

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В СРЕДЕ С РЕЛАКСАЦИЕЙ ИЛИ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИЕЙ

В. Е. Накоряков, А. А. Борисов

1. Рассмотрению акустических волн в газе с обратимой химической реакцией или замедленным переходом молекул из одного вибрационного состояния в другое посвящены работы [1—3]. В них отмечена дисперсия скорости звука для газов, обладающих одной из внутренних степеней свободы. Экспериментально [4] и теоретически на основе принципа Ле-Шателье [5] установлено, что высокочастотная скорость звука (период волны  $T$  меньше характерного времени внутреннего процесса  $\tau$ ) больше низкочастотной скорости звука. В той же работе [5] показано, что низкочастотная дисперсия мнимая, т. е. замедленному возбуждению внутренних процессов отвечает аномально большой второй коэффициент вязкости [3].

Структура ударных волн в средах с внутренними процессами изучалась в [6, 7] на основе соотношений Гюгонио. В [6] постулировалось существование ударной волны и был показан эффект резкого расширения фронта возмущения, который для волн небольших амплитуд и  $\tau/T \ll 1$  можно объяснить, исходя из результатов [3]. Доказательство возможности существования ударной волны в релаксирующей среде было дано в [7]. В работе [8] в предположениях малости нелинейности среды и диссипации энергии в ней получены упрощенные уравнения для всей области распространения конечных возмущений для произвольных чисел Рейнольдса. Однако, в [8] рассматривались лишь процессы медленной релаксации ( $\tau/T \ll 1$ ). В этом случае структура фронта ударной волны и ее установление описывается уравнением Бюргерса, рассмотренным в работе [8]. Но поскольку в начальном негармоническом возмущении всегда содержатся (согласно разложению Фурье) гармоники, удовлетворяющие условию  $0 < T \sim \tau < \infty$ , при распространении возмущения по диспергирующей среде необходимо рассматривать и процессы быстрой релаксации ( $1 \geq \tau/T < \infty$ ).

Полученное в данной работе уравнение позволяет проследить как формирование ударной волны, так и ее структуру без наложения ограничений на длительность процесса возбуждения, сохраняя естественное ограничение: длина всех волн значительно превосходит длины свободных побегов.

2. Полная система уравнений, описывающая движение среды с внутренними процессами, включает в себя уравнения движения, неразрывности, состояния и реакции, причем давление в этом случае зависит также и от внутренней координаты  $\xi$  [3], характеризующей этот процесс,

$$du/dt + p_x/\rho = 0, \quad (1)$$

$$d\rho/dt + \rho u_x = 0, \quad (2)$$

$$p = p(\rho, s, \xi), \quad (3)$$

$$d\xi/dt = -(\xi - \xi_0)/\tau, \quad (4)$$

где  $\xi_0$  — постоянное равновесное значение параметра  $\xi$ , отвечающее за внутренний процесс ( $\xi$  — может быть концентрацией, температурой),  $\tau$  — его характерное время;  $s$  — энтропия  $p$ ,  $\rho$  — давление, плотность;  $u$  — скорость среды в лабораторной системе координат  $x$ ,  $t$ ; индексы снизу означают частные производные.

Отклонения от равновесных значений давления, плотности, скорости, внутренней координаты  $(p-p_0/p_0, (\rho-\rho_0)/\rho_0, v/c_0, (\xi-\xi_0)/\xi_0 \sim \mu$  предполагаются величинами первого порядка малости. Разлагая уравнение (3) в ряд вблизи состояния равновесия и пренебрегая малыми третьего порядка, получим

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0)(\partial p/\partial \rho)_{\xi_0} + (\rho - \rho_0)^2(\partial^2 p/\partial \rho^2)_{\xi_0}/2 + (\xi - \xi_0)(\partial p/\partial \xi)_{\rho_0}. \quad (5)$$

Здесь, согласно [5],  $s-s_0 \sim \mu^3$  ( $\mu$  — величина первого порядка малости);  $c_0$  — равновесная скорость звука,  $u_0=0$ .

Далее воспользуемся тождеством

$$dp/dt = (\partial p/\partial \rho)_{\xi} \cdot d\rho/dt + (\partial p/\partial \xi)_{\rho} \cdot d\xi/dt \quad (6)$$

и уравнениями (4), (5). Исключив из них  $\xi$ , получим

$$dp'/dt - [c_{\infty}^2 + (\partial^2 p/\partial \rho^2)_{\xi} \cdot \rho'] d\rho'/dt + [p - p_0 - c_0^2 \rho' - (\partial^2 p/\partial \rho^2)_{\xi} \cdot \rho'^2/2]/\tau = 0 \quad (7)$$

где  $\rho' = \rho - \rho_0$ ,  $p' = p - p_0$ ,  $c_{\infty}$  — высокочастотная скорость звука.

Уравнение состояния (7) записано с точностью до второго порядка малости по степеням  $\rho'$ ,  $p'$  и  $\xi'$  при условии  $\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} \sim \mu$ , которое выполняется для большинства газов, так как  $\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} \sim (c_{\infty}^2 - c_0^2)/c_0^2 = m \sim \mu$ .

Уравнение (7) связывает  $p'$  и  $\rho'$  при любых скоростях изменения этих величин относительно скорости изменения внутренней координаты.

В работе [8] также приведено уравнение (7), однако для расчета эволюции возмущения в качестве уравнения состояния используется уравнение (5), которое позволяет свести систему уравнений (1), (2), (5) к уравнению Бюргерса.

Используя (7), исключая из (1) давление и оставляя в полученных уравнениях члены до второго порядка малости по  $\rho'$  и  $v$  ( $v$  — возмущенные скорости) получим систему типа Буссинеска

$$\begin{aligned} [(\rho_0 + \rho') \cdot v_t + \rho_0 v v_x + c_0^2 \rho'_x + \alpha \rho' \rho'_x]/\tau = [(\rho_0 + \rho') v_t + \rho_0 v v_x + \\ + c_0^2 \rho'_x + \alpha \rho' \rho'_x]_t - c_0^2 m \rho'_{tx} - c_{\infty}^2 (v \rho'_x)_x - \rho_0 (v v_t)_x, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\rho'_t + \rho_0 v_x + \rho' v_x + v \rho'_x = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\alpha = (\partial^2 p/\partial \rho^2)_{\xi_0} = (\gamma - 1) c_0^2/\rho_0$  — в случае адиабатического процесса изменения  $p'$  и  $\rho'$ .

3. Рассмотрим распространение бесконечно малых возмущений в среде с релаксацией. Уравнения (8), (9) принимают вид

$$\rho_0 v_t + c_0^2 \rho'_x = \tau [\rho_0 v_t + c_0^2 \rho'_x]_t - \tau c_0^2 m \rho'_{tx}, \quad \rho'_t + \rho_0 v_x = 0. \quad (10)$$

Решение этой системы ищем в виде бегущих волн ( $x > 0$ )

$$\rho' \sim \rho_0 \exp [i(kx - \omega t)], \quad v \sim c_0 \exp [i(kx - \omega t)],$$

где между волновым числом  $k$  и частотой  $\omega$  имеется функциональная связь, причем  $\omega$ , вообще говоря, комплексная величина. Эта связь определяется из условия совместности решений системы (10), которое приводит к уравнениям

$$\tau [v_{tt} - c_{\infty}^2 v_{xx}]_t + v_{tt} - c_0^2 v_{xx} = 0, \quad (11)$$

$$\tau \omega^3 + i \omega^2 - k c_0^2 \omega \tau (m + 1) - k^2 c_0^2 i = 0.$$

Для фазовой скорости  $v_p = \omega/k$  из (11) получим

$$v_p = [(c_{\infty}^2 \omega \tau + c_0^2 i)/(\omega \tau + i)]^{1/2}. \quad (12)$$

Выделяя в последнем выражении вещественную  $v_{PR}$  и мнимую части  $v_{PI m}$ , имеем

$$v_{PR}^2 = \omega^2 \tau^2 (c_0^2 - c_\infty^2) / \{ -2(\omega^2 \tau^2 + 1)(\omega^2 \tau^2 c_\infty^2 + c_0^2 - [(\omega^2 \tau^2 + 1)(\omega^2 \tau^2 c_\infty^4 + c_0^4)]^{1/2}) \}, \quad (13)$$

$$v_{PI m}^2 = \{ -(\omega^2 \tau^2 c_\infty^2 + c_0^2) + [(\omega^2 \tau^2 + 1)(\omega^2 \tau^2 c_\infty^4 + c_0^4)]^{1/2} \} / [2 \cdot (\omega^2 \tau^2 + 1)]. \quad (14)$$

Общий вид кривых (13) и (14) приведен на рис. 1. Значение  $m = 0,078$  соответствует экспериментальным данным [4] по дисперсии звука в  $\text{CO}_2$  при нормальных условиях ( $p = 1$  атм,  $T = 300\text{K}$ ,  $c_\infty = 270$  м/с,  $c_0 = 260$  м/с).

В дальнейшем полное линейное уравнение, соответствующее дисперсионному уравнению (11), не рассматривается. Исследуем характерные области дисперсионных кривых  $v_{PR}$ ,  $v_{PI m}$  при  $\omega\tau \rightarrow 0$ ,  $\omega\tau \rightarrow 1$ ,  $\omega\tau \rightarrow \infty$ .

Рассматривая случай  $\omega\tau \rightarrow \infty$  и разлагая фазовую скорость в ряд вблизи  $\tau\omega = 0$ , ограничимся членами второго порядка малости по  $\tau\omega$

$$v_P = v_{P \omega\tau=0} + (\partial v_P / \partial (\omega\tau))_{\omega\tau=0} \cdot \omega\tau + (\partial^2 v_P / \partial (\omega\tau)^2)_{\omega\tau=0} \cdot (\omega\tau)^2 / 2.$$

Вычисляя коэффициенты при степенях  $\omega\tau$  с помощью уравнения (12), найдем

$$v_P = c_0 - imc_0 \omega\tau / 2 + mc_0 (\omega\tau)^2 / 2 + 0 [(\omega\tau)^3]. \quad (15)$$

Действительная дисперсия

$$v_{PR} = c_0 + mc_0 (\omega\tau)^2 / 2 \quad (16)$$

мнимая —

$$v_{PI m} = -mc_0 \omega\tau / 2. \quad (17)$$

Асимптотические кривые (16) и (17) хорошо описывают поведение полных дисперсионных кривых (13) и (14) в области  $0 < \omega\tau < [(c_\infty - c_0) / c_0]^{1/2}$ .

Уравнение для амплитуды возмущения скорости, плотности, соответствующее (15), в данной области  $\omega\tau$  есть линейное уравнение КДВБ (Кортевега—де-Вриза—Бюргерса)

$$v_x + v_t / c_0 - v_{tt} \tau (c_\infty^2 - c_0^2) / 2c_0^3 + v_{ttt} \tau^2 (c_\infty^2 - c_0^2) / 2c_0^3 = 0. \quad (18)$$

Наличие внутреннего процесса приводит к появлению действительной положительной дисперсии (16). Это означает, что гармоники высокой частоты будут иметь большую фазовую скорость. Мнимая отрицательная дисперсия (17) приведет к преимущественному затуханию гармоник высокой частоты. Уравнение (17) хорошо описывает процесс распространения малых возмущений, когда  $\omega\tau \sim [(c_\infty - c_0) / c_0]^{1/2}$ . Так как для газов величина  $m$  мала, то при меньших  $\omega\tau$  можно пренебречь третьей произ-

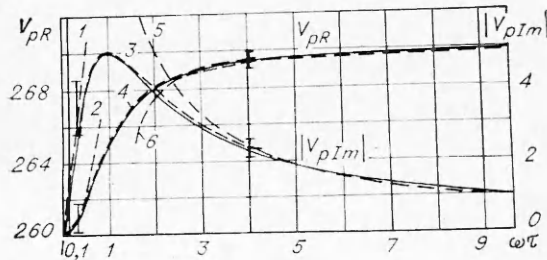


Рис. 1. Дисперсионные кривые системы уравнений (10).

— реальная и мнимая части фазовой скорости;  
 --- асимптотическое поведение кривых в трех различных областях; 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют формулам (17), (16), (23), (22), (20), (19).

водной и пользоваться линейным уравнением Бюргера.

В случае  $\omega\tau \rightarrow \infty$ , разлагая фазовую скорость в ряд Тейлора для  $1/\omega\tau \rightarrow 0$  и вычисляя неопределенные коэффициенты, получим

$$v_{PR} = c_\infty - \bar{m}c_\infty/2(\omega\tau)^2, \quad (19)$$

$$v_{PI} = -\bar{m}c_\infty/2\omega\tau, \quad (20)$$

где  $\bar{m} = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_\infty^2$ . Кривые (19) и (20) также хорошо аппроксимируют ветви полной дисперсионной зависимости в области  $[c_0/(c_\infty - c_0)]^{1/2} \leq \omega\tau < \infty$ . Нижний предел  $\omega\tau$  определен из условия пересечения асимптотик  $v_{PI}(\omega\tau \sim 1) = v_{PI}(\omega\tau \rightarrow \infty)$ .

Уравнение, соответствующее данному предельному случаю (19), (20), в сопровождающей системе координат  $x, y = t - x/c_0$  имеет вид

$$v_x - v_y m/2c_0 = -mv/2c_0\tau. \quad (21)$$

Подобное уравнение было получено в работе [10].

Ниже приводится вывод и решение нелинейного уравнения (21), которое справедливо до небольших значений  $\omega\tau$ , поскольку при  $\omega\tau \rightarrow \infty$  нарушается условие сплошности среды. Аналогично предельному случаю  $0 < \omega\tau < [(c_\infty - c_0)/c_0]^{1/2}$ , здесь также наблюдается увеличение фазовой скорости с ростом частоты. Однако поглощение для гармоник высокой частоты уменьшается. Это приводит к тому, что при распространении высокочастотного сигнала в рассматриваемой среде сама среда способствует образованию крутого переднего фронта («разрыва»). Для низкочастотного сигнала наблюдается обратное — среда «борется» за сохранение первоначального низкочастотного сигнала: гармоники высокой частоты, которые двигаются с большей фазовой скоростью и, собираясь на переднем фронте, делают его более крутым так, что волна гасится сильнее.

Приведем выражение для мнимой и действительной частей фазовой скорости, полученное в промежуточной области  $[c_0/(c_\infty - c_0)]^{1/2} \leq \omega\tau < [(c_\infty - c_0)/c_0]^{1/2}$ :

$$v_{PR} = c_0 + c_0 m (\omega\tau)^2 / 2(1 + \omega^2\tau^2), \quad (22)$$

$$|v_{PI}| = mc_0 \cdot \omega\tau / 2(1 + \omega^2\tau^2). \quad (23)$$

В безразмерных координатах  $\bar{t}, \bar{\xi} = (x - c_0 t)/c_0 T$  линейное уравнение, соответствующее данной области и соотношениям (22), (23), имеет вид

$$v_{\bar{t}} - v_{\bar{\xi}} m\tau/2T - v_{\bar{\xi}\bar{\xi}} m\tau^2/2T^2 = v_{\bar{t}\bar{\xi}} \tau^2/T^2. \quad (24)$$

В уравнении (24) правая часть соответствует, как видно из дисперсионного соотношения (23), дополнительному затуханию в области максимальной дисперсии. В точке  $\omega\tau = 1$  имеется максимум поглощения и перегиб для действительной дисперсии. Сравнение асимптотик (22) и (23) с полной дисперсионной кривой дает хорошее совпадение.

Принцип разделения одного линейного уравнения на характерные более простые уравнения в зависимости от значения  $\omega\tau$  будет использован также и в нелинейном анализе.

4. Распространение малых, но конечных возмущений по релаксирующей среде описывается системой уравнений (8), (9), которые записаны с точностью до второго порядка малости. Рассматривая возмущения, распространяющиеся в сторону  $x > 0$ , находим решение системы также с точностью до второго порядка малости, пользуясь методом [11]. Идея метода состоит в том, что возмущения  $v, \rho'$  в силу слабой нелинейности рассматриваемого процесса можно представить в виде функций, медленно меняющихся от какой-либо координаты,  $v, \rho' = F(\mu x, t - x/c_0)$ . Уравнения, описывающие эволюцию  $v, \rho'$ , должны иметь оди-

наковый вид, поскольку они характеристики единого волнового процесса. Это означает, что в нелинейном случае линейные связи  $v = \rho' c_0 / \rho_0$  нужно дополнить членами второго порядка малости и некоторыми производными с неопределенными коэффициентами. Переписывая (8), (9) в координатах  $z = \mu x$ ,  $y = t - x/c_0$ , находим решения полученной системы

$$\rho' = \rho_0 v / c_0 + a \rho_0 v^2 / c_0 + b \rho_0 \frac{\partial v}{\partial y} / c_0 + c \rho_0 v \frac{\partial v}{\partial y} / c_0 + d \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} / c_0, \quad (25)$$

$$v = c_0 \rho' / \rho_0 - a c_0^2 \rho'^2 / \rho_0^2 - b c_0 \frac{\partial \rho'}{\partial y} / \rho_0 - c \cdot c_0 \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial y} / \rho_0^2 - d c_0 \frac{\partial \rho'}{\partial z} / \rho_0, \quad (26)$$

где коэффициенты  $b, d \sim \mu$ ;  $a, c \sim 1$ . Подставляя (25), (26) в (8), (9), получим уравнения для возмущения  $v$  с неопределенными коэффициентами. Идентифицируя полученные уравнения, вычислим коэффициенты и подставим их в одно из уравнений, которое запишем в безразмерных переменных  $\bar{v}, \bar{z}, \bar{y}$ : ( $v = c_0 \bar{v}$ ,  $z = \bar{z} \cdot c_0 T$ ,  $y = T(t - \bar{x}) = \bar{y} T$ ;

$$\begin{aligned} & \mu \bar{v}_{\bar{z}} - \bar{v}_{\bar{y}} (\gamma + 1) / 2 - \bar{v}_{\bar{y}\bar{y}} m \tau / 2T + \bar{v}_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}} m \tau^2 / 2T^2 + \bar{v}_{\bar{y}\bar{z}} \mu m \tau / 2T + \\ & + (\bar{v}_{\bar{y}\bar{y}})_{\bar{y}} m \tau / 2T - (\bar{v}_{\bar{y}})_{\bar{y}\bar{y}} \tau^2 (m - \gamma - 1) / 2T^2 - \bar{v}_{\bar{y}\bar{z}} \cdot \mu (m + 2) \tau^2 / 2T^2 = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $T$  — характерный период начального возмущения.

Уравнение (27) содержит два параметра малости  $v/c_0 = \bar{v} \sim \mu$  и  $\tau/T$ . Рассматривая процессы быстрой релаксации, полагаем  $\tau^2/T^2 \sim v/c_0 \sim \mu$  и, сохраняя члены с дисперсией и диссипацией в первом исчезающем приближении, получим уравнение КДВБ [12]

$$\bar{v}_{\bar{x}} - \bar{v}_{\bar{y}} (\gamma + 1) / 2 - \bar{v}_{\bar{y}\bar{y}} m \tau / 2T + m \tau^2 \bar{v}_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}} / 2T^2 = 0. \quad (28)$$

Из анализа дисперсионной кривой окончательно запишем условия, при которых справедливо уравнение (28):  $0 < \tau/T \leq [(c_\infty - c_0)/c_0]^{1/2}$ ,  $\tau^2/T^2 \sim v/c_0 \sim \mu$ . Заметим, что если в (27) положить  $\tau/T \sim \mu \sim v/c_0$ , т. е. рассматривать процессы медленной релаксации, тогда из (27) получим уравнение Бюргера.

В случае  $[(c_\infty - c_0)/c_0]^{1/2} < \tau/T \leq [c_0/(c_\infty - c_0)]^{1/2}$  и  $m \sim v/c_0 \sim \mu$ , исходя из дисперсионной кривой и уравнения (27), получаем уравнение для средних частот

$$\begin{aligned} & \bar{v}_{\bar{x}} - \bar{v}_{\bar{y}} (\gamma + 1) / 2 - \bar{v}_{\bar{y}\bar{y}} \cdot m \tau / 2T + \bar{v}_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}} \cdot m \tau^2 / 2T^2 = \\ & = \tau^2 [\bar{v}_{\bar{x}} - \bar{v}_{\bar{y}} (\gamma + 1) / 2]_{\bar{y}\bar{y}} / T^2. \end{aligned} \quad (29)$$

В высокочастотном приближении  $[(c_0/c_\infty - c_0)]^{1/2} < \tau/T < \infty$  и  $v/c_0 \sim m \sim \mu$ ) получим

$$\bar{v}_{\bar{x}} - [\bar{v} (\gamma + 1) + m] \bar{v}_{\bar{y}} / 2 = -mT \cdot \bar{v} / 2\tau. \quad (30)$$

Уравнение (30) было найдено другим способом в работах [10, 12].

Некоторые из полученных уравнений имеют аналитическое решение. К ним относится уравнение Бюргера, которое подстановкой Хопфа [9] сводится к линейному уравнению теплопроводности. Конкуренция нелинейности и диссипации может привести к существованию стационарного решения данного уравнения.

Вид решения этого уравнения, полученного численным путем, показан на рис. 4. Существует также аналитическое решение стационарного уравнения Кортевега—де-Вриза (уравнение (28) без второй производной). Это решение представляет собой либо уединенные волны (солитоны), либо периодические кноидальные волны, распространяющиеся в среде с постоянной скоростью [9].

Данными примерами исчерпывается класс точных решений полученных уравнений. Эволюция возмущения с учетом диссипации и дисперсии исследовалась с помощью численного решения уравнений (28) и (29), причем последнее было переписано в координатах  $t=t/T$ ,  $\xi=(x-c_0t)/c_0T$

$$v_{\bar{t}} + v_{\bar{v}_{\xi}} \cdot (\gamma + 1)/2 - v_{\bar{\xi}\xi} \cdot m\tau/2T - v_{\bar{\xi}\xi\xi} \cdot m\tau^2/2T^2 = \\ = \tau^2 [v_{\bar{t}} + v_{\bar{v}_{\xi}} \cdot (\gamma + 1)/2]_{\bar{\xi}\xi}/T^2. \quad (31)$$

Для уравнения (28) рассматривалась краевая задача для начального возмущения «колоколообразного» типа;  $\bar{x}=0$ ,

$$v(0, \bar{y}) = v_0 \cdot \exp [-(\bar{y}-L)^2], \quad v_0 = \text{const}. \quad (32)$$

Уравнение (28) расписывалось по простейшей явной схеме с центральными разностями для первых производных. Порядок аппроксимации  $O(\Delta\bar{x} + \Delta\bar{y}^2)$ . Уравнение (31) рассчитывалось по своеобразной схеме расщепления. Рассматривалась система уравнений

$$\theta^2 u_{\bar{\xi}\xi} - u = -m\theta v_{\bar{\xi}\xi}/2 - m\theta^2 v_{\bar{\xi}\xi\xi}/2, \quad (33)$$

$$v_{\bar{t}} + v_{\bar{v}_{\xi}} \cdot (\gamma + 1)/2 = u. \quad (34)$$

В момент времени  $\bar{t}=0$  начальное возмущение  $v=v_0 \cdot \exp [-(\bar{\xi}-L)^2]$  подставляется в правую часть уравнения (33), которое решается методом прогонки с нулевыми граничными условиями первого рода. Затем находится решение уравнения (34) с известной правой частью по явной схеме с порядком аппроксимации:  $O(\Delta\bar{t} + \Delta\bar{\xi}^3)$ . После этого известное значение функции  $v$  подставляется в правую часть уравнения (33), и находится функция  $u$ . Описанный процесс продолжается до определенных значений времени. Сохранение импульса сигнала, по которому контролировался счет, было стопроцентным.

Результаты расчетов уравнения (28) с явно завышенными параметрами дисперсии и диссипации для рассматриваемых сред показаны на рис. 2 и 3. Видно, что структура возмущения имеет немонотонный характер с осцилляциями на переднем фронте. Однако если дисперсия и диссипация обусловлены одним механизмом (релаксационным), то действительная дисперсия является в  $\tau/T$  раз меньшей величиной (в рамках КДВБ), причем по абсолютной величине  $\bar{\mu}$  и  $\nu$  также малы. Поэтому для оценки истинного влияния дисперсии и диссипации была выбрана конкретная среда и рассчитывалась эволюция слабой ударной волны (32) в углекислом газе с невозмущенными параметрами:  $T=300\text{K}$ ,  $p=1$  атм,  $c_0=260$  м/с,  $c_\infty=270$  м/с. Ударная волна проходит по газу с возбужденной колебательной степенью свободы, которая имеет время релаксации  $\tau=10^{-5}$  с [4].

Результаты расчетов краевой задачи (28) приведены на рис. 4, 5. На рис. 4 представлена эволюция начального возмущения (кривая 1) с характерным периодом  $T=5 \cdot 10^{-5}$  с, рассчитанная по уравнению Бюргерса.

Характерные профили возмущения, удовлетворяющие уравнению (28), представлены на рис. 5. На переднем участке фронта наблюдаются осцилляции малой амплитуды. Из рис. 5 и уравнения (28) видно, что любое возмущение будет распространяться как простая волна, однако с медленным искажением своей формы. Наличие релаксационной вязкости ( $m\tau v_{\bar{y}\bar{y}}/2T$ ) приведет к необрати-

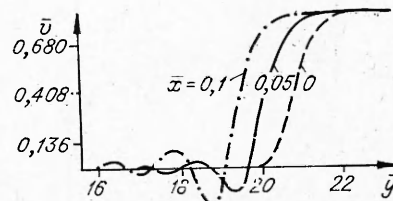


Рис. 2. Эволюция «ступеньки» с параметрами  $m\tau/2T=1$ ;  $m\tau^2/2T^2=1$ ;  $\gamma=1,3$ .

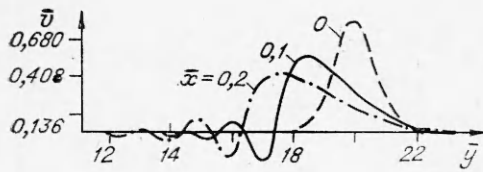


Рис. 3. Эволюция «колокола» в диспергирующей среде при  $\gamma=1,3$ ;  $m\tau/2T=1$ ;  $m\tau^2/2T^2=1$ .

при этом профиль возмущения будет монотонным (см. рис. 4), когда  $c_0+2v < c_\infty$ . Если  $c_0+2v > c_\infty$ , то возможно существование осцилляторного профиля возмущения (см. рис. 5). В данном случае осцилляторный профиль выражен не четко, как на рис. 2 и 3, а имеет вид «прогиба», поскольку последующие осцилляции имеют меньшую амплитуду и сильно затухают из-за большой релаксационной вязкости.

Таким образом, в силу особого соотношения между коэффициентами дисперсии и диссипации для релаксирующих сред эволюцию длинноволновых возмущений можно рассчитать по уравнению Бюргера, как и рекомендовалось в [8]. Отклонение полученного решения от решения уравнения КДВБ, как видно из сравнения рис. 4 и 5, небольшое. Принципиальным при таком упрощении остается тот факт, что для частично диспергированных волн ( $c_0+v > c_\infty$ ) уравнение Бюргера дает разрывное решение, в то время как уравнение КДВБ — непрерывное с малыми осцилляциями на переднем фронте.

Безразмерная длина волны осцилляций, возникающих на переднем фронте, порядка величины  $(m/M_0)^{1/2}$ , где  $M_0 = v_0/c_0$ ,  $v_0$  — максимальная амплитуда начального возмущения. Скорость движения возмущения в системе  $x - c_0 t$  при больших  $x$  равна  $[v_0(-\infty) - v_0(\infty)]/2$  для «ступеньки», и  $v_0/3$  для «колокола». В работе [8] было получено уравнение Бюргера и показано образование разрыва для гладкого начального возмущения, если выполняется условие  $c_0+v > c_\infty$ . Разрыв авторы работы [8] могли устранить введением сдвиговой вязкости. Однако из изложенного выше видно, что при таком условии он не образуется, даже в рамках релаксирующей среды при условии  $c_0+2v > c_\infty$  образуется немонотонный профиль (рис. 5). Авторами работы [13] дано дискуссионное, на наш взгляд, объяснение возникающих на заднем фронте волны осцилляций в опытах Бурова В. А. и Красильникова В. А. [14] с позиций уравнения КДВБ, поскольку данное уравнение для релаксирующих сред допускает осцилляции только на переднем фронте.

5. Уравнение, описывающее высокочастотное приближение, получено впервые в [10], однако там не указаны пределы применимости этого уравнения по  $\tau/T$ .

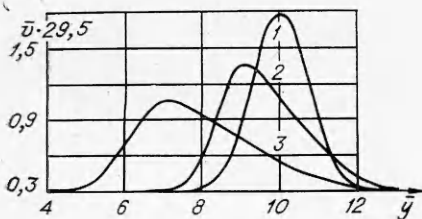


Рис. 4. Структура возмущения в  $\text{CO}_2$  при нормальных невозмущенных условиях. Действительная дисперсия равна нулю;  $\tau/T=0,2$ .  
1 —  $\bar{x}=0$ ; 2 —  $\bar{x}=31$ ; 3 —  $\bar{x}=82$ .

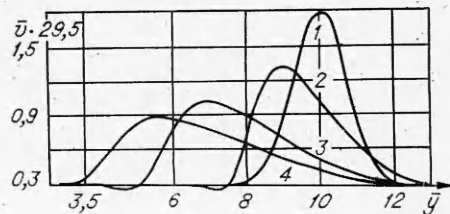


Рис. 5. Эволюция возмущения в  $\text{CO}_2$  при  $\tau/T=0,2$ ;  $m\tau^2/2T^2=0,00156$ .  
1 —  $\bar{x}=0$ ; 2 —  $\bar{x}=31$ ; 3 —  $\bar{x}=82$ ; 4 —  $\bar{x}=144$ .

В сопровождающей системе координат  $\sigma = x/c_\infty T$ ,  $\bar{\theta} = (t - x/c_\infty)/T$ , бегущей со скоростью  $c_\infty$ , вместо (30) получим уравнение

$$\bar{v}_\sigma - [\bar{v}\bar{v}_\theta] = -mT\bar{v}/\tau, \quad (35)$$

решение которого для начального возмущения  $\sigma=0$ ,  $v = \sin \theta$  имеет вид [10]

$$\theta = \arcsin [\bar{v} \cdot \exp(mT\sigma/2\tau)] - [1 - \exp(-mT\sigma/2\tau)] [\bar{v} \cdot \exp(mT\sigma/2\tau)] \cdot 2\tau/mT. \quad (36)$$

Анализ решения (36) показывает, что в зависимости от значения  $\bar{z} = [1 - \exp(-mT\sigma/2\tau)] 2\tau mT$  и амплитуды начального возмущения  $v_0$  образуется разрыв в первоначально гладком профиле. В данном случае из синусоиды формируется пила, амплитуда которой падает по мере распространения волны на большие расстояния от источника за счет диссипативных процессов. При условии  $v_0 < v_{кр} = 2mc_0T(\gamma+1)/\tau$  разрыв не формируется ни на каких расстояниях от источника. В противном случае ( $v_0 > v_{кр}$ ) нелинейные эффекты превалируют над диссипативными и разрыв образуется на расстояниях, соответствующих  $\bar{z} \sim 1$ .

6. Уравнение (29) справедливо при условиях

$$[(c_\infty - c_0)/c_0]^{1/2} < \tau/T \leq [c_0/(c_\infty - c_0)]^{1/2}, \quad v/c_0 \sim m \sim \mu \quad (37)$$

и в системе координат  $z = \bar{\xi} - wt$  имеет вид

$$\bar{v}_{zz} + v\bar{v}_z \cdot (\bar{\mu} - \theta^2 W + \theta^2 v^*)^{-1} + \theta^2 \bar{v}_z^2 \cdot (\bar{\mu} - \theta^2 W + \theta^2 v^*)^{-1} + (W\bar{v}^* - \bar{v}^{*2}/2) \cdot (\bar{\mu} - \theta^2 W + \theta^2 v^*)^{-1} = 0, \quad (38)$$

где  $\bar{v}^* = \varepsilon \cdot \bar{v}$ ;  $\varepsilon = (\gamma+1)/2$ ;  $v = m\tau/2T$ ;  $\mu = m\tau^2/2T^2$ ;  $\theta^2 = \tau^2/T^2$ ;  $W$  — скорость ударной волны. В дальнейшем индекс \* опустим. Выясним структуру слабой ударной волны («ступеньки»), распространение которой описывается данным уравнением, когда ее параметры удовлетворяют условию (37).

Анализ уравнения (38), которое имеет вид уравнения колебаний частицы единичной массы с соответствующим нелинейным трением в поле с потенциалом

$$p(\bar{v}) = (m/2 + W) \cdot \bar{v}/2\theta^2 - \bar{v}^2/4\theta^2 - (m^2/4 - W^2) \ln(m\theta^2/2 - \theta^2 W + \theta^2 \bar{v}),$$

изображенным на рис. 6, показывает, что при  $m/2 > W$  в принципе возможна осцилляторная структура волны (с осцилляциями впереди фронта). Причем, чем меньше  $\theta$ , тем более вероятна осцилляторная структура фронта. Фазовые диаграммы потенциалов 1, 2, 3, изображенных на рис. 6, представляют собой спирали, выходящие из точки  $\bar{v} = 2W$  и заканчивающиеся в точке  $\bar{v} = 0$ . Потенциал 4 на рис. 6 отвечает монотонной структуре волны ( $m/2 < W$ ). Таким образом, для консервативной системы (когда нет трения) в (38) возможна осцилляторная структура ударной волны.

Анализ асимптотического решения уравнения (38)  $f \sim \exp(-pz)$  при  $z \rightarrow \infty$  при наличии линейного трения приводит к условию

$$p_{1,2} = [v \pm (v^2 - 4 \times \times (\bar{\mu} - \theta^2 W) W)^{1/2}] / 2(\bar{\mu} - \theta^2 W),$$

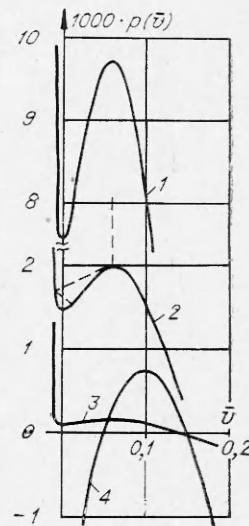


Рис. 6. Потенциал для уравнения (34) при  $m = 0,078$ .

$W = 0,03$ : 1 —  $\theta = 0,5$ , 2 —  $\theta = 1$ , 3 —  $\theta = 3$ ;  $W = 0,05$ : 4 —  $\theta = 1$ . Пунктирная линия качественно изображает структуру ударной волны. Роль оси  $z$  играет ось  $p(v)$ .



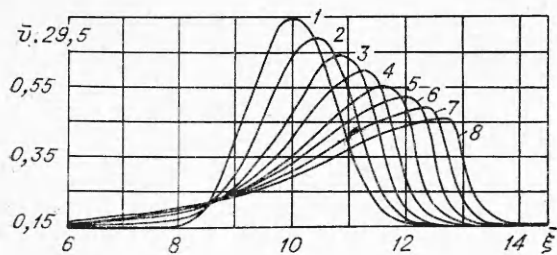


Рис. 7. Эволюция возмущения, описываемая уравнением (36) при  $\theta=1$ ,  $m=0,078$ ;  $\gamma=1,3$ .  
 1 —  $t=0$ ; 2 —  $t=11,8$ ; 3 —  $t=23,6$ ; 4 —  $t=35,4$ ; 5 —  $t=47,2$ ;  
 6 —  $t=59$ ; 7 —  $t=70,8$ ; 8 —  $t=82,4$ .

из которого при значениях  $\mu > \theta^2 W$ , т. е.  $m/2 > W$ , вытекает, что структура фронта будет осциллирующей, если при этом выполняется еще одно условие:

$$v^2 < 4(\mu - \theta^2 W) W. \quad (39)$$

Однако условие (35) не выполняется ни при каких значениях параметров. Действительно, подставляя вместо  $v$  и  $\mu$  их значения в (39), получим неравенство

$(m - 4W)^2 < 0$ , которое никогда не выполняется. А это означает, что не существует осцилляторного профиля ударной волны даже при наличии линейного трения и тем более при наличии нелинейного трения.

Эволюция возмущения, у которого характерный период совпадает со временем релаксации ( $\tau = T$ ) и описывается уравнением (31), представлена на рис. 7. Видно, что структура фронта возмущения монотонная, передний фронт круче, чем у длинноволнового возмущения, а сигнал на больших временах имеет форму трапеции с небольшим плато в отличие от треугольной формы длинноволнового возмущения.

Таким образом, в зависимости от соотношения характерного периода начального возмущения и времени реакции получены различные уравнения, описывающие эволюцию этого возмущения в рассматриваемых средах. Структура фронта является монотонной для сигналов высоких и средних частот и немонотонной для длинноволновых, удовлетворяющих приближению КДВБ. Эта немонотонность слабая. Исследование (27) дает монотонную структуру для сигналов любой длительности. Сравнивая экспериментально полученные профили возмущения с рассчитанным по данной теории, можно получить информацию о времени релаксации либо химической реакции.

Институт теплофизики  
 СО АН СССР,  
 Новосибирск

Поступила в редакцию  
 25/VI 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Эйнштейн. Собр. соч. Т. 3, М., «Наука», 1965.
2. Ф. А. Вильямс. Теория горения. М., «Наука», 1972.
3. Л. И. Мандельштам, М. А. Леонтович. ЖЭТФ, 1937, 7, 3.
4. Н. О. Кнесер. Annalen der Physik, 1931, 11, 7.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954.
6. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1946, 16, 4.
7. С. П. Дьяков. ЖЭТФ, 1954, 27, 6.
8. А. Л. Полякова, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Акуст. журнал, 1962, 8, 1.
9. В. И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
10. С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Акуст. журнал, 1962, 8, 2.
11. Р. В. Хохлов. Радиотехника и электроника, 1961, 6, 6.
12. О. В. Руденко, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Акуст. журнал, 1974, 20, 3.
13. О. В. Руденко, С. И. Солуян. Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.
14. В. А. Буров, В. А. Красильников. Докл. АН СССР, 1958, 118, 5, 920.