми на втором этапе. Можно выделить два класса алгоритмов обработки зашумлённых коэффициентов разложения: пороговые и мультипликативные.

В пороговых алгоритмах (получивших широкое распространение на практике) коэффициент разложения, меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины, зануляется, в противном случае такой коэффициент сохраняется или подвергается некоторому (в общем случае нелинейному) преобразованию. Пороговая величина играет роль своеобразного управляющего параметра, от величины которого значительно зависит ошибка фильтрации [3, 4]. Существенной чертой мультипликативных алгоритмов является подбор

индивидуального множителя (фильтрующего множителя) для каждого зашумлённого коэффициента разложения. Далее будет показано, что при соответствующем (оптимальном) выборе параметров данные алгоритмы фильтрации могут иметь ошибку фильтрации на 20–30 % меньше по сравнению с пороговыми алгоритмами. Однако описание выбора (или оценивания) таких оптимальных значений параметров в литературе отсутствует, что существенно уменьшает возможность применения алгоритмов этого класса на практике.

Целью данной работы является построение эффективных фильтрующих множителей (дающих меньшую ошибку фильтрации по сравнению с пороговыми алгоритмами фильтрации) и разработка алгоритма, который с приемлемой точностью может оценивать оптимальные значения параметра этих множителей.

Алгоритмы обработки коэффициентов вейвлет-разложений изображений.

Приведём основные понятия и определения, необходимые для изложения результатов работы [3–5].

Любое изображение можно интерпретировать как функцию двух переменных $f(x, y)$. Определим базисные функции для вейвлет-разложения такой функции. Традиционно в литературе по вейвлет-преобразованиям масштабирующая функция (отцовский вейвлет) обозначается как $\varphi(x)$, а материнский вейвлет — как $\psi(x)$. С использованием операций масштабирования и сдвига из этих функций формируются ортонормированные базисные функции $\{\varphi_{j,n}(x)\}$, $\{\psi_{j,n}(x)\}$ в пространстве функций одной переменной $f(x)$. Тензорное произведение функций $\{\varphi_{j,n}(x)\}$, $\{\psi_{j,n}(x)\}$ порождает следующие ортонормированные базисные функции для разложения изображения:

$$\{\varphi\varphi_{j,n,m}(x, y) = \varphi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)\}; \quad \{\varphi\psi_{j,n,m}(x, y) = \varphi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)\};$$

$$\{\psi\varphi_{j,n,m}(x, y) = \psi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)\}; \quad \{\psi\psi_{j,n,m}(x, y) = \psi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)\}.$$

Соответствующие коэффициенты разложения принято называть:

— аппроксимирующими ($A_j = \{aa_{j,n,m}\}$), полученными как коэффициенты разложения по базису $\{\varphi\varphi_{j,n,m}(x, y)\}$;

— горизонтальными детализирующими ($H_j = \{ad_{j,n,m}\}$), полученными как коэффициенты разложения по базису $\{\varphi\psi_{j,n,m}(x, y)\}$;

— вертикальными детализирующими ($V_j = \{da_{j,n,m}\}$), полученными как коэффициенты разложения по базису $\{\psi\varphi_{j,n,m}(x, y)\}$;

— диагональными детализирующими ($D_j = \{dd_{j,n,m}\}$), полученными как коэффициенты разложения по базису $\{\psi\psi_{j,n,m}(x, y)\}$.

На практике изображение задаётся матрицей F (уровень разложения j_0). На первом уровне разложения (номер $j_0 + 1$) вычисляются аппроксимирующие коэффициенты $A_1 = \{aa_{j_0+1,n,m}\}$ и детализирующие коэффициенты $H_1 = \{ad_{j_0+1,n,m}\}$, $V_1 = \{da_{j_0+1,n,m}\}$, $D_1 = \{dd_{j_0+1,n,m}\}$. На втором уровне разложения (номер $j_0 + 2$) аналогичной обработке подвергается матрица коэффициентов $A_1 \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2)$. Обобщая эти шаги, приходим к следующей схеме разложения:

$$F \rightarrow (A_1, H_1, V_1, D_1) \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2, H_1, V_1, D_1) \rightarrow \dots$$

Отметим закономерность изменения размеров двумерных массивов коэффициентов разложения, а именно на каждом уровне разложения размеры массивов новых коэффициентов уменьшаются в 2 раза по сравнению с предыдущими массивами. При этом сумма размеров всех массивов коэффициентов равна размеру исходной матрицы F , что свидетельствует о сохранении объёма информации, содержащейся в F .



Рис. 1

Для иллюстрации разложения изображения на рис. 1, *a* представлена известная фотография LENA (размером 256×256 пикселей), часто используемая как тестовое изображение при обработке, а на рис. 2 показаны изображения массивов коэффициентов разложения первого уровня A_1 , H_1 , V_1 , D_1 (матрицы размера 128×128 пикселей). Видно, что матрица A_1 представляет собой сглаженный образ исходной фотографии, а остальные массивы «дополняют» этот образ до исходной фотографии LENA.

Показано [3, 4], что при разложении зашумлённого изображения ошибки вычисления детализирующих коэффициентов на два порядка и более выше по сравнению с аппроксимирующими коэффициентами. Поэтому на втором этапе вейвлет-фильтрации обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты. Для удобства дальнейшей записи алгоритмов обработки любой из таких коэффициентов будем обозначать как $\tilde{d}_{n,m}$, где индексы n, m определяют номер строки и столбца соответствующей матрицы коэффициентов разложения (номер уровня разложения j при этом опускается).

Общим недостатком пороговых алгоритмов (часто используемых на практике) является то, что все коэффициенты некоторого уровня разложения обрабатываются с одной или двумя одинаковыми пороговыми величинами, что не позволяет учитывать «энергию» каждого коэффициента разложения при его обработке. Поэтому в ряде публикаций был

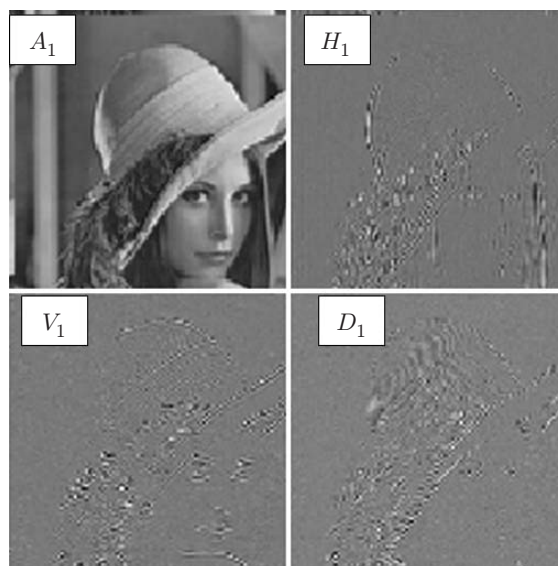


Рис. 2

предложен подход, который в определённой степени устраняет этот недостаток и учитывает энергию коэффициентов разложения, находящихся в некоторой близости от обрабатываемого коэффициента.

Представим один из таких алгоритмов [6] применительно к фильтрации изображений, введя в него новые элементы. Определим апертуру $B_{n,m}$, которая включает в себя коэффициенты разложения $\tilde{d}_{p,q}$ зашумлённого изображения (номер уровня разложения опускается) с индексами $n - L \leq p \leq n + L$, $m - L \leq q \leq m + L$, т. е. коэффициенты $\tilde{d}_{p,q}$ принадлежат квадрату с центром в точке (n, m) и длинами сторон $(2L + 1)$, где L — параметр апертуры. Общее число коэффициентов, попавших в апертуру, $M = (2L + 1)^2$. Далее введём величину

$$S_{n,m}^2 = \sum_{p,q \in B_{n,m}} \tilde{d}_{p,q}^2$$

и запишем алгоритм обработки коэффициента $\tilde{d}_{n,m}$ в виде

$$\hat{d}_{n,m} = w_{n,m}^{(1)}(\beta) \tilde{d}_{n,m}, \quad (1)$$

где фильтрующий множитель определяется выражением

$$w_{n,m}^{(1)}(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{n,m} < \beta \lambda_j^{(1)}, \\ 1 - (\beta(\lambda_j^{(1)}/S_{n,m}))^2, & \text{если } S_{n,m} \geq \beta \lambda_j^{(1)}, \end{cases} \quad (2)$$

$\lambda_j^{(1)} = \sigma \sqrt{2 \ln(N_j)}$ — уровеньзависимая пороговая величина, σ — среднеквадратическое отклонение шума регистрации изображения, N_j — общее число элементов матрицы детализирующих коэффициентов на j -м уровне разложения. Отличие фильтрующего множителя (2) от известных в литературе заключается в том, что в него входит «управляющий» параметр β , выбор которого позволит минимизировать ошибку фильтрации. Видно, что для каждого коэффициента разложения $\tilde{d}_{j,k}$ вычисляется свой фильтрующий множитель, и это свойство относит алгоритм (1) к классу мультипликативных алгоритмов вейвлет-фильтрации.

В работе [7] был предложен фильтрующий множитель, имеющий вид

$$w_{n,m}^{(2)}(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{n,m} < \beta \lambda^{(2)}, \\ 1 - (\beta(\lambda^{(2)}/S_{n,m}))^2, & \text{если } S_{n,m} \geq \beta \lambda^{(2)}, \end{cases} \quad (3)$$

где величина $\lambda^{(2)} = \sigma \sqrt{2 \ln((2L + 1)^2)}$ уже не зависит от уровня разложения. Более сложное определение фильтрующего множителя было дано в [8]:

$$w_{n,m}^{(3)}(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{n,m} < \beta \lambda_j^{(3)}, \\ 1 - (\beta(\lambda_j^{(3)}/S_{n,m}))^2, & \text{если } S_{n,m} \geq \beta \lambda_j^{(3)}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\lambda_j^{(3)} = \sigma \sqrt{2 \ln(N_1/2^j)}$, N_1 — размер (в пикселях) стороны обрабатываемого изображения. Заметим, что в множителях (3), (4), как и в (2), был введён параметр β , который оказывает существенное влияние на ошибку вейвлет-фильтрации. Это иллюстрируют результаты следующего вычислительного эксперимента.

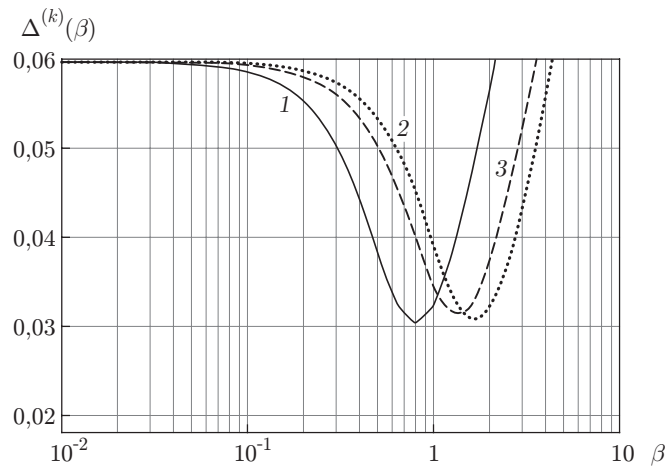


Рис. 3

Обозначим через $\hat{F}^{(k)}(\beta)$, $k = 1, 2, 3$, результат вейвлет-фильтрации зашумлённого изображения TARGET (относительный уровень шума 0,06, $L = 1$) с фильтрующими множителями $w_{n,m}^{(k)}(\beta)$ (рис. 1, b). Относительную ошибку фильтрации определим как $\Delta^{(k)}(\beta) = \|\hat{F}^{(k)}(\beta) - F\|/\|F\|$, где $\|F\|$ — евклидова норма матрицы $\|F\| = \sqrt{\sum_i \sum_j F_{i,j}^2}$.

На рис. 3 представлены относительные ошибки фильтрации: значения $\Delta^{(1)}(\beta)$ (кривая 1), $\Delta^{(2)}(\beta)$ (кривая 2), $\Delta^{(3)}(\beta)$ (кривая 3). При этом минимальные ошибки фильтрации: $\Delta_{\min}^{(1)}(\beta) = 0,030$, $\Delta_{\min}^{(2)}(\beta) = 0,031$, $\Delta_{\min}^{(3)}(\beta) = 0,032$. Для сравнения заметим, что минимальная ошибка при использовании «жёсткой» пороговой функции равна 0,041, а для «мягкой» функции — 0,039 (обзор пороговых алгоритмов обработки и выбор их параметров дан в [3, 4]).

Анализ этого рисунка и величин минимальных ошибок для разных алгоритмов обработки позволяет сделать следующие выводы:

— для уменьшения ошибки вейвлет-фильтрации изображений целесообразно вместо пороговых алгоритмов использовать мультипликативные алгоритмы с фильтрующими множителями (2), (3);

— минимальное значение ошибок фильтрации достигалось при $\beta_{\text{opt}} = 0,794$ (множитель (2)) и при $\beta_{\text{opt}} = 1,585$ (множитель (3)), поэтому значение параметра $\beta = 1$ не соответствует минимальной ошибке фильтрации (см. рис. 3), т. е. введение параметра настройки β оказалось целесообразным;

— необходим алгоритм выбора параметра β , позволяющий с приемлемой точностью оценить оптимальное значение β_{opt} , при котором ошибка вейвлет-фильтрации минимальна.

Заметим, что определить точное значение β_{opt} возможно только в вычислительном эксперименте, когда задаётся точное изображение, которое затем искажается шумом измерения и зашумлённое подвергается фильтрации. Поэтому возникает задача построения алгоритма оценивания β_{opt} с приемлемой точностью на практике (т. е. при фильтрации реальных изображений).

Попытаемся построить такой алгоритм на основе критерия оптимальности линейного алгоритма фильтрации.

Алгоритм оценивания оптимального параметра фильтрующих множителей. Критерий [9] является частным случаем критерия оптимальности линейного регуляризирующего алгоритма [10], успешно используемого для оценивания оптимального значе-

ния параметра регуляризации [11, 12]. Хотя критерий имеет строгое обоснование только для линейных алгоритмов, он позволяет достаточно точно оценить оптимальные пороговые величины пороговых функций нелинейных алгоритмов вейвлет-фильтрации.

Приведём основные расчётные соотношения для оценивания β_{opt} [3, 4, 13]. Введём следующую статистику: $\rho_W(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} (\tilde{f} - \hat{f}^{(k)}(\beta))^T \tilde{f}$, где \tilde{f} — вектор, составленный из столбцов зашумлённой матрицы изображения \tilde{F} ; $\hat{f}^{(k)}(\beta)$ — вектор, составленный из столбцов матрицы $\hat{F}^{(k)}(\beta)$, т. е. результата вейвлет-фильтрации с использованием фильтрующего множителя $w_{n,m}^{(k)}(\beta)$ с заданной величиной параметра β . В качестве оценки для β_{opt} примем величину β_W , для которой выполняется неравенство

$$\vartheta_{\alpha/2, N} < \rho_W(\beta_W) < \vartheta_{1-\alpha/2, N}. \quad (5)$$

Здесь $\vartheta_{\alpha/2, N}, \vartheta_{1-\alpha/2, N}$ — квантили χ^2 -распределения с числом степеней свободы N (общее число пикселей обрабатываемого изображения) уровней $\alpha/2, 1 - \alpha/2$ соответственно; α — вероятность ошибки первого рода при проверке статистической гипотезы об оптимальности значения β_W (обычно $\alpha = 0,05$). Заметим, что на практике вычисление β_W сводится к решению нелинейного уравнения $\rho_W(\beta) = N$. Однако итерационный процесс решения этого нелинейного уравнения (вычисляется последовательность приближённых решений $\beta^{(n)}$) прекращается, как только $\rho_W(\beta^{(n)})$ удовлетворяет неравенству (5). Количество необходимых здесь итераций гораздо меньше, чем при поиске корня нелинейного уравнения с заданной точностью (например, $\varepsilon \in [10^{-8}, 10^{-6}]$). Это обуславливает возможность эффективно использовать медленные итерационные алгоритмы (например, метод дихотомии — деление отрезка пополам). Если $N > 30$, то границы неравенства (5) при $\alpha = 0,05$ можно вычислить по формулам $\vartheta_{0,025, N} = N - 1,96\sqrt{2N}$, $\vartheta_{0,975, N} = N + 1,96\sqrt{2N}$. Это следует из того факта, что при $N > 30$ χ^2 -распределение с числом степеней свободы N хорошо аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием N и дисперсией $2N$.

Заметим, что на практике дисперсия шума σ^2 неизвестна. Тогда используют её оценку $\hat{\sigma}^2 = [\text{median}\{|dd_{1,n,m}|\}/0,06745]^2$, где $\text{median}\{|dd_{1,n,m}|\}$ — вычисление медианы модулей диагональных детализирующих коэффициентов первого уровня разложения. Показано [3, 4], что эта оценка имеет приемлемую точность (отклонение составляет 8–10 %).

Результаты численных исследований. Перейдём к исследованию свойства оптимальности оценки β_W . Для этого был проведён обширный вычислительный эксперимент по фильтрации изображений LENA и TARGET (см. рис. 1), разных по своим частотным характеристикам. Заметим, что LENA является стандартным изображением при тестировании алгоритмов фильтрации двумерных сигналов. В качестве вейвлетов использовались ортогональные вейвлеты Добеши8. Точные значения изображений искажались нормально распределённым шумом измерений с нулевым средним и дисперсией, определяемой по задаваемому относительному уровню шума $\delta_\eta = 0,02; 0,05; 0,10$, который находился из выражения $\delta_\eta = \|\tilde{F} - F\|/\|F\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы.

В качестве точностной характеристики предложенной оценки β_W введём коэффициент эффективности $E = \Delta(\beta_{\text{opt}})/\Delta(\beta_W)$. Очевидно, что чем больше E отклоняется от 1 к 0, тем больше проигрыш в точности алгоритма фильтрации с параметром β_W по сравнению с минимально возможной ошибкой $\Delta(\beta_{\text{opt}})$. Величина E является случайной, и для вычисления её числовых характеристик обратимся к методу статистического моделирования. Для этого в l -м эксперименте генерировалась матрица $\eta^{(l)}$ псевдослучайных нормально распределённых чисел с нулевым средним и дисперсией σ^2 , определяемой по задаваемому относительному уровню шума. Затем вычислялась матрица зашумлённого изображения

δ_η	Изображение LENA			Изображение TARGET		
	E_{\min}	\bar{E}	E_{\max}	E_{\min}	\bar{E}	E_{\max}
0,02	0,811	0,921	0,991	0,752	0,912	0,956
0,05	0,840	0,943	0,994	0,796	0,923	0,987
0,10	0,885	0,961	0,996	0,811	0,941	0,991

$\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, N_{\text{sam}}$, которая подвергалась вейвлет-фильтрации с множителями $w_{n,m}^{(k)}(\beta_W)$. По отфильтрованному изображению $\hat{F}^{(l)}$ вычислялось значение $E^{(l)}$ — l -й элемент выборочной совокупности $\{E^{(l)}\}$, $l = 1, 2, \dots, N_{\text{sam}}$, по которой находились среднее (\bar{E}), минимальное (E_{\min}) и максимальное (E_{\max}) значения. Характеристики приведены в таблице для разных уровней шума и фильтрующего множителя $w_{n,m}^{(2)}(\beta_W)$. Примерно такие же значения характеристик были получены для множителя $w_{n,m}^{(1)}(\beta_W)$, поэтому они не приводятся.

Заключение. Анализируя числовые характеристики коэффициента эффективности, приведённые в таблице, можно сделать следующие выводы:

— предложенный алгоритм позволяет достаточно точно оценить оптимальное значение β_{opt} , не привлекая при этом априорную информацию о фильтруемом изображении;

— значение \bar{E} показывает, что в среднем применение оценки β_W по сравнению с оптимальным значением β_{opt} увеличивает ошибку вейвлет-фильтрации не более чем на 8 %;

— мультипликативные множители $w^{(1)}(\beta_W)$, $w^{(2)}(\beta_W)$ имеют значительно меньшую (на 20–25 %) ошибку фильтрации по сравнению с пороговыми алгоритмами вейвлет-фильтрации.

Исходя из этих выводов, можно отметить эффективность использования мультипликативных алгоритмов вейвлет-фильтрации с фильтрующими множителями $w^{(1)}(\beta_W)$, $w^{(2)}(\beta_W)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2005. 304 с.
2. Астафьева Н. М. Вейвлет-преобразования. Основные свойства и примеры применения. М.: ИКИ РАН, 1994. № 1891. 56 с.
3. Воскобойников Ю. Е. Вейвлет-фильтрация сигналов и изображений (с примерами в Mathcad). Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2015. 188 с.
4. Воскобойников Ю. Е. Алгоритмы вейвлет-фильтрации с примерами в пакете Mathcad. Изд-во: "Palmarium Academic Publishing", 2016. 196 с.
5. Mallat S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$ // Trans. AMS. 1989. **315**, N 1. P. 69–87.
6. Cai T. T., Silverman B. W. Incorporating information on neighbouring coefficients into wavelet estimation // Sankhya: The Indian Journ. Stat. 2001. **63**, Ser. B, Pt. 2. P. 127–148.
7. Chen G. Y., Bui T. D. Multiwavelet denoising using neighbouring coefficients // IEEE Signal Process. Lett. 2003. **10**, N 7. P. 211–214.
8. Om H., Biswas M. An improved image denoising method based on wavelet thresholding // Journ. Signal and Inform. Process. 2012. **3**, N 1. P. 109–116.
9. Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В., Колкер А. Б. Фильтрация сигналов и изображений: фурье и вейвлет алгоритмы (с примерами в Mathcad). Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. 188 с.

10. **Воскобойников Ю. Е.** Оценка оптимального параметра регуляризирующего алгоритма восстановления изображений // *Автометрия*. 1995. № 3. С. 64–72.
11. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. 186 с.
12. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2007. 184 с.
13. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В.** Оценка оптимальных пороговых величин в алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений // *Автометрия*. 2011. **47**, № 2. С. 3–14.

Поступила в редакцию 29 марта 2017 г.
