

УДК 539.374
539.4.012.1

К ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ И КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

М. С. Михалишин, Ю. В. Немировский, О. Н. Шаблий

(*Новосибирск, Тернополь*)

Биметаллические оболочки и пластинки широко используются в технике (см. [1, 2]). Исследование изгиба и устойчивости тонких оболочек при различных типах нагружения в пределах упругости выполнено в [3]. Исследование несущей способности цилиндрических биметаллических оболочек из материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, было выполнено в [4]. Во многих случаях материалы основного и пластирующего слоев биметаллических конструкций обладают существенно различным пластическим сопротивлением при растяжении и сжатии [5]. Данная работа посвящена исследованию несущей способности биметаллических осесимметричных оболочек, которые изготовлены из материалов, разноопротивляющихся растяжению и сжатию, а также оценке их экономичности по сравнению с однородными оболочками.

1. Рассмотрим тонкие биметаллические оболочки вращения, оба слоя которых выполнены из различных идеально жестко-пластических материалов с неодинаковыми пределами текучести при растяжении и сжатии.

Поверхность раздела слоев оболочки выберем за отсчетную и направим ось Z по внутренней нормали к этой поверхности.

Введем обозначения

$$s_i' = \frac{\sigma_i'}{\sigma_0}, \quad s_i'' = \frac{\sigma_i''}{\sigma_0}, \quad \gamma^\pm = \frac{\sigma_s^\pm}{\sigma_0}, \quad s^\pm = \frac{k_s^\pm}{\sigma_0}$$

где σ_i' , σ_i'' ($i = 1, 2$) — главные напряжения, действующие в верхнем и нижнем слоях; σ_s^\pm , k_s^\pm — пределы текучести материалов при растяжении (плюс) и сжатии (минус) верхнего и нижнего слоев соответственно; σ_0 — предел текучести некоторого условного материала.

Считаем, что материалы слоев жестко соединены между собой и каждый из них в предельном состоянии удовлетворяет условию пластичности П. П. Баландина [6], линеаризованному по типу линеаризации эллипса Мизеса шестиугольником Треска (фиг. 1). Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_* &= (\gamma^{+2} - \gamma^+ \gamma^- + \gamma^{-2})^{1/2}, & \Delta_1 &= \gamma^- - \gamma^+ \\ s_* &= (s^{+2} - s^+ s^- + s^{-2})^{1/2}, & \Delta_2 &= s^- - s^+ \end{aligned}$$

Предполагая справедливой для всего сечения оболочки гипотезу Кирхгофа — Лява, выражим главные скорости деформаций $\dot{\epsilon}_i$ ($i = 1, 2$) через скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{i0}$ и искривлений $\dot{\gamma}_i$ точек отсчетной поверхности

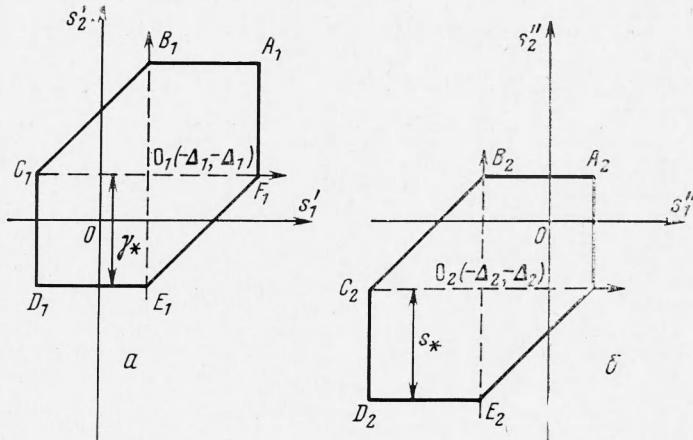
$$\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_{i0} - z \dot{\gamma}_i, \quad z = 2Z/(h_1 + h_2), \quad \dot{\gamma}_i = 1/2(h_1 + h_2) \dot{\kappa}_i$$

где h_1 и h_2 — толщины верхнего и нижнего слоев оболочки.

Интенсивности усилий и моментов, действующих в сечении оболочки, введем по формулам

$$(1.1) \quad T_i = \int_{-h_1}^0 \sigma_i' dZ + \int_0^{h_2} \sigma_i'' dZ, \quad M_i = \int_{-h_1}^0 \sigma_i' Z dZ + \int_0^{h_2} \sigma_i'' Z dZ, \quad i = 1, 2$$

Считая, что оболочка исчерпывает несущую способность при достижении предельного состояния обоими составляющими ее слоями, используя принятые условия пластичности и ассоциированный с ними закон течения, нетрудно установить, как и в [7], распределение напряжений в предельном состоянии сечения оболочки. Подстановка последних в (1.1) после преобразований дает возможность получить конечные соотношения между усилиями и моментами в предельном состоянии сечения оболочки.



Фиг. 1

В дальнейшем удобно пользоваться следующими безразмерными величинами:

$$t_i = \frac{T_i}{\sigma_0 h_1 (1 + \alpha)} = \frac{2}{1 + \alpha} \left(t_i^* - \frac{\Delta_1 + \alpha \Delta_2}{2} \right),$$

$$m_i = \frac{4M_i}{\sigma_0 h_1^2 (1 + \alpha)^2} = \left(m_i^* - \frac{\alpha^2 \Delta_2 - \Delta_1}{2} \right) \frac{4}{(1 + \alpha)^2}$$

$$t_i^* \pm \frac{1}{2} (\alpha s_* - \gamma_*) = t_i^\pm, \quad m_i^* \pm \frac{1}{2} (\alpha^2 s_* + \gamma_*) = m_i^\pm, \quad a = h_2 / h_1$$

$$\beta_i^\pm = 2 [\pm m_i^\pm s_* - (t_i^\pm)^2]^{1/2}, \quad \delta_i^\pm = 2 [\pm m_i^\pm \gamma_* - (t_i^\pm)^2]^{1/2}, \quad i = 1, 2$$

$$\beta_{ij}^\pm = 2 [\pm (m_i^\pm - m_j^*) s_* - (t_i^\pm - t_j^*)^2]^{1/2},$$

$$\delta_{ij}^\pm = 2 [\pm (m_i^\pm - m_j^*) \gamma_* - (t_i^\pm - t_j^*)^2]^{1/2}, \quad i, j = 1, 2; i \neq j$$

Пластические режимы, соответствующие сторонам шестиугольников на фиг. 1 будем называть регулярными, а режимы, соответствующие углам — сингулярными. Тогда конечные соотношения и соответствующие законы течения для случаев, когда по толщине оболочки реализуются регулярные или же максимальное количество сингулярных пластических режимов (в скобках указаны пластические режимы, соответствующие фиг. 1, а, б и отсчитываемые от верхней кромки оболочки, а также параметры z_{01} , z_{02} , z_{01}' , z_{02}' , l , m , n , p , q , r , разделяющие эти режимы), имеют вид

$(A_1 B_1 z_{02} D_1 E_1, D_2 E_2)$ или $(D_1 E_1 z_{02} A_1 B_1 A_2 B_2)$ при $i = 2$

$(A_1 F_1 z_{01} C_1 D_1, C_2 D_2)$ или $(C_1 D_1 z_{01} A_1 F_1, A_2 F_2)$ при $i = 1$

$$(1.2) \quad m_i^\pm = \pm \frac{(t_i^\pm)^2}{\gamma_*}; \quad z_{0i} = \pm \frac{t_i^\pm}{\gamma_*}; \quad z_{02} = q = r, \quad p = \frac{0}{0};$$

$$z_{01} = p = q, \quad r = \frac{0}{0}$$

$$(A_1B_1, A_2B_2z_{02}'D_2E_2) \text{ или } (D_1E_1, D_2E_2z_{02}'A_2B_2) \text{ при } i = 2 \\ (A_1F_1, A_2F_2z_{01}'C_2D_2) \text{ или } (C_1D_1, C_2D_2z_{01}'A_2F_2) \text{ при } i = 1 \\ (1.3) \quad m_i^\pm = \pm \frac{(t_i^\pm)^2}{s_*}; \quad z_{0i}' = \pm \frac{t_i^\pm}{s_*}; \quad z_{02}' = m = n, \\ l = \frac{0}{0}; \quad z_{01}' = l = m, \quad n = \frac{0}{0}$$

$$(B_1C_1z_{03}E_1F_1, E_2F_2) \text{ или } (E_1F_1z_{03}B_1C_1, B_2C_2) \text{ при } \delta = \gamma_* \\ (B_1C_1, B_2C_2z_{03}'E_2F_2) \text{ или } (E_1F_1, E_2F_2z_{03}'B_2C_2) \text{ при } \delta = s_* \\ (1.4) \quad m_2^\pm - m_1^* = \pm \frac{(t_2^\pm - t_1^*)^2}{\delta}, \quad z_{03} = p = r = \pm \frac{t_2^\pm - t_1^*}{\gamma_*}, \\ q = \frac{0}{0}, \quad z_{03}' = l = n = \pm \frac{t_2^\pm - t_1^*}{s_*}, \quad m = \frac{0}{0} \\ (A_1pB_1qC_1rD_1D_2), (A_1rF_1qE_1pD_1D_2) \text{ или } (D_1rC_1qB_1pA_1, A_2) \\ (D_1pE_1qF_1rA_1, A_2) \text{ при } \delta = \gamma_*; \quad (A_1A_2lB_2mC_2nD_2), \\ (A_1A_2nF_2mE_2lD_2) \text{ или } (D_1, D_2nC_2mB_2lA_2), \quad (D_1, D_2lE_2mF_2nA_2)$$

при $\delta = s_*$

$$(1.5) \quad m_2^\pm = \pm \frac{\delta}{4} \left[\left(\frac{m_1^\pm - m_2^\pm}{t_1^\pm - t_2^\pm} \right)^2 \mp \frac{4t_1^\pm}{\delta} \frac{m_1^\pm - m_2^\pm}{t_1^\pm - t_2^\pm} + \frac{4}{\delta^2} (t_1^{\pm 2} + t_2^{\pm 2}) \right] \\ p = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1^\pm - m_2^\pm}{t_1^\pm - t_2^\pm} \pm \frac{2}{\gamma_*} (t_1^\pm - t_2^\pm) \right], \\ q = - \frac{1}{2} \left[\frac{m_1^\pm - m_2^\pm}{t_1^\pm - t_2^\pm} \mp \frac{2}{\gamma_*} (t_1^\pm + t_2^\pm) \right] \\ r = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1^\pm - m_2^\pm}{t_1^\pm - t_2^\pm} \mp \frac{2}{\gamma_*} (t_1^\pm - t_2^\pm) \right]$$

$(C_1rD_1pE_1qF_1, F_2)$, $(C_1qB_1pA_1rF_1F_2)$ или $(F_1qE_1pD_1rC_1C_2)$ $(F_1rA_1pB_1qC_1, C_2)$ при $\delta = \gamma_*$; $(C_1, C_2nD_2lE_2mF_2)$, $(C_1C_2mB_2lA_2nF_2)$ или $(F_1, F_2mE_2lD_2nC_2)$, $(F_1, F_2nA_2lB_2mC_2)$ при $\delta = s_*$

$$(1.6) \quad m_1^\mp = \pm \frac{\delta}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_2^*}{t_2^*} \mp \frac{2t_2^*}{\delta} \right)^2 \pm \frac{2t_1^\mp}{\delta} \left(\frac{m_2^*}{t_2^*} \mp \frac{2t_2^*}{\delta} \right) \pm \frac{4}{\delta^2} t_1^{\mp 2} \right] \\ p = - \frac{1}{2} \left(\frac{m_2^*}{t_2^*} \mp \frac{2t_2^*}{\gamma_*} \right) \mp \frac{2t_1^\mp}{\gamma_*}, \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{m_2^*}{t_2^*} \mp \frac{2t_2^*}{\gamma_*} \right), \\ r = \frac{1}{2} \left(\frac{m_2^*}{t_2^*} \pm \frac{2t_2^*}{\gamma_*} \right)$$

$(B_1, B_2mC_2nD_2lE_2)$, $(B_1, B_2lA_2nF_2mE_2)$ или $(E_1, E_2lD_2nC_2mB_2)$ $(E_1, E_2mF_2nA_2lB_2)$ при $\delta = s_*$; $(B_1qC_1rD_1pE_1, E_2)$, $(B_1pA_1rF_1qE_1, E_2)$ или $(E_1pD_1rC_1qB_1, B_2)$, $(E_1qF_1rA_1pB_1, B_2)$ при $\delta = \gamma_*$

$$(1.7) \quad m_2^\pm = \pm \frac{\delta}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_1^*}{t_1^*} \pm \frac{2t_1^*}{\delta} \right)^2 \mp \frac{2t_2^\pm}{\delta} \left(\frac{m_1^*}{t_1^*} \pm \frac{2t_1^*}{\delta} \right) \pm \frac{4}{\delta^2} t_2^{\pm 2} \right] \\ p = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^*}{t_1^*} \mp \frac{2t_1^*}{\gamma_*} \right), \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^*}{t_1^*} \pm \frac{2t_1^*}{\gamma_*} \right), \\ r = - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^*}{t_1^*} \pm \frac{2t_1^*}{\gamma_*} \right) \pm \frac{2t_2^\pm}{\gamma_*}$$

Выражения для параметров l, m, n в зависимостях (1.5) — (1.7) получаются из соотношений для параметров p, q, r путем замены в них γ_* на s_* $(A_1, B_1, B_2, C_2, D_2)$ или $(D_1, E_1, E_2, F_2, A_2)$, $(-2/(1+\alpha) < p < 0 <$

$< m < n < 2\alpha/(1 + \alpha)$ при $i = 1, j = 2, \eta_1 = p, \eta_2 = m, \eta_3 = n;$
 $(A_1, F_1, F_2, E_2, D_2)$ или $(D_1, C_1, C_2, B_2, A_2) (-2/(1 + \alpha) < r < 0 < m <$
 $< l < 2\alpha/(1 + \alpha))$ при $i = 2, j = 1, \eta_1 = r, \eta_2 = m, \eta_3 = l$

$$(1.8) \quad m_i^\pm = \pm \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{\gamma_*} [\pm 2(2t_i^\pm - t_j^\pm) + \beta_j^\pm]^2 + \frac{1}{s_*} (\pm 2t_j^\pm - \beta_j^\pm)^2 \right\}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2\gamma_*} [\pm 2(2t_i^\pm - t_j^\pm) + \beta_j^\pm], \quad \eta_2 = \frac{1}{2s_*} (\pm 2t_j^\pm - \beta_j^\pm),$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2s_*} (\pm 2t_j^\pm + \beta_j^\pm)$$

$(E_1, D_1, D_2, C_2, B_2)$ или $(B_1, A_1, A_2, F_2, E_2), (-2/(1 + \alpha) < p < 0 < n <$
 $< m < 2\alpha/(1 + \alpha))$ при $i = 1, j = 2, \eta_1 = p, \eta_2 = m, \eta_3 = n;$
 $(C_1, D_1, D_2, E_2, F_2)$ или $(F_1, A_1, A_2, B_2, C_2), (-2/(1 + \alpha) < r < 0 <$
 $< l < m < 2\alpha/(1 + \alpha))$ при $i = 2, j = 1, \eta_1 = r, \eta_2 = m, \eta_3 = l$

$$(1.9) \quad m_i^* = \pm \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{\gamma_*} [\pm 2(2t_i^* - t_j^+) + \beta_j^+]^2 - \frac{1}{s_*} (\mp 2t_j^+ + \beta_j^+)^2 \right\}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2\gamma_*} [\pm 2(2t_i^* - t_j^+) + \beta_j^+], \quad \eta_2 = \frac{1}{2s_*} (\mp 2t_j^+ + \beta_j^+),$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2s_*} (\mp 2t_j^+ - \beta_j^+)$$

$(B_1, C_1, C_2, D_2, E_2)$ или $(E_1, F_1, F_2, A_2, B_2), (-2/(1 + \alpha) < q < 0 <$
 $< n < l < 2\alpha/(1 + \alpha))$ при $i = 1, j = 2, \eta_1 = q, \eta_2 = l, \eta_3 = n;$
 $(F_1, E_1, E_2, D_2, C_2)$ или $(C_1, B_1, B_2, A_2, F_2) (-2/(1 + \alpha) < q < 0 < l <$
 $< n < 2\alpha/(1 + \alpha))$ при $i = 2, j = 1, \eta_1 = q, \eta_2 = n, \eta_3 = l$

$$(1.10) \quad m_i^* = \pm \frac{1}{8} \{ \gamma_*^{-1} [\pm 2(t_i^* + t_j^\pm) + \beta_{ji}^\pm]^2 -$$

$$- s_*^{-1} [\pm 2(t_j^\pm - t_i^*) + \beta_{ji}^\pm]^2 \}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\gamma_*^{-1} [\pm 2(t_i^* + t_j^\pm) + \beta_{ji}^\pm], \quad \eta_2 = \frac{1}{2}s_*^{-1} [\pm 2(t_j^\pm - t_i^*) + \beta_{ji}^\pm],$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}s_*^{-1} [\pm 2(t_j^\pm - t_i^*) - \beta_{ji}^\pm]$$

$(C_1, D_1, E_1, E_2, F_2)$ или $(F_1, A_1, B_1, B_2, C_2), (-2/(1 + \alpha) < r < p < 0 <$
 $< m + 2\alpha/(1 + \alpha))$ при $i = 2, j = 1, \eta_1 = p, \eta_2 = r, \eta_3 = m;$
 $(E_1, D_1, C_1, C_2, B_2)$ или $(B_1, A_1, F_1, F_2, E_2) (-2/(1 + \alpha) < p < r < 0 <$
 $< m < 2\alpha/(1 + \alpha))$ при $i = 1, j = 2, \eta_1 = r, \eta_2 = p, \eta_3 = m$

$$(1.11) \quad m_i^* = \pm \frac{1}{8} \{ \gamma_*^{-1} [\pm 2(t_i^* - t_j^+) - \delta_{ji}^+]^2 -$$

$$- s_*^{-1} [\mp 2(t_i^* + t_j^+) - \delta_{ji}^+]^2 \}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\gamma_*^{-1} [\pm 2(t_i^* - t_j^+) + \delta_{ji}^+], \quad \eta_2 = \frac{1}{2}s_*^{-1} [\pm 2(t_i^* - t_j^+) - \delta_{ji}^+],$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}s_*^{-1} [\mp 2(t_i^* + t_j^+) - \delta_{ji}^+]$$

$(A_1, B_1, C_1, C_2, D_2)$ или $(D_1, E_1, F_1, F_2, A_2), (-2/(1 + \alpha) < p < q < 0 <$
 $< n < 2\alpha/(1 + \alpha))$ при $i = 2, j = 1, \eta_1 = p, \eta_2 = q, \eta_3 = n; (A_1, F_1, E_1,$
 $E_2, D_2)$ или $(D_1, C_1, B_1, B_2, A_2) (-2/(1 + \alpha) < r < q < 0 < l <$
 $< 2\alpha/(1 + \alpha))$ при $i = 1, j = 2, \eta_1 = r, \eta_2 = q, \eta_3 = l$

$$(1.12) \quad m_i^\pm = \frac{1}{8} \{ \gamma_*^{-1} [\pm 2t_j^\pm + \delta_j^\pm]^2 + s_*^{-1} [\pm 2(2t_i^\pm - t_j^\pm) - \delta_j^\pm]^2 \}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\gamma_*^{-1} (\pm 2t_j^\pm - \delta_j^\pm), \quad \eta_2 = \frac{1}{2}s_*^{-1} (\pm 2t_j^\pm + \delta_j^\pm),$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}s_*^{-1} [\pm 2(2t_i^\pm - t_j^\pm) - \delta_j^\pm]$$

$(F_1, E_1, D_1, D_2, C_2)$ или $(C_1, B_1, A_1, A_2, F_2) (-2/(1 + \alpha) < q < p <$
 $< 0 < n < 2\alpha/(1 + \alpha))$ при $i = 2, j = 1, \eta_1 = p, \eta_2 = q, \eta_3 = n;$
 $(B_1, C_1, D_1, D_2, E_2)$ или $(E_1, F_1, A_1, A_2, B_2) (-2/(1 + \alpha) < q < r <$

$$\begin{aligned}
 & < 0 < l < 2\alpha / (1 + \alpha) \text{ при } i = 1, j = 2, \eta_1 = r, \eta_2 = q, \eta_3 = l \\
 (1.13) \quad & m_i^* = \pm^{1/8} \{ \gamma_*^{-1} (\pm 2t_j \pm - \delta_j \pm)^2 - s_*^{-1} [\mp 2(2t_i^* - t_j \pm) - \delta_j \pm]^2 \} \\
 & \eta_1 = 1/2 \gamma_*^{-1} (\pm 2t_j \pm + \delta_j \pm), \quad \eta_2 = 1/2 \gamma_*^{-1} (\pm 2t_j \pm - \delta_j \pm), \\
 & \eta_3 = 1/2 s_*^{-1} [\mp 2(2t_i^* - t_j \pm) - \delta_j \pm]
 \end{aligned}$$

В приведенных выше формулах верхний знак соответствует распределению пластических режимов, указанных первыми, а нижний — распределению режимов указанных вторыми. Параметры p, q, r, l, m, n , определяющие ординаты поверхностей, которые разделяют различные пластические режимы по толщине оболочки, введены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\dot{\varepsilon}_{10}}{\dot{\gamma}_1}, \quad q = \frac{\dot{\varepsilon}_{10} + \dot{\varepsilon}_{20}}{\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2}, \quad r = \frac{\dot{\varepsilon}_{20}}{\dot{\gamma}_2}, \quad -\frac{2}{1+\alpha} \leq z \leq 0 \\
 l &= \frac{\dot{\varepsilon}_{10}}{\dot{\gamma}_1}, \quad m = \frac{\dot{\varepsilon}_{10} + \dot{\varepsilon}_{20}}{\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2}, \quad n = \frac{\dot{\varepsilon}_{20}}{\dot{\gamma}_2}, \quad 0 \leq z \leq \frac{2\alpha}{1+\alpha}
 \end{aligned}$$

В каждом из случаев (1.2) — (1.13) эти параметры должны удовлетворять определенным неравенствам, из которых следуют ограничения на соответствующие куски предельной гиперповерхности текучести.

2. При решении некоторых частных задач возможно использование трехмерных поверхностей текучести, что значительно упрощает процесс подбора пластических режимов. На фиг. 2 показана поверхность текучести для симметрично нагруженной цилиндрической оболочки ($\dot{\gamma}_2 = 0$). Приведем уравнения ограничивающих ее частей поверхности.

Части, полученные с помощью регулярных режимов условий текучести в напряжениях (фиг. 1)

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad m_1^* &= \frac{\alpha^2 s_* + \gamma_*}{2} - \frac{1}{4s_*} (-2t_1^* + \alpha s_* - \gamma_*)^2, \\
 & -\frac{\gamma_* + \alpha s_*}{2} \leq t_1^* \leq \frac{\alpha s_* - \gamma_*}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad m_1^* &= -\frac{\alpha^2 s_* + \gamma_*}{2} + \frac{1}{4\gamma_*} (2t_1^* + \alpha s_* - \gamma_*)^2, \\
 & -\frac{\gamma_* + \alpha s_*}{2} \leq t_1^* \leq \frac{\gamma_* - \alpha s_*}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad m_1^* &= -\frac{\alpha^2 s_* + \gamma_*}{2} + \frac{1}{4s_*} (2t_1^* + \alpha s_* - \gamma_*)^2, \quad \frac{\gamma_* - \alpha s_*}{2} \leq t_1^* \leq \frac{\gamma_* + \alpha s_*}{2} \\
 (2.4) \quad m_1^* &= \frac{\alpha^2 s_* + \gamma_*}{2} - \frac{1}{4\gamma_*} (-2t_1^* + \alpha s_* - \gamma_*)^2, \quad \frac{\alpha s_* - \gamma_*}{2} \leq t_1^* \leq \frac{\gamma_* + \alpha s_*}{2}
 \end{aligned}$$

Части, полученные с помощью сингулярных пластических режимов

$$(2.5) \quad t_2^* = (\alpha s_* + \gamma_*) / 2, \quad 0 \leq t_1^* \leq (\alpha s_* + \gamma_*) / 2$$

$$(2.6) \quad t_2^* - t_1^* = (\alpha s_* + \gamma_*) / 2, \quad -(\alpha s_* + \gamma_*) / 2 \leq t_1^* \leq 0$$

$$(2.7) \quad m_1^* = (\alpha^2 s_* + \gamma_*) / 2 - 1/2 s_*^{-1} \{ [2(t_2^* - t_1^*) - \gamma_*]^2 + (-2t_2^* + \alpha s_*)^2 \}$$

$$(2.8) \quad m_1^* = (\alpha^2 s_* + \gamma_*) / 2 - 1/2 \{ \gamma_*^{-1} (-2t_2^* + \alpha s_*)^2 + s^{-1} [2(t_2^* - t_1^*) - \gamma_*]^2 \}$$

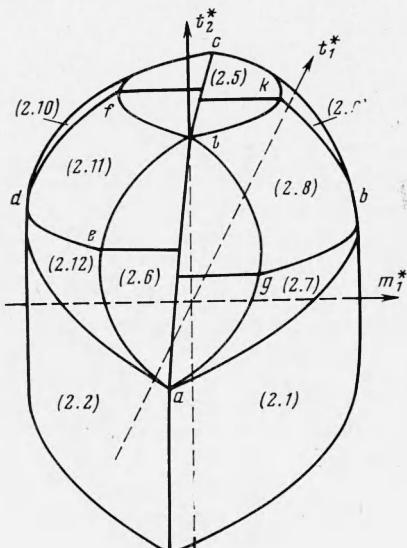
$$(2.9) \quad m_1^* = (\alpha^2 s_* + \gamma_*) / 2 - 1/2 \gamma_*^{-1} \{ [2(t_2^* - t_1^*) - \gamma_*]^2 + (-2t_2^* + \alpha s_*)^2 \}$$

$$(2.10) \quad m_1^* = -(\alpha^2 s_* + \gamma_*) / 2 + \frac{1}{2} s_*^{-1} \{ [2(t_1^* - t_2^*) + \alpha s_*]^2 + (2t_2^* - \gamma_*)^2 \}$$

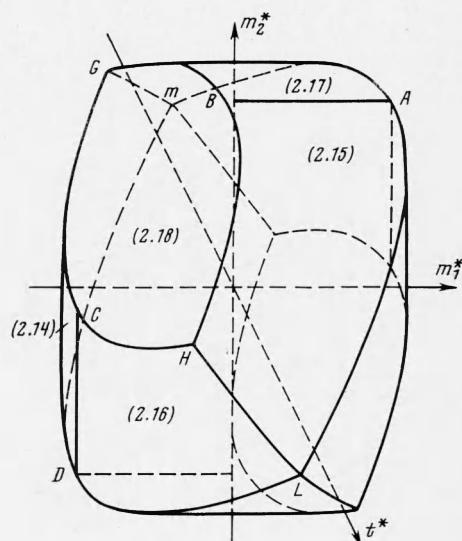
$$(2.11) \quad m_1^* = -(\alpha^2 s_* + \gamma_*) / 2 + \frac{1}{2} \{ \gamma_*^{-1} [2(t_1^* - t_2^*) + \alpha s_*]^2 + s_*^{-1} (2t_2^* - \gamma_*)^2 \}$$

$$(2.12) \quad m_1^* = -(\alpha^2 s_* + \gamma_*) / 2 + \frac{1}{2} \gamma_*^{-1} \{ [2(t_1^* - t_2^*) + \alpha s_*]^2 + (2t_2^* - \gamma_*)^2 \}$$

Поверхность (фиг. 2) симметрична относительно начала координат. Цифры на фиг. 2 отмечают соответствующие поверхности, определяемые уравнениями (2.1) — (2.12).



Фиг. 2



Фиг. 3

Закон течения для любой из частей поверхности, приведенной на фиг. 2, записывается в виде

$$(2.13) \quad \dot{\varepsilon}_{10} : \dot{\varepsilon}_{20} : \dot{k}_1 = \frac{\partial f}{\partial t_1} : \frac{\partial f}{\partial t_2} : \frac{\partial f}{\partial m_1}$$

где $k_1 = -\frac{1}{2} \dot{\gamma}_1$ и $f(t_1, t_2, m_1) = 0$ — уравнение (в координатах без звездочек) этой поверхности.

В дальнейшем при решении задач используется аппроксимация найденной поверхности, полученная с помощью продолжения частей (2.1) — (2.6) (и им симметричных) до пересечения. В случае $t_1 = t_2$ предельные соотношения, полученные с помощью регулярных режимов имеют вид

$$(2.14) \quad m_1^* = -\frac{\alpha^2 s_* + \gamma_*}{2} + \frac{1}{4\dot{\gamma}_*} (2t^* + \alpha s_* - \gamma_*)^2,$$

$$-\frac{\alpha s_* + \gamma_*}{2} \leq t^* \leq \frac{\gamma_* - \alpha s_*}{2}$$

$$(2.15) \quad m_2^* = \frac{\alpha^2 s_* + \gamma_*}{2} - \frac{1}{4\dot{\gamma}_*} (-2t^* + \alpha s_* - \gamma_*)^2, \quad \frac{\alpha s_* - \gamma_*}{2} \leq t^* \leq \frac{\alpha s_* + \gamma_*}{2}$$

(2.16)

$$m_1^* = -\frac{\alpha^2 s_* + \gamma_*}{2} + \frac{1}{4s_*} (2t^* + as_* - \gamma_*)^2, \quad -\frac{\gamma_* - \alpha s_*}{2} \leq t^* \leq \frac{\alpha s_* + \gamma_*}{2}$$

(2.17)

$$m_2^* = \frac{\alpha^2 s_* + \gamma_*}{2} - \frac{1}{4s_*} (-2t^* + as_* + \gamma_*)^2, \quad -\frac{\alpha s_* + \gamma_*}{2} \leq t^* \leq \frac{\alpha s_* - \gamma_*}{2}$$

$$(2.18) \quad m_2^* - m_1^* = (\alpha^2 s_* + \gamma_*) / 2 - (as_* - \gamma_*)^2 / 4\delta,$$

$$\delta = \gamma_*; \quad as_* \leq \gamma_*; \quad \delta = s_*; \quad as_* \geq \gamma_*$$

Предельные соотношения, полученные с помощью сингулярных режимов (при $\alpha s_* \leq \gamma_*$), имеют вид

$$\begin{aligned} \pm m_1^* &= \frac{1}{2} \left\{ \alpha^2 s_* + \gamma_* - \gamma_* \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_2^*}{t^*} \mp \frac{2t^*}{\gamma_*} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\pm 2t^* - \alpha s_* + \gamma_*}{\gamma_*} \left(\frac{m_2^*}{t^*} \mp \frac{2t^*}{\gamma_*} \right) + \frac{(\pm 2t^* - \alpha s_* + \gamma_*)^2}{\gamma_*^2} \right] \right\} \\ \pm m_2^* &= \frac{1}{8} [\gamma_*^{-1} (as_* - \gamma_* - \delta_{12})^2 - s_*^{-1} (\mp 4t^* + as_* - \gamma_* - \delta_{12})^2] \\ \pm m_2^* &= -\frac{1}{8} [\gamma_*^{-1} (\mp 2t^* + as_* - \gamma_* - \delta_1)^2 - \\ &\quad - s_*^{-1} (\pm 2t^* + as_* - \gamma_* - \delta_1)^2] \\ \pm m_2^* &= \frac{1}{8} [\gamma_*^{-1} (\pm 2t^* + as_* - \gamma_* + \beta_1)^2 - s_*^{-1} (\mp 2t^* + as_* - \gamma_* + \beta_1)^2] \end{aligned}$$

Поверхность симметрична относительно начала координат.

Аналогично предыдущему случаю при решении задач удобнее применять аппроксимацию данной поверхности, полученную путем продолжения ее частей (2.14) — (2.18) и им симметричных до пересечения. На фиг. 3 приведена такая аппроксимированная поверхность.

Исходя из выражения для скорости рассеяния механической энергии при пластическом течении в случае $t_1 = t_2 = t$, найдем, что закон течения для любой из частей полученной поверхности будет

$$(2.19) \quad (\dot{\epsilon}_{10} + \dot{\epsilon}_{20}) : \dot{k}_1 : \dot{k}_2 = \frac{\partial f}{\partial t} : \frac{\partial f}{\partial m_1} : \frac{\partial f}{\partial m_2}$$

где $\dot{k}_i = -1/2 \dot{\gamma}_i$ ($i = 1, 2$) и $f(t, m_1, m_2) = 0$ — уравнение этой части.

3. В качестве примера рассмотрим задачу определения предельной нагрузки для замкнутой цилиндрической оболочки с плоскими крышками на торцах, находящейся под внутренним давлением интенсивности q . Предположим, что оболочка и круглая пластинка (крышка) выполнены из биметалла с одинаковыми составляющими (т. е. одинаковыми основными материалами и одинаковыми материалами плакирующих слоев), но с различными толщинами слоев в цилиндрической части и в крышках.

Отнесем собственно оболочку к цилиндрической системе координат с началом на поверхности раздела слоев биметалла и делящим образующую цилиндра длиной $2L$ пополам. Ось X направлена вдоль образующей, ось Z — по внутренней нормали оболочки. Пластинку отнесем к системе координат r, Z' с началом на своей поверхности раздела слоев в центре пластиинки. Ось r предполагается направленной вдоль радиуса пластиинки, ось Z' — по нормали к плоскости раздела слоев внутрь оболочки.

Введем следующие обозначения:

$$(3.1) \quad x = \frac{X}{L}, \quad z = \frac{2Z}{h_1 + h_2}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{2Z'}{H_1 + H_2}, \quad \alpha_1 = \frac{h_2}{h_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{H_2}{H_1}, \quad \dot{u}_0 = \frac{\dot{U}_0}{L}, \quad \dot{w}_0 = \frac{2\dot{W}_0}{h_1 + h_2}, \quad \dot{u}_n = \frac{\dot{U}_n}{R},$$

$$\dot{w}_n = \frac{2\dot{W}_n}{H_1 + H_2}, \quad p = \frac{qR}{\sigma_0 h_1 (1 + \alpha_1)}$$

где h , h_{21} — высота верхнего и нижнего слоев оболочки; H_1 , H_2 — соответствующие величины для пластинки (нижним считается слой, расположенный в положительном направлении оси ζ); R — радиус пластинки (оболочки); \dot{U}_0 , \dot{W}_0 , \dot{U}_n , \dot{W}_n — скорости перемещения точек на поверхностях раздела слоев в направлениях осей x , z , ξ , ζ для оболочки и пластинки соответственно.

Учитывая обозначения (3.1), запишем соотношения гипотезы Кирхгофа — Лява в виде

а) для оболочки

$$(3.2) \quad \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_{10} - z\dot{\gamma}_1, \quad \dot{\varepsilon}_{10} = \frac{d\dot{u}_0}{dx}, \quad \dot{\gamma}_1 = \left(\frac{h_1}{L}\right)^2 \frac{(1 + \alpha_1)^2}{4} \frac{d^2\dot{w}_0}{dx^2},$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_{20} = -\frac{1 + \alpha_1}{2} \frac{h_1}{R} \dot{w}_0$$

б) для пластинки

$$(3.3) \quad \dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_{r0} - \zeta\dot{\gamma}_r, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\varepsilon}_{\theta0} - \zeta\dot{\gamma}_\theta, \quad \dot{\varepsilon}_{r0} = \frac{d\dot{u}_n}{d\xi}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta0} = \frac{\dot{u}_n}{\xi}$$

$$\dot{\gamma}_r = \left(\frac{H_1}{R}\right)^2 \frac{(1 + \alpha_2)^2}{4} \frac{d^2\dot{w}_n}{d\xi^2}, \quad \dot{\gamma}_\theta = \left(\frac{H_1}{R}\right)^2 \frac{(1 + \alpha_2)^2}{4} \frac{1}{\xi} \frac{d\dot{w}_n}{d\xi}$$

Рассмотрим три возможных случая исчерпания несущей способности конструкций:

- 1) оболочка находится в предельном состоянии (пластинка жесткая);
- 2) пластинка находится в предельном состоянии (оболочка жесткая);
- 3) вся конструкция находится в предельном состоянии.

Для нахождения соотношений между параметрами оболочки и пластинки, приводящих к перечисленным выше случаям, необходимо разрешить каждую задачу в отдельности.

1. Цилиндрическая оболочка с жестко заделанным смещающимся в направлении образующей контуром. Оболочка нагружена внутренним давлением интенсивности q и равномерно распределенным по торцам растягивающим вдоль образующей усилием $T_0 = qR / 2$.

Уравнения равновесия элемента оболочки

$$(3.4) \quad \frac{dt_1}{dx} = 0, \quad \frac{d^2m_1}{dx^2} + 2 \frac{\beta_2 \beta_3}{\beta_1} (t_2 - p) = 0$$

$$\beta_1 = \frac{h_1(1 + \alpha_1)}{H_1(1 + \alpha_2)}, \quad \beta_2 = \frac{12R}{H_1(1 + \alpha_2)}, \quad \beta_3 = \frac{L}{R}$$

Вследствие симметрии задачи в дальнейшем рассматриваем лишь половину оболочки $0 \leq x \leq 1$.

Границные условия записем в виде

$$(3.5) \quad Q = dm_1 / dx = 0, \quad \dot{u}_0 = 0, \quad d\dot{w}_0 / dx = 0, \quad x = 0$$

$$(3.6) \quad t_1 = t_0 = \frac{T_0}{\sigma_0 h_1 (1 + \alpha_1)} = \frac{p}{2}, \quad \dot{w}_0 = 0, \quad \frac{d\dot{w}_0}{dx} = 0, \quad x = 1$$

$$Q = 4LQ^\circ / \sigma_0 h_1^2 (1 + \alpha_1)^2$$

где Q° — перерезывающая сила.

Из условий нагружения оболочки делаем вывод, что в предельном состоянии ее выполняется пластический режим аппроксимированной поверхности текучести, аналогичный части (2.5) (см. фиг. 2)

$$(3.7) \quad t_2 = t_{20} = [\alpha_1(s_* - \Delta_2) + \gamma_* - \Delta_1] / (1 + \alpha_1)$$

Используя формулы (2.13), (3.5) — (3.7), найдем закон течения

$$\dot{\varepsilon}_{10} = 0, \dot{\gamma}_1 = 0, \dot{u}_0 = 0, \dot{w}_0 = A(x - 1)$$

Поскольку нет возможности удовлетворить последние из граничных условий (3.5), (3.6), окружности $x = 0$ и $x = 1$ будут шарнирными [8]. Таким образом, вместо этих граничных условий необходимо удовлетворить следующим условиям (см. (2.1) — (2.4)):

$$(3.8) \quad m_1 = \frac{4}{(1 + \alpha_1)^2} \left\{ -\frac{\alpha_1^2(s_* + \Delta_2) + \gamma_* - \Delta_1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4s_*} [(1 + \alpha_1)t_1 + \Delta_1 + \alpha_1(s_* + \Delta_2) - \gamma_*]^2 \right\}$$

если $\gamma_* - \alpha_1 s_* \leq (1 + \alpha_1)t_1 + \Delta_1 + \alpha_1 \Delta_2 \leq \gamma_* + \alpha_1 s_*$

$$m_1 = \frac{4}{(1 + \alpha_1)^2} \left\{ -\frac{\alpha_1^2(s_* + \Delta_2) + \gamma_* - \Delta_1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\gamma_*} [(1 + \alpha_1)t_1 + \Delta_1 + \alpha_1(s_* + \Delta_2) - \gamma_*]^2 \right\}$$

если $0 \leq (1 + \alpha_1)t_1 + \Delta_1 + \alpha_1 \Delta_2 \leq \gamma_* - \alpha_1 s_*$ при $x = 0$

$$(3.9) \quad m_1 = \frac{4}{(1 + \alpha_1)^2} \left\{ \frac{\alpha_1^2(s_* - \Delta_2) + \gamma_* + \Delta_1}{2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4\gamma_*} [-(1 + \alpha_1)t_1 - \Delta_1 + \alpha_1(s_* - \Delta_2) - \gamma_*]^2 \right\} \text{ при } x = 1$$

Разрешая уравнения равновесия (3.4) при условии (3.7) и удовлетворяя граничные условия в центре оболочки и первое из условий (3.6), найдем

$$(3.10) \quad m_1 = \frac{\beta_2 \beta_3^2}{\beta_1} x^2 (p - t_{20}) + \frac{4}{(1 + \alpha_1)^2} \left[-\frac{\alpha_1^2(s_* + \Delta_2) + \gamma_* - \Delta_1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4s_*} (p^* + \alpha_1 s_* - \gamma_*)^2 \right], \quad t_1 = \frac{p}{2}$$

Здесь предполагалось, что

$$p^* = \frac{1}{2}(1 + \alpha_1)p + \Delta_1 + \alpha_1 \Delta_2 \geq \gamma_* - \alpha_1 s_*$$

т. е. удовлетворяется условие (3.8).

Подставляя выражение для m_1 из (3.10) в условие (3.9), для нахождения параметра предельной нагрузки получим следующее квадратное уравнение:

$$p^{*2} \frac{s_* + \gamma_*}{4s_* \gamma_*} + p^* \left[(1 + \alpha_1) \frac{\beta_2 \beta_3^2}{2\beta_1} + (\alpha_1 s_* - \gamma_*) \frac{\gamma_* - s_*}{2s_* \gamma_*} \right] - (\alpha_1^2 s_* + \gamma_*) - \\ - (1 + \alpha_1) \frac{\beta_2 \beta_3^2}{4\beta_1} [\alpha_1(s_* + \Delta_2) + \gamma_* + \Delta_1] + (\alpha_1 s_* - \gamma_*)^2 \frac{s_* + \gamma_*}{4s_* \gamma_*} = 0$$

Когда $p^* = \gamma^* + \alpha_1 s_*$, оболочка разрушается от действия осевой силы.

2. Круглая жестко закрепленная на контуре пластинка, находящаяся под действием внутреннего давления интенсивности q (случай, когда $\alpha_2 s_* \leq \gamma_*$).

Уравнения равновесия элемента пластиинки

$$(3.11) \quad \frac{d}{d\xi} (\xi t_r) - t_0 = 0, \quad \frac{d}{d\xi} (\xi m_r) - m_0 = Q_* \xi,$$

$$Q_* = \frac{4Q_0 R}{\sigma_0 (H_1 + H_2)^2} = \beta_1 \beta_2 p \xi$$

где Q_0 — перерезывающая сила. Предположим, что в предельном состоянии пластиинки напряженное состояние соответствует условию $t_r = t_0$. Тогда из первого уравнения равновесия из (3.11) найдем $t_r = t_0 = t = \text{const} > 0$ ($0 \leq \xi \leq 1$).

Границные условия задачи

$$(3.12) \quad t_r = t_0, \quad m_r = m_0, \quad Q_0 = 0 \text{ при } \xi = 0$$

$$(3.13) \quad \dot{u}_n = 0, \quad \dot{w}_n = 0, \quad d\dot{w}_n / d\xi = 0 \text{ при } \xi = 1$$

Из условий нагружения заключаем, что в предельном состоянии пластиинки реализуются следующие пластические режимы (см. фиг. 3 и (2.14) — (2.18))

при $0 \leq \tau \leq \gamma_* - \alpha_2 s_*$, $\tau = (1 + \alpha_2) t + \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2$

$$(3.14) \quad 0 \leq \xi \leq \rho : m_0 = \frac{4}{(1 + \alpha_2)^2} \left[-\frac{\alpha_2^2 (s_* + \Delta_2) + \gamma_* - \Delta_1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\gamma_*} (\tau + \alpha_2 s_* - \gamma_*)^2 \right]$$

$$(3.15) \quad \rho \leq \xi \leq 1 : m_0 - m_r = \frac{2}{(1 + \alpha_2)^2} \left[\frac{1}{2\gamma_*} (\alpha_2 s_* - \gamma_*)^2 - \alpha_2^2 s_* - \gamma_* \right]$$

при $\gamma_* - \alpha_2 s_* \leq \tau \leq 2\delta$

(3.16)

$$0 \leq \xi \leq \rho : m_0 = \frac{2}{(1 + \alpha_2)^2} \left[\frac{1}{2s_*} (\tau + \alpha_2 s_* - \gamma_*)^2 - \alpha_2^2 (s_* + \Delta_2) - \gamma_* + \Delta_1 \right]$$

$\rho \leq \xi \leq 1$: условие (3.15)

при $2\delta \leq \tau \leq \alpha_2 s_* + \gamma_*$

$0 \leq \xi \leq 1$: условие (3.16)

Координата $t^* = \delta$ точки H (см. фиг. 3) определяется по формуле

$$\delta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a = \frac{s_* + \gamma_*}{s_* \gamma_*}, \quad b = \frac{(\gamma_* - s_*)(\alpha_2 s_* - \gamma_*)}{s_* \gamma_*}, \\ c = \frac{(\alpha_2 s_* - \gamma_*)^2}{4s_*} - \frac{\alpha_2^2 s_* + \gamma_*}{2}$$

В дальнейшем рассматривается лишь случай 1, для которого, используя зависимости (2.19), (3.3), (3.14), (3.15) и удовлетворяя условия непрерывности для перемещений и $d\dot{w}_n / d\xi$ при $\xi = \rho$, а также два первых условия из (3.13), находим

$$(3.17) \quad t = (1 + \alpha_2)^{-1} [\gamma_* - \Delta_1 - \alpha_2 (s_* + \Delta_2)] \\ \dot{u}_n = 0, \quad \dot{w}_n = \dot{w}_* [\xi \rho^{-1} (\rho \ln \rho - 1) + 1] \text{ при } 0 \leq \xi \leq \rho \\ \dot{u}_n = 0, \quad \dot{w}_n = \dot{w}_* \rho \ln \xi \text{ при } \rho \leq \xi \leq 1$$

Из зависимости (3.17) видно, что случай 1 рассматривается обоснованно, так как необходимое для него неравенство выполняется.

Интегрируя уравнения равновесия в каждой из зон и удовлетворяя условия непрерывности при переходе величины m_r через $\xi = \rho$, а также учитывая соотношение (3.14), после удовлетворения граничных условий (3.12) получим

$$\begin{aligned}
 m_r &= \frac{2}{(1+\alpha_2)^2} \left[\Delta_1 - \gamma_* - \alpha_2^2(s_* + \Delta_2) + \frac{1}{2\gamma_*} (\tau + \alpha_2 s_* - \gamma_*)^2 \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{3} \beta_1 \beta_2 p \xi^2 \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq \rho \\
 m_r &= \frac{2}{(1+\alpha_2)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2\gamma_*} (\alpha_2 s_* - \gamma_*)^2 - \alpha_2^2 s_* - \gamma_* \right] \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{\xi}{\rho} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau}{\gamma_*} \left(\frac{\tau}{2} + \alpha_2 s_* - \gamma_* \right) - \alpha_2^2 \Delta_2 + \Delta_1 \right\} + \frac{1}{2} \beta_1 \beta_2 p \xi^2 \quad \text{при } \rho \leq \xi \leq 1 \\
 (3.18) \quad \rho &= \left\{ \frac{6}{p \beta_1 \beta_2 (1+\alpha_2)^2} \left[\alpha_2^2 s_* + \gamma_* - \frac{(\alpha_2 s_* - \gamma_*)^2}{2\gamma_*} \right] \right\}^{1/2}
 \end{aligned}$$

Поскольку невозможно удовлетворить условию $(d\dot{w}_n / d\xi) (\xi = 1) = 0$, то при $\xi = 1$ существует пластический шарнир [8] и граничное условие имеет вид

$$m_r = \frac{4}{(1+\alpha_2)^2} \left[\frac{\alpha_2^2(s_* - \Delta_2) + \gamma_* + \Delta_1}{2} - \frac{(\alpha_2 s_* - \gamma_*)^2}{\gamma_*} \right] \quad \text{при } \xi = 1$$

Из последнего условия найдем

$$p = \frac{4}{(1+\alpha_2)^2 \beta_1 \beta_2} \left[(\alpha_2^2 s_* + \gamma_*) (2.5 - \ln \rho) - \frac{(\alpha_2 s_* - \gamma_*)^2}{2\gamma_*} (4.5 - \ln \rho) \right]$$

3. Цилиндрическая оболочка с плоскими крышками. В этом случае выражения для моментов в каждой из составляющих конструкций такие же, как и в первых двух случаях. Для нахождения параметров предельной нагрузки необходимо удовлетворить условию непрерывности моментов (M_1, M_r) на стыке конструкций, а также условию

$$\frac{h_1^2}{4L} (1 + \alpha_1)^2 \frac{dm_1}{dx} (x = 1) = t H_1 (1 + \alpha_2)$$

(условию равенства перерезывающей силы в оболочке ($x = 1$) и растягивающего усилия в пластинке ($\xi = 1$)).

Окончательно для нахождения параметра предельной нагрузки в случаях 1) — 3) (см. (3.14) — (3.16)) найдем:

случай 1 при $v = 0$ и случай 2 при $v = 1$

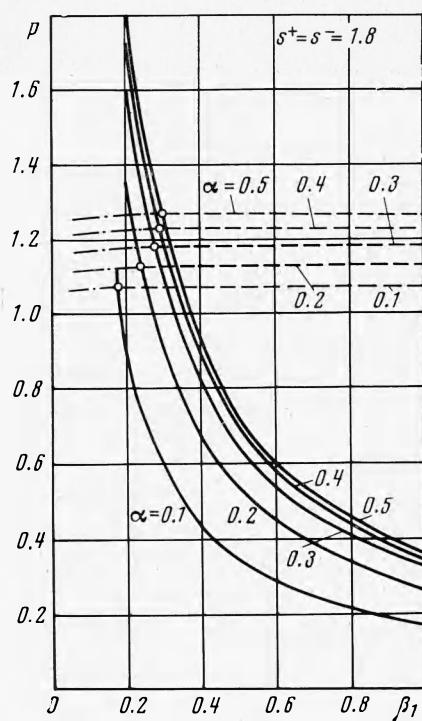
$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{2}{(1+\alpha_2)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2\gamma_*} (\alpha_2 s_* - \gamma_*)^2 - \alpha_2^2 s_* - \gamma_* \right] \left(\frac{3}{2} - \ln \rho \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau}{\gamma_*} \left(\frac{\tau}{2} + \alpha_2 s_* - \gamma_* \right) - \alpha_2^2 \Delta_2 + \Delta_1 - v (\alpha_2 s_* - \gamma_*)^2 \frac{s_* - \gamma_*}{2\gamma_* s_*} \right\} + \frac{1}{2} \beta_1 \beta_2 p \\
 \text{и 3)} \\
 \Phi &= \frac{2}{(1+\alpha_2)^2} \left[\frac{1}{2\gamma_*} (\tau + \alpha_2 s_* - \gamma_*)^2 - \alpha_2^2 (s_* + \Delta_2) + \Delta_1 - \gamma_* \right] + \frac{1}{3} \beta_1 \beta_2 p
 \end{aligned}$$

где ρ определяется по формуле (3.18), а

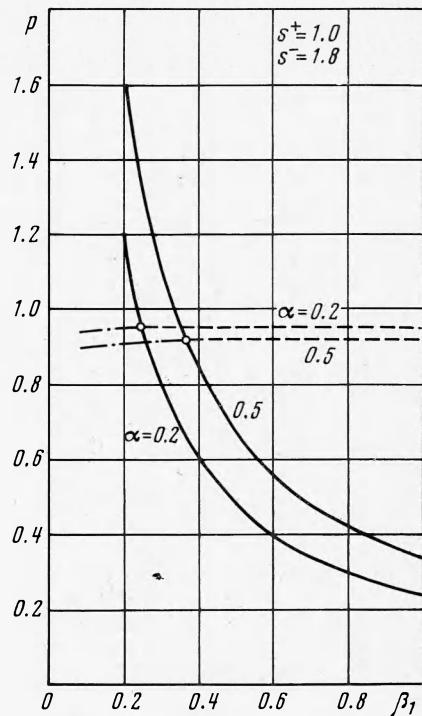
$$\begin{aligned}
 \Phi &= \beta_1 \left\{ \beta_2 \beta_3^2 \left[p - \frac{\alpha_1 (s_* - \Delta_2) + \gamma_* - \Delta_1}{1 + \alpha_1} \right] + \frac{4\beta_1}{(1 + \alpha_1)^2} \left[\frac{1}{4s_*} \left(\frac{1 + \alpha_1}{2} \right) p + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \Delta_1 + \alpha_1 \Delta_2 + \alpha_1 s_* - \gamma_* \right]^2 - \frac{\alpha_1^2 (s_* + \Delta_2) + \gamma_* - \Delta_1}{2} \right\} \\
 t &= \beta_1 \beta_3 \left[p + \frac{\alpha_1 (s_* - \Delta_2) + \gamma_* - \Delta_1}{1 + \alpha_1} \right]
 \end{aligned}$$

На фиг. 4 и 5 представлены графики зависимости предельной нагрузки от параметров геометрии β_1 и $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ при $\beta_2 = 20$, $\beta_3 = 5.0$, $\gamma^+ = \gamma^- = 1$. Сплошными линиями обозначены графики для предельной нагрузки жестко закрепленной пластинки, штриховыми — для предельной нагрузки цилиндрической оболочки с жесткими крышками и штрихпунктирными — для случая, когда пластина и оболочка находятся в предельном состоянии.

Если рассматривать предельное состояние конструкции в целом, то при данных геометрических параметрах в качестве предельной нагрузки следует принимать наименьшее из трех значений p . При тех значениях параметров, когда предельные нагрузки для жестко закрепленной пластины и цилиндрической оболочки с жесткими днищами совпадают, вся



Фиг. 4



Фиг. 5

конструкция находится в предельном состоянии. Параметры конструкции, при которых реализуется последний случай предельного состояния, следует считать оптимальными. На графиках соответствующие точки обозначены кружочками.

Если штрихпунктирная линия проходит ниже остальных, то в этих случаях вся конструкция также находится в предельном состоянии.

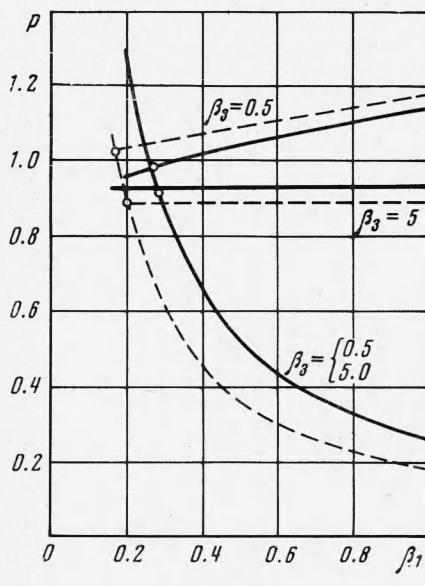
При увеличении $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ (увеличении толщины слоя более прочного материала с сохранением толщины конструкции в целом) увеличивается величина предельной нагрузки.

Из сравнения графиков фиг. 4 и 5 видно, что замена изотропного материала одного из слоев на разномодульный материал с пониженным пределом текучести на растяжение приводит к значительному уменьшению предельной нагрузки оптимального проекта. Но такое уменьшение

в процентном отношении ниже уменьшения предела текучести. Так, уменьшение предела текучести нижнего слоя на 44% приводит к снижению предельной нагрузки на 27% при $\alpha = 0.5$ и на 10% при $\alpha = 0.1$.

На фиг. 6 представлены результаты вычислений по нахождению оптимальных параметров для двухслойной конструкции, изготовленной из нержавеющей стали ($d = 7.7 \text{ г/см}^3$, $\sigma_s^+ = \sigma_s^- = 70 \text{ кг/мм}^2$) и алюминиевого сплава ($d = 2.85 \text{ г/см}^3$, $\sigma_s^+ = \sigma_s^- = 59.5 \text{ кг/мм}^2$). Принято $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0.85$, $\beta_2 = 20$. Сплошные линии построены для случаев, когда верхний слой изготовлен из нержавеющей стали, а нижний — из алюминиевого сплава. Штриховыми линиями обозначены кривые для однослойной конструкции из нержавеющей стали, имеющей одинаковый вес с двухслойной. Если расположение слоев биметаллической конструкции поменять так, что верхний слой будет из алюминиевого сплава, а нижний — из нержавеющей стали, то по сравнению с предыдущим случаем для малых значений β_1 предельная нагрузка почти не изменяется, а для $\beta_1 > 0.4$ она выше примерно на 4—5%. Соответствующие кривые практически сливаются с приведенными на фиг. 6.

Сравнивая величины предельных нагрузок для оптимальных проектов, можно заключить, что замена однослойной конструкции двухслойной такого же веса, когда один из слоев имеет пониженный предел текучести, не приводит к значительному уменьшению предельной нагрузки, а в некоторых случаях может привести к ее увеличению. Так, в рассмотренном случае снижение предела текучести на 15% приводит к уменьшению предельной нагрузки оптимального проекта на 4% при $\beta_3 = 0.5$, а при $\beta_3 = 5$ она на 3.3% выше предельной нагрузки для однослойной стальной конструкции.



Фиг. 6

Поступила 4 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Bertossa R. C., Rau S. Паяные биметаллические материалы для баллистических ракет. Экспресс — информация, Сварочное производство, 1959, вып. 43, № 128.
2. Bonnemeier G. Das Trowal — Gleitschliff — Verfahren unter Anwendung von Vibratoren Metall, 1962, Jg. 16, H. 1.
3. Григорьев Э. И. К расчету на устойчивость биметаллических цилиндрических оболочек. Изв. сб., 1956, т. 23.
4. Немировский Ю. В. Несущая способность цилиндрических биметаллических оболочек. Изв. вузов, Машиностроение, 1969, № 11.
5. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М., «Наука», 1972.
6. Баландин П. П. К вопросу о гипотезах прочности. Вестн. инж. и техн., 1937, № 1.
7. Онат, Прагер. Предельное равновесие оболочек вращения. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит., Механика, 1955, № 5.
- Прагер В. Проблемы теории пластичности. М., Физматгиз, 1958.