УДК 532.61.096: 532.62:532.5.013.4

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

О. А. Бурмистрова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: oksanabur@mail.ru

В приближении тонкого слоя рассматривается задача о свободной жидкой пленке, ограниченной по вертикали твердыми стенками и находящейся под действием силы тяжести и термокапиллярных сил. Решение, при котором толщина пленки постоянна, а температура является линейной функцией продольной координаты, исследуется на устойчивость аналитически с помощью метода согласования асимптотических разложений и численно с помощью метода ортогонализации при различных значениях ускорения свободного падения. Полученные аналитически и численно результаты хорошо согласуются. Показано, что решение неустойчиво, но инкремент возмущений является малым даже в условиях земной гравитации.

Ключевые слова: свободная жидкая пленка, гидродинамическая устойчивость, вязкая жидкость, термокапиллярный эффект, свободная поверхность.

DOI: 10.15372/PMTF20200308

Введение. В работах, посвященных исследованию неизотермических пленок жидкости, в основном рассматриваются пленки, находящиеся на твердой поверхности или стекающие по стенке. Течения жидких пленок с двумя свободными поверхностями (свободных пленок) изучены в меньшей степени.

В работах [1, 2] в приближении тонкого слоя теоретически исследована деформация свободной жидкой пленки под действием термокапиллярных сил в условиях невесомости. При этом в [1] в предположении, что свободная поверхность является идеально теплопроводящей, получено уравнение для определения толщины пленки. Групповые свойства уравнений и инвариантные решения для бесконечно протяженной пленки исследованы в работе [2].

В работе [3] в точной постановке рассмотрены деформация и разрыв тонкой жидкой пленки под действием концентрированной тепловой нагрузки при отсутствии гравитации, предложена схема численных расчетов в переменных вихрь — функция тока. В [4] для этой задачи исследуется влияние числа Прандтля на разрыв пленки.

В экспериментах [5] для горизонтальной свободной пленки, закрепленной по прямоугольному контуру, обнаружена неустойчивость течения, а также описаны ячеистые структуры, возникающие вследствие термокапиллярного эффекта. Влияние формы сво-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-01-00096).

бодной поверхности на структуру течения для данной задачи экспериментально изучалось в [6].

В работе [7] проведено численное исследование термокапиллярных колебательных течений в свободной жидкой пленке, натянутой на круговой контур, в условиях невесомости.

В настоящей работе интерпретируются результаты экспериментов [8, 9], в которых получены протяженные по длине свободные вертикальные жидкие пленки. Эти пленки являются долгоживущими и могут быть использованы в технологии опреснения воды.

1. Постановка задачи. Рассматривается вязкая несжимаемая жидкость, которая заполняет плоский слой $\Omega_t = \{x \in (0,l);\ z \in (-h(x,t), h(x,t))\}$ ($l > 0$ — длина пленки). При $x = 0$, $x = l$ жидкость ограничена твердыми стенками, а границы при $z = \pm h(x,t)$ являются неизвестными свободными поверхностями. Направление ускорения свободного падения $\boldsymbol{g} = (-g, 0)$ противоположно направлению оси x. Течение полагается симметричным относительно прямой $z = 0$. Зависимость коэффициента поверхностного натяжения σ от температуры T имеет вид

$$\sigma = \sigma_0 - \varkappa(T - T_0),$$

где $\varkappa$ — температурный коэффициент поверхностного натяжения; σ_0, T_0 — положительные постоянные.

В приближении тонкого слоя в предположении идеальной теплоизолированности свободной поверхности система трех уравнений, связывающая расход жидкости через поперечное сечение пленки q, толщину пленки h и ее осредненную температуру T, имеет вид [10]

$$-q_t + \frac{\sigma_0}{\rho}\,hh_{xxx} = \frac{\varkappa}{\rho}\,T_x + gh, \quad h_t + q_x = 0, \quad (hT)_t + (qT)_x = \chi(hT_x)_x, \tag{1}$$

где ρ — плотность жидкости; χ — температуропроводность жидкости. Для системы задаются граничные условия

$$q = 0, \qquad h_x = 0 \qquad (x = 0, \quad x = l), \tag{2}$$

а также пара краевых условий для температуры: условия либо второго рода

$$T_x = Q_1 \quad (x = 0), \qquad T_x = Q_2 \quad (x = l) \tag{3}$$

(Q_1, Q_2 — заданные значения тепловых потоков на нижней и верхней стенках соответственно), либо первого рода

$$T = T_{1S} \quad (x = 0), \qquad T = T_{2S} \quad (x = l) \tag{4}$$

(T_{1S}, T_{2S} — температуры нижней и верхней стенок соответственно).

Введем безразмерные переменные по формулам

$$x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \frac{t}{t^*}, \quad T' = \frac{T}{\theta}, \quad h' = \frac{h}{\varepsilon l}, \quad q' = \frac{q}{q^*},$$

где $t^* = \rho\nu l/(\varepsilon\varkappa\theta)$; $q^* = \varepsilon^2\varkappa\theta l/(\rho\nu)$; ν — вязкость жидкости; θ — характерный перепад температур; $\varepsilon = \max h/l$ — отношение максимальной толщины пленки к ее длине l. Далее штрихи над безразмерными переменными опускаются.

Система (1) с условиями (2), (3) или (2), (4) имеет решение с постоянной толщиной пленки:

$$h = 1, \qquad T = -x + c, \qquad q = 0 \tag{5}$$

(c — постоянная). Такое решение существует при условии выполнения следующего соотношения между гравитацией и характерным перепадом температур θ:

$$\varkappa\theta = \rho g\varepsilon l^2. \tag{6}$$

2. Устойчивость решения с постоянной толщиной. Исследуем на устойчивость решение (5). Сначала рассмотрим случай, когда для температуры на твердых стенках заданы условия (3). Линеаризуя задачу (1)–(3) в безразмерных переменных на решении (5), получаем систему уравнений для возмущений

$$-\delta q_t + h_{xxx} = \gamma(T_x + h), \qquad T_t - q = \alpha(-h_x + T_{xx}), \qquad h_t + q_x = 0 \tag{7}$$

с граничными условиями

$$h_x(0) = h_x(1) = q(0) = q(1) = 0; \tag{8}$$

$$T_x(0) = T_x(1) = 0, \tag{9}$$

где $\alpha = \rho\nu\chi/(\varepsilon\varkappa\theta l)$; $\delta = \varepsilon\varkappa^2\theta^2 l/(\rho\nu^2\sigma_0)$; $\gamma = \varkappa\theta/(\sigma_0\varepsilon^2)$.

Система (7) сводится к уравнению относительно q:

$$q_{xxxxxx} - (1/\alpha)q_{txxxx} - 2\gamma q_{xxx} + \delta q_{ttxx} - (\delta/\alpha)q_{ttt} = 0, \tag{10}$$

а условия (8), (9) — к условиям

$$q = q_{xx} = q_{xxxx} - \gamma q_x = 0 \qquad (x = 0, \quad x = 1). \tag{11}$$

Решение задачи (10), (11) ищем в виде

$$q(x,t) = \mathrm{e}^{\lambda t} f(x),$$

где λ — комплексный параметр, и получаем задачу на собственные значения

$$f_{xxxxxx} - (\lambda/\alpha)f_{xxxx} - 2\gamma f_{xxx} + \delta\lambda^2 f_{xx} - (\delta\lambda^3/\alpha)f = 0; \tag{12}$$

$$f(0) = f(1) = f_{xx}(0) = f_{xx}(1) = f_{xxxx}(0) - \gamma f_x(0) = f_{xxxx}(1) - \gamma f_x(1) = 0. \tag{13}$$

Введем параметр $\beta = \alpha^2\delta$ и выполним замену $\zeta = \sqrt{\delta}\,\lambda$. Тогда уравнение (12) принимает вид

$$f_{xxxxxx} - (\zeta/\sqrt{\beta}\,)f_{xxxx} - 2\gamma f_{xxx} + \zeta^2 f_{xx} - (\zeta^3/\sqrt{\beta}\,)f = 0. \tag{14}$$

Заметим, что согласно определениям α и δ параметр β не зависит от характерного перепада температур (или согласно (6) от ускорения свободного падения). При этом при использовании для воды следующих значений параметров: $\sigma_0 = 0{,}075$ Н/м, $\rho = 1000$ кг/м^3, $\varkappa = 2\cdot10^{-4}$ Н/(м$\cdot$К), $l = 0{,}01$ м, $\nu = 10^{-6}$ м^2/с, $\varepsilon = 10^{-2}$, параметр β имеет значение $\beta = 2{,}61\cdot10^{-6}$.

Положим $\eta = \sqrt[4]{\beta}$. Тогда уравнение (14) принимает вид

$$\eta^2 f_{xxxxxx} - \zeta f_{xxxx} - 2\gamma\eta^2 f_{xxx} + \eta^2\zeta^2 f_{xx} - \zeta^3 f = 0. \tag{15}$$

С учетом того что малый параметр η^2 находится при старшей производной, решение задачи (15), (13) будем искать с помощью метода согласования асимптотических разложений, предложенного М. И. Вишиком и Л. А. Люстерником [11]. Для решения данной задачи, являющейся сингулярно возмущенной задачей с регулярным вырождением, необходимо построить погранслойные функции вблизи границ $x = 0$, $x = 1$. При этом параметр ζ раскладывается в ряд по степеням η:

$$\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \zeta_k.$$

Внешнее разложение решения (т. е. решение за пределами пограничных слоев) имеет вид

$$R \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k r_k(x). \tag{16}$$

Подставляя ряд (16) в задачу (15), (13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях η, в нулевом порядке получаем уравнение

$$r_{0xxxx} + \zeta_0^2 r_0 = 0 \tag{17}$$

с краевыми условиями

$$r_0(0) = r_0(1) = r_{0xx}(0) = r_{0xx}(1) = 0. \tag{18}$$

Из условия разрешимости краевой задачи (17), (18) находим

$$\zeta_0 = i\pi^2. \tag{19}$$

Таким образом, в нулевом порядке решение имеет вид нейтральных колебаний. При этом

$$r_0(x) = \sin \pi x. \tag{20}$$

Последние два краевых условия (13) для функции (20) не выполняются, и для ликвидации невязки строятся внутренние (погранслойные) разложения решения. Введем "растянутую" координату $\xi = x/\eta$ и будем искать внутреннее разложение вблизи границы $x = 0$ в виде

$$S \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k+4} s_k(\xi). \tag{21}$$

Из (15) следует, что разложение S удовлетворяет уравнению

$$S_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} - \zeta S_{\xi\xi\xi\xi} - 2\gamma\eta^3 S_{\xi\xi\xi} + \eta^4\zeta^2 S_{\xi\xi} - \eta^4\zeta^3 S = 0. \tag{22}$$

Согласно [11] погранслойные функции s_k должны удовлетворять условиям

$$s_k(\xi) \to 0 \qquad (\xi \to \infty). \tag{23}$$

Также сумма рядов (16), (21) должна удовлетворять предпоследнему краевому условию (13).

Подставляя ряд (21) в уравнение (22) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях η, в главном порядке получаем

$$s_{0\xi\xi\xi\xi\xi\xi} - \zeta_0 s_{0\xi\xi\xi\xi} = 0. \tag{24}$$

Решением уравнения (24), удовлетворяющим условию (23), является функция

$$s_0(\xi) = m\,\mathrm{e}^{-(1+i)\pi\xi/\sqrt{2}},$$

где постоянная m определяется из условия

$$s_{0\xi\xi\xi\xi}(0) = \gamma r_{0x}(0) - r_{0xxxx}(0).$$

Получаем

$$m = -\gamma/\pi^3.$$

Для того чтобы найти внутреннее разложение решения вблизи границы $x = 1$, введем "растянутую" переменную $\tau = (1-x)/\eta$. Решение находим в виде ряда

$$J \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k+4} j_k(\tau), \tag{25}$$

где J удовлетворяет уравнению

$$J_{\tau\tau\tau\tau\tau\tau} - \zeta J_{\tau\tau\tau\tau} + 2\gamma\eta^3 J_{\tau\tau\tau} + \eta^4\zeta^2 J_{\tau\tau} - \eta^4\zeta^3 J = 0. \tag{26}$$

Подставляя ряд (25) в уравнение (26), с учетом последнего краевого условия (13) получаем

$$j_0(\tau) = (\gamma/\pi^3)\,\mathrm{e}^{-(1+i)\pi\tau/\sqrt{2}}\,.$$

Увеличивая значение степени η, из условий разрешимости соответствующих краевых задач по рекуррентным формулам находим ζ_k:

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = 0, \quad \zeta_4 = -\frac{3i\gamma^2}{4\pi^4}, \quad \zeta_5 = \frac{\sqrt{2}\,\gamma^2(1+i)}{\pi^5}, \quad \zeta_6 = \frac{5\gamma^2}{2\pi^4}, \tag{27}$$

$$\zeta_7 = \frac{2\sqrt{2}\,\gamma^2(i-1)}{\pi^5}, \quad \zeta_8 = \frac{i\gamma^2(168\pi^6 - 21\gamma^2 + 32\pi^5 \operatorname{cth}\pi/2)}{32\pi^{10}}, \quad \zeta_9 = \frac{(i+1)\gamma^2(15\gamma^2 - 36\pi^6)}{4\sqrt{2}\pi^{11}}.$$

Таким образом, только в пятом порядке появляется инкремент возмущений.

Рассмотрим случай, когда вместо условия (9) для возмущений температуры на твердых стенках выполняется условие

$$T(0) = T(1) = 0, \tag{28}$$

которое получается при линеаризации условия (4). Тогда для уравнения (10) должны выполняться условия

$$q = q_{xx} = q_{xxxxx} + \delta q_{ttx} = 0 \qquad (x = 0, \quad x = 1). \tag{29}$$

Решая задачу (10), (29) как задачу (10), (11), получаем

$$\zeta_0 = i\pi^2, \quad \zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = 0, \quad \zeta_4 = \frac{i\gamma^2(4 + 4\,\mathrm{e}^{\pi} + 3\pi - 3\,\mathrm{e}^{\pi}\pi)}{4\pi^5(\mathrm{e}^{\pi} - 1)},$$

$$\zeta_5 = 0, \quad \zeta_6 = \frac{5\gamma^2}{2\pi^4}, \quad \zeta_7 = \frac{4\sqrt{2}\,\gamma^2(i-1)}{\pi^5},$$

$$\zeta_8 = \frac{i\gamma^2}{32\pi^{12}(1-\mathrm{e}^{\pi})^3}\,(32\pi^7(\mathrm{e}^{\pi}-1)^2(1+\mathrm{e}^{\pi}) - 168\pi^8(\mathrm{e}^{\pi}-1)^3 + 40\gamma^2(\mathrm{e}^{\pi}-1)(\mathrm{e}^{\pi}+1)^2 - $$

$$- 16\pi\gamma^2(3 - 5\,\mathrm{e}^{\pi} - 5\,\mathrm{e}^{2\pi} + 3\,\mathrm{e}^{3\pi}) + 3\pi^2\gamma^2(7\,\mathrm{e}^{3\pi} - 37\,\mathrm{e}^{2\pi} + 37\,\mathrm{e}^{\pi} - 7)), \tag{30}$$

$$\zeta_9 = -\frac{8\sqrt{2}\,(i+1)\gamma^2}{\pi^5}.$$

В этом случае инкремент возмущений появляется лишь в шестом порядке.

Таким образом, собственные значения можно найти с достаточной точностью при различных значениях g как в случае задания краевых условий (9), так и в случае задания условий (28). Однако данное решение является приближенным аналитическим решением. Для сравнения строится численное решение с использованием метода ортогонализации, одновременно и независимо предложенного С. К. Годуновым [12] и А. А. Абрамовым [13]. Полученные численно собственные значения ζ для различных значений g представлены в табл. 1 (для случая, когда для температуры выполняются условия (9)) и табл. 2 (для случая, когда для температуры выполняются условия (28)), где также представлены собственные значения $\tilde{\zeta}$, вычисленные асимптотически по формулам (19), (27) или (30). Из табл. 1, 2 следует, что результаты, полученные численно и аналитически, хорошо согласуются.

На рисунке приведены зависимости вещественной λ_r и мнимой λ_i частей собственных значений от ускорения свободного падения. Видно, что и в случае задания для температуры краевого условия первого рода, и в случае задания условия второго рода решение

Таблица 1

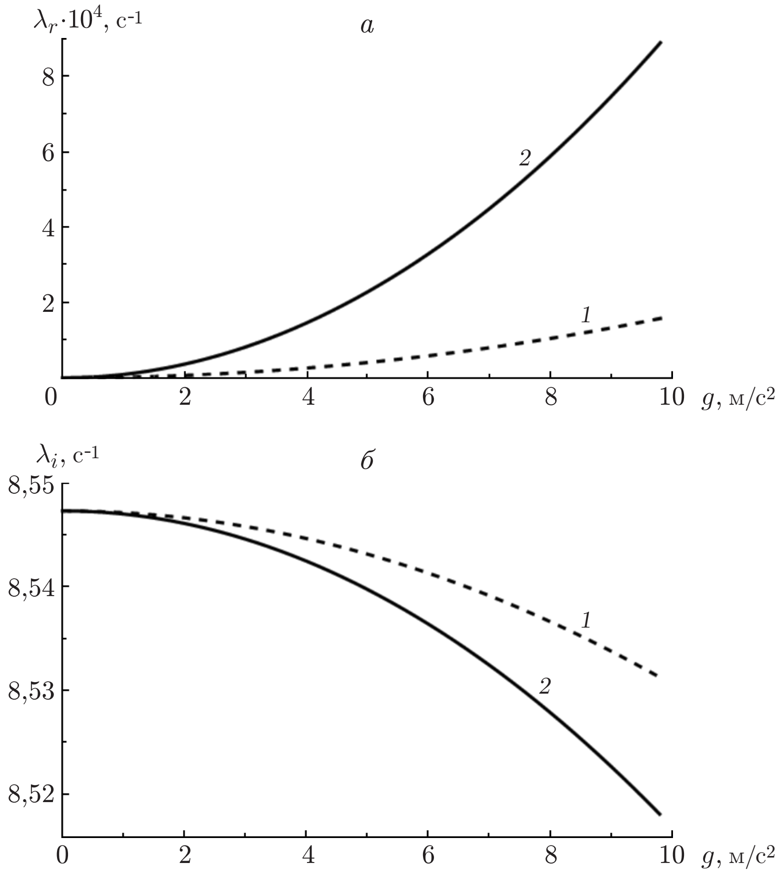
Значения ζ, $\tilde{\zeta}$ при различных значениях g в случае, когда на твердых стенках для температуры задано краевое условие второго рода

g, м/с^2	$\tilde{\zeta}$	ζ
0,1	$1{,}05 \cdot 10^{-7} + i \cdot 9{,}8696$	$1{,}05 \cdot 10^{-7} + i \cdot 9{,}8696$
1,0	$1{,}05 \cdot 10^{-5} + i \cdot 9{,}8693$	$1{,}05 \cdot 10^{-5} + i \cdot 9{,}8693$
4,0	$1{,}68 \cdot 10^{-4} + i \cdot 9{,}8640$	$1{,}68 \cdot 10^{-4} + i \cdot 9{,}8640$
9,8	$1{,}02 \cdot 10^{-3} + i \cdot 9{,}8360$	$1{,}03 \cdot 10^{-3} + i \cdot 9{,}8358$

Таблица 2

Значения ζ, $\tilde{\zeta}$ при различных значениях g в случае, когда на твердых стенках для температуры задано краевое условие первого рода

g, м/с^2	$\tilde{\zeta}$	ζ
0,1	$1{,}87 \cdot 10^{-8} + i \cdot 9{,}8696$	$1{,}89 \cdot 10^{-8} + i \cdot 9{,}8696$
1,0	$1{,}87 \cdot 10^{-6} + i \cdot 9{,}8694$	$1{,}87 \cdot 10^{-6} + i \cdot 9{,}8694$
4,0	$2{,}99 \cdot 10^{-5} + i \cdot 9{,}8665$	$2{,}99 \cdot 10^{-5} + i \cdot 9{,}8665$
9,8	$1{,}79 \cdot 10^{-4} + i \cdot 9{,}8511$	$1{,}82 \cdot 10^{-4} + i \cdot 9{,}8511$



Зависимости инкремента (*а*) и частоты (*б*) возмущений от ускорения свободного падения в случае задания для температуры краевого условия первого (*1*) и второго (*2*) рода неустойчиво, однако инкремент остается малым даже при наличии земной гравитации. В случае условия (28) инкремент равен $1{,}58 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$. Таким образом, время, за которое амплитуда возмущений увеличивается в e раз, равно 105,8 мин. В случае краевого условия (9) инкремент равен $8{,}89 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$, и время, за которое амплитуда увеличивается в e раз, равно 18,76 мин. Следовательно, пленка может существовать достаточно длительное время, что согласуется с экспериментальными данными [8, 9]. При этом в случае задания для температуры краевого условия второго рода инкремент возмущений больше, чем в случае задания краевого условия первого рода.

Заключение. В приближении тонкого слоя при различных значениях ускорения свободного падения исследована на устойчивость неизотермическая свободная вертикальная жидкая пленка с постоянной толщиной. Полученные аналитически и численно результаты хорошо согласуются. Показано, что решение является неустойчивым, однако даже в условиях земной гравитации инкремент возмущений остается малым. Установлено, что в случае если на твердых стенках для температуры задается краевое условие первого рода, инкремент меньше, чем в случае задания краевого условия второго рода.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пухначев В. В., Дубинкина С. Б.** Модель деформации и разрыва пленки под действием термокапиллярных сил // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5. С. 89–107.
2. **Meleshko S. V., Pukhnachev V. V., Pukhnacheva T. P.** Traveling waves and self-similar solutions in model of free non-isothermal liquid film // Adv. Math. Sci. Appl. 2009. V. 19, N 2. P. 465–477.
3. **Ovcharova A. S.** Features of the rupture of free hanging liquid film under the action of a thermal load // Phys. Fluids. 2011. V. 23, N 10. 102106.
4. **Овчарова А. С.** Влияние теплофизических свойств жидкости на особенности разрыва пленки под действием тепловой нагрузки. Роль числа Прандтля // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 2. С. 43–52.
5. **Ueno I., Torii T.** Thermocapillary-driven flow in a thin liquid film sustained in a rectangular hole with temperature gradient // Acta Astronaut. 2010. V. 66, N 7/8. P. 1017–1021.
6. **Fei L., Ikebukuro K., Katsuta T., et al.** Effect of static deformation on basic flow patterns in thermocapillarydriven free liquid film // Microgravity Sci. Technol. 2017. V. 29, N 1/2. P. 29–36.
7. **Yamamoto T., Takagi Y., Okano Y., Dost S.** Numerical investigation of oscillatory thermocapillary flows under zero gravity in a circular liquid film with concave free surfaces // Phys. Fluids. 2016. V. 28, N 3. 032106.
8. **Soua W., Kaiss A., Tadrist L., Kabov O.** Hydrodynamic and heat transfer of a falling liquid film on a horizontal heated tube: simulation and experimentation // Proc. of the 3rd Intern. topical team workshop on two-phase systems for ground and space applications, Brussels (Belgium), 10–12 Sept. 2008. Brussels: Université Libre de Bruxelles, 2008. P. 50.
9. **Fridhi H., Soua W., Kaiss A., Tadrist L.** Flow patterns and wavelength measurement for liquid film falling around horizontal tube // Proc. of the Intern. conf. on composite materials and renewable energy applications, Sousse (Tunisia), 22–24 Jan. 2014. Piscataway: IEEE, 2014. 6843802.
10. **Burmistrova O. A.** Equilibrium and stability of a free liquid film in a longitudinal gravitational field // J. Sib. Federat. Univ. Math. Phys. 2015. V. 8, N 3. P. 253–259.

11. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.

12. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.

13. **Абрамов А. А.** О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 3. С. 542–545.

Поступила в редакцию 6/XII 2019 г.,
после доработки — 6/XII 2019 г.
Принята к публикации 23/XII 2019 г.