

РАЗРЫВ ТЕЛА С ЛИНЕЙНОЙ ДИСЛОКАЦИЕЙ

М. Я. Леонов, К. Н. Русинко

(*Фрунзе*)

Исследуется хрупкое разрушение неограниченного тела с внедренной материальной полу平面 (линейной дислокацией) при равномерном растяжении его на бесконечности силами, перпендикулярными указанной полу平面. Основной целью данной работы является выяснение влияния различных законов взаимодействия противоположных берегов трещины на условия хрупкого разрушения. В этом смысле она является продолжением и развитием работы [1].

§ 1. Исходная модель твердого тела. Будем рассматривать идеально однородную модель хрупкого тела, обладающую следующими свойствами: 1) максимальные растягивающие напряжения не превосходят некоторой константы материала (σ_0), называемой сопротивлением отрыву; 2) зависимость между деформациями и напряжениями описывается законом Гука, если растягивающие напряжения не достигают величины σ_0 ; 3) в модели образуются трещины, когда максимальное нормальное напряжение в теле, деформации которого всюду подчиняются закону Гука, превосходит σ_0 ; 4) берега трещины притягиваются напряжением σ , являющимся произвольной непрерывной неотрицательной невозрастающей функцией $\sigma(h)$ расстояния h между берегами щели (фиг. 1), причем считается

$$\sigma(0) = \sigma_0, \quad \int_0^\infty \sigma(h) dh < \infty \quad (1.1)$$

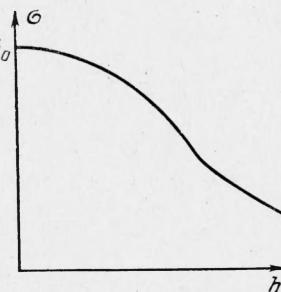
Как и в работе [1], здесь не делается никаких предположений относительно малости площади взаимодействующей части поверхности трещины.

§ 2. Формулировка задачи. Рассмотрим в условиях плоской деформации неограниченное тело, в которое внедрена материальная полу平面 толщины μ ; в бесконечности к телу приложены нормальные напряжения s , перпендикулярные внедренной полу平面.

Если бы указанное тело оставалось сплошным и его деформация всюду подчинялась закону Гука, то нормальные напряжения σ_y в точках, лежащих на продолжении внедренной полу平面, представлялись бы в виде [2]

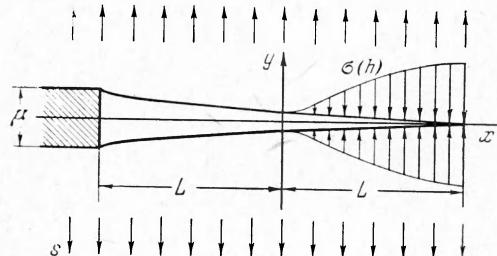
$$\sigma_y = s + \frac{E\mu}{4\pi(1-\nu^2)l} \quad (2.1)$$

Здесь l — расстояние от границы внедренной полу平面, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона. При достаточно малых l напряжения, определенные этой формулой, будут превосходить сопротивление отрыву. Следовательно, в этой области рассматриваемой модели образуется трещина.



Фиг. 1

Под действием растягивающих напряжений s , приложенных к телу в бесконечности, указанная трещина будет развиваться. При заданной фиксированной мощности μ внедренного слоя требуется определить максимальную интенсивность нагрузки s (пределную интенсивность нагрузки s), при которой возможно равновесие рассматриваемого тела. Начало координат выберем в центре трещины, ось x направим по трещине, ось y — в направлении растяжения тела (фиг. 2). Расстояние между берегами щели равно удвоенному перемещению по оси y поверхностных точек трещины от действия давления $p(x)$, дополняющего напряжения (2.1) до напряжений $\sigma(h)$, т. е.



Фиг. 2

берегами щели равно удвоенному перемещению по оси y поверхностных точек трещины от действия давления $p(x)$, дополняющего напряжения (2.1) до напряжений $\sigma(h)$, т. е.

$$p(x) = s + \frac{E\mu}{4\pi(1-v^2)(x+L)} - \sigma[2v(x, +0)] \quad (2.2)$$

Здесь $v(x, +0)$ — нормальное смещение берега трещины, L — полудлина трещины. Для определения $v(x, +0)$, следя работой [2], получим

$$v(x, +0) = \frac{1-v^2}{\pi E} \int_{-L}^L p(\xi) \Lambda(x) d\xi, \quad \Lambda(x) = \ln \frac{L^2-x\xi + \sqrt{(L^2-x^2)(L^2-\xi^2)}}{L^2-x\xi - \sqrt{(L^2-x^2)(L^2-\xi^2)}}$$

Подставив сюда значение давления, даваемого формулой (2.2), и вычислив соответствующие интегралы, получим [2]

$$\begin{aligned} v(x, +0) = & \frac{2(1-v^2)}{E} s \sqrt{L^2-x^2} + \\ & + \frac{\mu}{2\pi} \arccos \frac{x}{L} - \\ & - \frac{1-v^2}{\pi E} \int_{-L}^L \sigma[2v(\xi, +0)] \Lambda(x) d\xi \end{aligned}$$

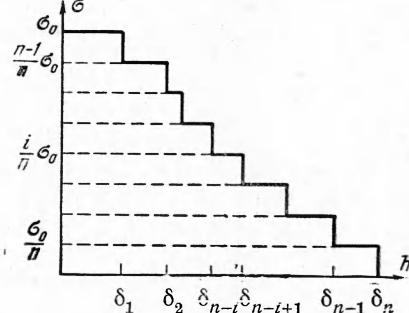
Если в последней формуле функцию $\sigma[2v(x, +0)]$ задать в явном виде через $2v(x, +0)$, то получим интегральное уравнение для нахождения перемещения $v(x, +0)$. В этом уравнении¹ неизвестным является также и параметр L . Этот параметр найдем из условия ограниченности растягивающих напряжений, которое эквивалентно [3] соотношению

$$\frac{\partial v(x, +0)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.4)$$

Отметим, что при нагрузке s , меньшей предельной, в точке $x = -L$, $y = 0$ нормальные напряжения бесконечны². Эти напряжения, однако,

¹ В работе [2] излагается приближенное решение этого уравнения для случая линейной зависимости σ [2 v].

² Как увидим в дальнейшем, при действии предельной нагрузки нормальное напряжение σ_y является ограниченным и в точке $x = -L$, $y = 0$.



Фиг. 3

отрицательны (сжимающие), и поэтому при исследовании трещинообразования во внимание не берутся.

Уравнение (2.3) и условие (2.4) достаточны для определения перемещения берега трещины.

§ 3. Многоступенчатый закон притяжения противоположных берегов трещины. Заменим временно зависимость $\sigma(h)$ (фиг. 1) ломаной линией, как показано на фиг. 3. Будем пока считать, что берега щели или притягиваются с напряжением $\sigma_0 i/n$ ($i = 1, 2, \dots, n$), если расстояние между ними находится в пределах от b_{n-i} до b_{n-i+1} , или не взаимодействуют в противном случае; здесь n — произвольное целое число, b_i — любые величины (с размерностью длины), удовлетворяющие неравенствам

$$\delta_0 = 0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_n$$

Рассмотрим сначала случай $\mu < \delta_n$. В этом случае берега щели взаимодействуют, как показано на фиг. 4. Границные условия для этой щели будут

$$\sigma[2v(x, +0)] = \begin{cases} \sigma_0 r/n & \text{при } -L < x < b_{r+1} \\ \sigma_0(r+1)/n & \text{при } b_{r+1} < x < b_{r+2} (r \leq n) \\ \sigma_0(r+2)/n & \text{при } b_{r+2} < x < b_{r+3} \\ \sigma_0 & \text{при } b_n < x < L \end{cases} \quad (3.1)$$

где r — целое число, зависящее от величины μ , b_i ($i = r+1, r+2, \dots, n$) — неизвестные величины, уравнения для их определения будут составлены ниже.

При таком законе взаимодействия по формуле (2.3) легко найти перемещение точек берега трещины.

В этом случае

$$(3.2) \quad v(x, +0) = \frac{1-v^2}{\pi E} \left\{ 2\pi s \sqrt{L^2 - x^2} + \right. \\ \left. + \frac{E\mu}{2(1-v^2)} \arccos \frac{x}{L} - \frac{2\pi r\sigma_0}{n} \sqrt{L^2 - x^2} - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_0}{n} \sum_{j=r+1}^n \left[2 \sqrt{L^2 - x^2} \arccos \frac{b_j}{L} + \right. \right. \\ \left. \left. + (x-b_j) \ln \frac{L^2 - b_j x + \sqrt{(L^2 - b_j^2)(L^2 - x^2)}}{L^2 - b_j x - \sqrt{(L^2 - b_j^2)(L^2 - x^2)}} \right] \right\}$$

Здесь и в дальнейшем имеем в виду главные значения функции $\arccos x/L$.

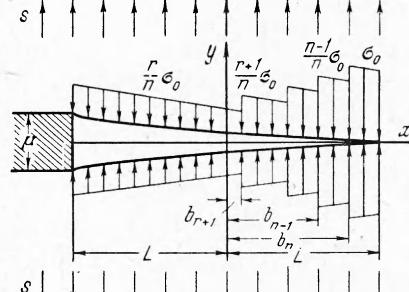
Напряжения на конце щели $x = L$ должны быть конечными, что эквивалентно условию (2.4). Это условие дает

$$\pi s L + \frac{E\mu}{4(1-v^2)} - \frac{\sigma_0 L}{n} \sum_{j=r+1}^n (\sin \gamma_j + \gamma_j) - \frac{\pi r \sigma_0 L}{n} = 0 \quad (3.3)$$

$$\gamma_i = \arccos \frac{b_i}{L} \quad (i = r+1, r+2, \dots, n) \quad (3.4)$$

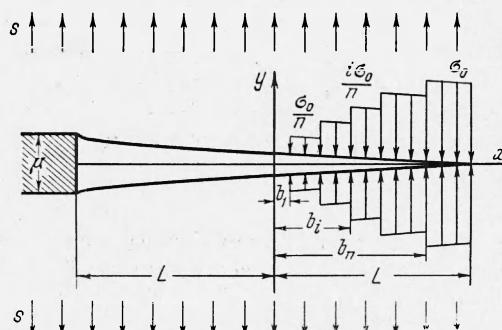
Соотношение (3.3) можно преобразовать к виду

$$L = \frac{E\mu}{4(1-v^2)} \frac{n}{\sigma_0} \left[\sum_{j=r+1}^n (\sin \gamma_j + \gamma_j) + \pi r - \frac{\pi ns}{\sigma_0} \right]^{-1} \quad (3.5)$$



Фиг. 4

Чтобы составить $n - r$ уравнений для $n - r$ неизвестных величин b_i , обратимся к закону притяжения между поверхностями трещины. Зависимость интенсивности взаимодействия берегов щели от расстояния h между ними представлена на фиг. 3. В точках, где $2v = h = \delta_{n-i+1}$ ($i = r + 1, r + 2, \dots, n$), указанное усилие взаимодействия меняется на



Фиг. 5

Пользуясь формулой (3.2), запишем эти уравнения в развернутом виде:

и взаимодействий меняется на величину δ_0 / n . Абсциссы этих точек на фиг. 4 обозначены через b_i . Приравнив удвоенное перемещение $2v(x, +0)$ указанных точек к соответствующим значениям δ_i , получим уравнения для определения неизвестных величин

$$\begin{aligned} 2v(b_{r+1}, +0) &= \delta_{n-r} \\ 2v(b_{r+2}, +0) &= \delta_{n-r-1}, \\ 2v(b_{r+3}, +0) &= \delta_{n-r-2}, \\ 2v(b_n, +0) &= \delta_1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Сложив левые и правые части последних равенств (в том числе, и пропущенных, обозначенных многоточием), получим

$$\frac{\pi E}{1 - v^2} \sum_{j=1}^{n-r} \delta_j = \frac{E\mu}{1 - v^2} \sum_{i=r+1}^n \gamma_i + 4L \left(\pi s - \frac{\varsigma_0}{n} \sum_{i=r+1}^n \gamma_i - \frac{\pi r \varsigma_0}{n} \right) \quad (3.8)$$

Исключив параметр L из формул (3.5) и (3.8), находим

$$s = \frac{\sigma_0}{\pi n} \left\{ a_1 \left[\pi r + \sum_{j=r+1}^n (\sin \gamma_j + \gamma_j) \right] + \pi r \sum_{j=r+1}^n (\sin \gamma_j - \gamma_j) - \left(\sum_{j=r+1}^n \gamma_j \right)^2 \right\} \left[\sum_{j=r+1}^n (\sin \gamma_j - \gamma_j) + a_1 \right]^{-1} \quad (3.9)$$

$\left(a_1 = \frac{\pi}{\mu} \sum_{j=1}^{n-r} \delta_j \right)$

Зависимость (3.9) является основной при дальнейшем исследовании разрушения тела с дислокацией.

Рассмотрим теперь случай $\mu > \delta_n$. В этом случае берега трещины не взаимодействуют на некотором участке $-L < x < b_1$, а на остальном участке поверхности щели притягиваются, как показано на фиг. 5. Границные условия для этой щели будут

$$\sigma[2v(x, +0)] = \begin{cases} 0 & \text{при } -L < x < b_1 \\ \sigma_0/n & \text{при } b_1 < x < b_2 \\ 2\sigma_0/n & \text{при } b_2 < x < b_3 \\ \dots & \dots \\ \sigma_0 & \text{при } b_n < x < L \end{cases} \quad (3.10)$$

Из сопоставления формул (3.1) и (3.10) заключаем, что в данном случае ($\mu > \delta_n$) связь между напряжением s и параметрами трещины γ_i выражается по формуле (3.9), в которой следует считать $r = 0$.

§ 4. Определение предельной нагрузки. Предположим, что $\mu < \delta_n$. Из формул (3.5), (3.7), полученных в предположении $\delta_{n-r} < \mu < \delta_{n-r+1}$, возможно, вообще говоря, определить размеры щели $(L, b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n)$, соответствующие данной нагрузке s и мощности дислокации μ . Однако в дальнейшем будем находить максимальное значение нагрузки s (предельную интенсивность нагрузки s), при которой возможно равновесие рассматриваемой модели тела, имеющей дислокацию заданной мощности μ . В данном случае ($\mu < \delta_n$) предельная нагрузка является максимумом величины s , определяемой формулой (3.9) как функция переменных γ_i ($i = r+1, r+2, \dots, n$), причем величины γ_i связаны $n-r$ соотношениями (3.7), из которых $n-r-1$ являются независимыми¹.

Для определения максимума правой части формулы (3.9) введем новые переменные

$$z_1 = \sum_{i=r+1}^n \gamma_i, \quad z_2 = \sum_{j=r+1}^n \sin \gamma_j \quad (4.1)$$

Величины γ_i , определяемые формулой (3.4), удовлетворяют неравенствам $0 < \gamma_i < \pi$ ($i = r+1, r+2, \dots, n$). Следовательно, переменные z_1 и z_2 могут принимать только положительные значения².

При подстановке (4.1) формула (3.9) преобразуется к виду

$$s = \sigma_0 \frac{a_1(\pi r + z_1 + z_2) + \pi r(z_2 - z_1) - z_1^2}{\pi n(z_2 - z_1 + a_1)} \quad (4.2)$$

Правая часть этой формулы равна нулю при

$$a_1(\pi r + z_1 + z_2) + \pi r(z_2 - z_1) - z_1^2 = 0 \quad (4.3)$$

В дальнейшем под областью изменения переменных z_1, z_2 будем иметь в виду область (в плоскости z_1, z_2), ограниченную кривой (4.3) и положительным направлением осей z_1 и z_2 .

Из формулы (4.2) следует, что при $z_1 = a_1$ правая часть этой формулы не зависит от z_2 . Кроме того, независимо от значения $z_2 > 0$ имеем

$$\frac{\partial s}{\partial z_1} \Big|_{z_1=a_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial z_1^2} \Big|_{z_1=a_1} < 0$$

¹ Формула (3.9) получена из соотношений (3.7), поэтому уравнения (3.7) и (3.9) линейно зависимы.

² Формулы (3.4) и (4.1) накладывают дополнительное ограничение на переменные z_1 и z_2 (а именно, $z_1 < \pi(n-r)$, $z_2 < n-r$), которые, однако, при исследовании максимума правой части соотношения (4.2) можно не учитывать.

Отсюда заключаем, что правая часть формулы (4.2) имеет максимум при произвольном значении $z_2 > 0$, если

$$z_1 = \sum_{j=r+1}^n \gamma_j = a_1 \quad (4.4)$$

Этот максимум (предельная нагрузка) представляется в виде

$$S_{\max} = \frac{\sigma_0}{n} \left(\frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{n-r} \delta_j + r \right) \quad (4.5)$$

Легко установить, что функция s , определяемая формулой (4.2), других максимумов не имеет.

Формула (4.4) вместе с $n - r - 1$ независимыми равенствами (3.7) служит для нахождения величин b_i ($i = r + 1, r + 2, \dots, n$), соответствующих предельной нагрузке, которые здесь нас не интересуют.

Рассмотрим теперь случай $\mu > \delta_n$. В этом случае предельная нагрузка совпадает с максимумом величины s , определяемой формулой (3.9) как функции переменных γ_i . Этот максимум представляется формулой (4.5), в которой следует считать $r = 0$. Таким образом, при многоступенчатом законе притяжения противоположных берегов трещины предельная интенсивность S_* нагрузки s будет

$$\begin{aligned} S_* &= \frac{\sigma_0}{n} \left(\frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{n-r} \delta_j + r \right) \quad (r = 1, \dots, n) \\ &\quad \text{при } \delta_{n-r} < \mu < \delta_{n-r+1} \\ S_* &= \frac{\sigma_0}{n\mu} \sum_{j=1}^n \delta_j \quad \text{при } \mu > \delta_n \end{aligned} \quad (4.6)$$

Замечание. Из равенства (3.2) и (3.3) легко получить, что при действии предельной нагрузки имеют место формулы

$$\frac{\partial v(x, +0)}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = -L, \quad \frac{\partial v(x, +0)}{\partial x} < 0 \quad \text{при } -L < x < L \quad (4.7)$$

Отсюда заключаем, что при предельной нагрузке (а следовательно, и при нагрузке, меньшей предельной) перемещение берега трещины $v(x, +0)$ является убывающей функцией от x . Таким образом, принимаемая схема взаимодействия берегов трещины, изображенная на фиг. 4, 5, является правильной.

Кроме того, из первой формулы (4.7) можно заключить, что при действии предельной нагрузки нормальные напряжения ограничены и в точке $x = -L, y = 0$.

§ 5. Дислокационная теорема. Работа T_0 , которую необходимо затратить на преодоление внутренних сил при образовании единицы свободной поверхности трещины в сплошном теле, называется поверхностной энергией твердого тела, т. е.

$$T_0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sigma(h) dh \quad (5.1)$$

Частной поверхностной энергией назовем величину

$$T(H) = \frac{1}{2} \int_0^H \sigma(h) dh \quad (5.2)$$

При многоступенчатом законе взаимодействия берегов трещины (фиг. 3) удвоенная поверхностная энергия представляется площадью, ограниченной координатными осями (σ, h) и ломаной линией $\sigma(h)$, т. е.

$$2T_0 = \int_0^{\delta_n} \sigma(h) dh = \frac{\sigma_0}{n} \sum_{j=1}^n \delta_j \quad (5.3)$$

а удвоенная частная поверхностная энергия — площадью, заштрихованной на фиг. 6. Предположим, что величина H удовлетворяет неравенствам

$$\delta_{n-r} < H < \delta_{n-r+1}$$

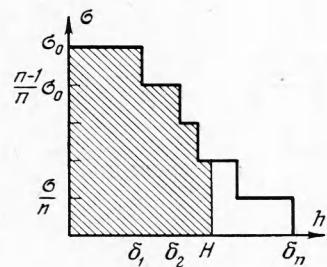
В этом случае имеем

$$2T(H) = \frac{\sigma_0}{n} \left(\sum_{j=1}^{n-r} \delta_j + Hr \right) \quad (5.4)$$

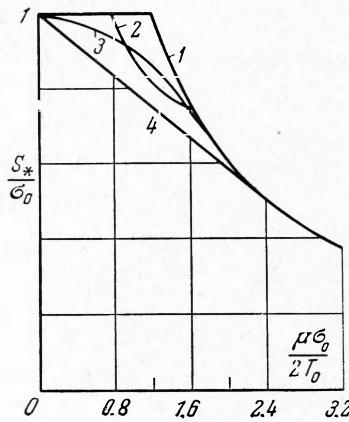
Очевидно, что при $H \geq \delta_n$ имеем

$$T(H) = T_0 \quad (5.5)$$

Сопоставляя равенства (4.6) с соотношениями (5.3), (5.4), (5.5), при многоступенчатом законе притяжения противоположных берегов трещины приходим к следующему значению предельной интенсивности



Фиг. 6



Фиг. 7

разрывающей нагрузки, приложенной к телу с дислокацией заданной мощности μ :

$$S_* = \frac{2T(\mu)}{\mu} \quad (2T(\mu) = \int_0^\mu \sigma(h) dh) \quad (5.6)$$

Формула (5.6) получена при произвольном значении величин n , δ_i ($i = 1, \dots, n$), характеризующих многоступенчатый закон притяжения берегов трещины (фиг. 3). Задаваясь соответствующим значением n и законом изменения δ_i (как функции i), из многоступенчатого закона притяжения берегов трещины можно получить любую заданную зависимость взаимодействия поверхностей щели. Это доказывает справедливость формулы (5.6) при произвольном (физически приемлемом) законе притяжения противоположных берегов трещины. Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Дислокационная теорема. Предельная нагрузка при растяжении тела, содержащего линейную дислокацию мощности μ , определяется формулой

$$S_* = \frac{1}{\mu} \int_0^\mu \sigma(h) dh \quad (5.7)$$

т. е. она равна усредненной интенсивности сил притяжения, действующих на противоположные берега трещины, при росте интервала между берегами трещины от 0 до μ .

§ 6. Сопоставление предельной нагрузки при разных законах взаимодействия берегов щели. 1. Одноступенчатый закон взаимодействия

$$\sigma(h) = \sigma_0 \quad \text{при } h < \delta_1, \quad \sigma(h) = 0 \quad \text{при } h > \delta_1 \quad (6.1)$$

Тело, берега трещины которого притягиваются по закону (6.1) называется [1] упрощенной моделью хрупкого тела. Для этой модели из формулы (5.7) имеем

$$S_* = \sigma_0 \quad \text{при } \mu \leq \frac{2T_0}{\sigma_0}, \quad S_* = 2T_0/\mu \quad \text{при } \mu \geq 2T_0/\sigma_0 \quad (6.2)$$

Соотношения (6.2) были получены другим методом в работах [1, 4].

2. Двуступенчатый закон взаимодействия

$$\sigma(h) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } h < \delta_1 \\ 1/2\sigma_0 & \text{при } \delta_1 < h < \delta_2 \\ 0 & \text{при } h > \delta_2 \end{cases} \quad (6.3)$$

Рассмотрим случай $\delta_2 = 2\delta_1$. Здесь из формулы (5.3) получаем

$$\delta_1 = 4/3 T_0 / \sigma_0, \quad \delta_2 = 8/3 T_0 / \sigma_0$$

При двуступенчатом законе взаимодействия предельная нагрузка представляется в виде

$$\frac{S_*}{\sigma_0} = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu \leq 4/3 T_0 / \sigma_0 \\ 1/2 + 2/3 T_0 / \sigma_0 \mu & \text{при } 4/3 T_0 / \sigma_0 \leq \mu \leq 8/3 T_0 / \sigma_0 \\ 2T_0 / \sigma_0 \mu & \text{при } \mu \geq 8/3 T_0 / \sigma_0 \end{cases} \quad (6.4)$$

3. Косинусоидальный закон притяжения берегов трещины

$$\sigma(h) = \sigma_0 \cos(\pi h / 2\delta) \quad \text{при } h \leq \delta, \quad \sigma(h) = 0 \quad \text{при } h \geq \delta \quad (6.5)$$

Из условия (5.3) следует $\delta = \pi T_0 / \sigma_0$. В этом случае

$$\begin{aligned} S_* &= 2T_0 / \mu \sin(1/2 \sigma_0 \mu / T_0) \quad \text{при } \mu \leq \pi T_0 / \sigma_0 \\ S_* &= 2T_0 / \mu \quad \text{при } \mu \geq \pi T_0 / \sigma_0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

4. Линейный закон взаимодействия берегов трещин

$$\sigma(h) = \sigma_0(1 - h / \delta) \quad \text{при } h \leq \delta, \quad \sigma(h) = 0 \quad \text{при } h \geq \delta \quad (6.7)$$

В данном случае из условия (5.3) величину δ получаем в виде

$$\delta = 4T_0 / \sigma_0$$

при этом

$$\frac{S_*}{\sigma_0} = \begin{cases} 1 - 1/8 \sigma_0 \mu / T_0 & \text{при } \mu \leq 4T_0 / \sigma_0 \\ 2T_0 / \sigma_0 \mu & \text{при } \mu \geq 4T_0 / \sigma_0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Зависимость (6.2) на фиг. 7 дана кривой 1, зависимость (6.4) — кривой 2, зависимость (6.6) — кривой 3 и зависимость (6.8) — кривой 4.

Поступила 11 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения. ПМТФ, 1961, № 3.
2. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развиток найдрібніших тріщин в твердому тілі. Прикл. механіка, т. V, вип. 4, 1959.
3. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
4. Леонов М. Я., Онищко Л. В. Про вплив лінійної дислокації на міцність відриву. Доповіді АН УРСР, 1961, № 4.