СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ГЕОЛОГИЯ И ГЕОФИЗИКА

Геология и геофизика, 2010, т. 51, № 7, с. 1027—1037

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.8.05:519.651

ОБОБЩЕННАЯ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КАРТИРОВАНИЯ СВОЙСТВ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

А.Г. Плавник

Западно-Сибирский филиал Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, 625670, Тюмень, ул. Таймырская, 74, Россия

Выполнен анализ опыта использования сплайн-аппроксимационных методов для картирования свойств геологических объектов. Выделены основные элементы решения задач геокартирования с применением этих методов — аппроксимационный подход, в котором задача формулируется в вариационной постановке минимизации целевого функционала; возможность одновременного восстановления нескольких поверхностей; использование стабилизаторов для задания общих свойств картируемой поверхности; введение дифференциальных операторов, с помощью которых можно описать искомую поверхность и ее связи с известными полями; использование данных, локально задаваемых в точках наблюдений; применение уравнений в частных производных, аналогичных уравнениям математической физики, описывающих свойства картируемой поверхности; некоторые элементы регрессионного анализа, при котором коэффициенты связи определяются одновременно с решением основной задачи картопостроения; аддитивное включение в функционал в принципе произвольного числа прямой и дополнительной информации, учитываемой при построении на основе приближенных условий с помощью весовых коэффициентов в качестве управляющих параметров.

Предложена обобщенная математическая постановка, включающая введение и детализацию понятий глобальных и локальных уравнений, строгих и нестрогих связей. Реализация этой обобщенной постановки в программном комплексе GST обеспечивает решение широкого круга задач геокартирования с возможностью многокритериальной оптимизации конечных результатов, с учетом разнородных косвенных данных, а также модельных представлений, описываемых уравнениями в частных производных второго порядка.

Картирование, геологические объекты, сплайн-аппроксимация, косвенные данные, уравнения в частных производных.

GENERALIZED SPLINE-APPROXIMATION PROBLEM FORMULATION FOR SPATIAL DATA MODELING IN GEOSCIENCES

A.G. Plavnik

The discussed spline approximation in spatial data modeling for geosciences implies formulation of the variational problem in terms of functional minimization and allows simultaneous inversion for several surfaces. This modeling employs the following basic elements: stabilizers to define the common properties of unknown surfaces; differential operators to describe the unknown surfaces and their relation with the known fields; data specified locally at test points; partial differential equations similar to equations of mathematical physics for the properties of the surfaces of interest; elements of regression analysis, with the regression coefficients being calculated while solving the principal modeling problem; arbitrary amounts of direct or indirect information which is incorporated additionally into the functional on the basis of approximate conditions using weight coefficients as control parameters.

The suggested generalized formulation includes the concepts of global and local equations and strict and nonstrict relationships. This formulation, realized in the GST software, may apply to many surface modeling problems to be solved using second-order partial differential equations, with multiple criteria optimization of results and with the use of different auxiliary datasets.

Surface modeling, geological surfaces, spline approximation, indirect data, partial differential equations

ВВЕДЕНИЕ

Использование геоинформационных технологий в решении геологических задач является одним из наиболее динамично развивающихся направлений, что связано с востребованностью оперативного и комплексного анализа свойств изучаемых объектов (они, как правило, отличаются большим объемом и многообразием данных) и с ростом возможностей, предоставляемых современной компьютерной техникой. При этом методы картирования свойств геологических объектов представляют собой важную и активно развиваемую составную часть этого направления.

В настоящее время существует множество программных продуктов как специализирующихся на построении карт, так и включающих в себя картопостроение одним из модулей. Принципиальная ограниченность количества точек наблюдения, в которых определены экспериментальные значения картируемого показателя, обусловливает отсутствие однозначного решения задачи восстановления всего поля значений параметра. Этим обстоятельством определено наличие и использование большого числа различных алгоритмов решения задачи картопостроения, а также постоянное развитие имеющихся методов и разработка новых подходов.

КРАТКИЙ ОБЗОР ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ ГЕОКАРТИРОВАНИЯ

Предваряя рассмотрение сплайн-аппроксимационного подхода, остановимся на кратком описании других основных методов, применяемых в геокартировании. При этом в данной работе не ставится задача сопоставительного анализа результатов их использования, а только изложение основных идей различных методов, определяющих их возможности (и ограничения).

На основе учета геометрии расположения точек наблюдения разработан способ оптимальной триангуляции Делоне, который, как правило, применяется в программных реализациях метода триангуляционной линейной интерполяции [Lee et al., 1980; Скворцов, 2002]. Общая идея последней на треугольниках достаточно проста и заключается в приближении искомой поверхности внутри каждой тройки точек фактических данных плоскостью. С учетом однозначности проведения плоскости через три точки, а также существования и единственности оптимальной триангуляции Делоне, такой подход гарантирует унифицированный характер получаемых результатов. Линейность интерполяции определяет относительную простоту реализации этого метода, но вместе с тем и обусловливает определенную схематичность получаемых результатов, особенно в условиях невысокой плотности фактических данных.

Более реалистичную картину поведения восстанавливаемой поверхности позволяют получить методы, в которых значение в некоторой точке (x,y) определяется как взвешенное среднее по значениям в ближайших точках наблюдений $(F(x_i,y_i))$:

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,y) \cdot F(x_i,y_i).$$

Здесь $\lambda_i(x,y)$ — веса, определяемые на основе выполненной триангуляции (метод естественного соседа) [Sibson, 1981] или в зависимости от расстояния между расчетной точкой и точкой наблюдения, как в методе инверсных расстояний [Renka, 1988].

Большая часть современных методов реконструирует искомую функцию с помощью линейной комбинации из набора радиальных базисных функций [Аронов, 1978, 1990; Давид, 1980; Леус, 1998]

$$S(x,y) = a + \sum_{i=1}^{n} \mu_i R_i(x,y),$$

где a — константа, μ_i — неизвестные коэффициенты, $R_i(x,y)$ — базисные функции, зависящие от расстояния точки (x,y) до i-й точки наблюдения. Неизвестные коэффициенты определяются решением системы алгебраических уравнений, описывающих равенство расчетных и фактических значений в точках наблюдения.

Спектр возможных базисных функций весьма широк и обусловлен разнообразием физических или математических моделей, связываемых с ними. В настоящее время в практике картирования геологических параметров активно применяется метод крайгинга и его разновидности [Давид, 1980; Xu et al., 1992], в котором используется предположение о вероятностной природе в распределении значений картируемых параметров. Радиальные функции при этом могут оцениваться на основе обработки имеющихся фактических данных с целью получения эмпирических зависимостей.

Во многих практических задачах восстановление поверхности не требует выполнения точного равенства функции наблюденным значениям. Например, в условиях наличия погрешностей в определении фактических данных вполне допустимо решение, находящееся в пределах заданной точности от измеренных величин. С другой стороны, при применении интерполяционных методов часто возникает необходимость построения трендовых зависимостей изменения в плане картируемого параметра. В наиболее простом виде аппроксимация осуществляется на основе полиномиальной регрессии. Именно этот подход, как правило, используется при поиске трендовых поверхностей.

В методе минимума кривизны задача формулируется как поиск набора значений искомой поверхности в узлах регулярной сетки. Согласование с распределенными хаотически фактическими значениями может осуществляться решением дифференциального уравнения для тонкой мембраны, достаточно гладкой во всей области построения карты (за исключением узловых точек сетки) [Briggs, 1974; Smith, Wessel, 1990]:

$$(1-T)\Delta(\Delta S)-T\Delta S=0.$$

Здесь T — параметр, характеризующий напряжение, Δ — оператор Лапласа.

При $T=0$ этот подход приводит к результату, который в эквивалентной форме может быть представлен с использованием кубических сплайнов (поэтому этот метод также часто называется сплайн-аппроксимационным, что, на наш взгляд, не совсем правильно).

Как правило, задача картопостроения не ограничивается построением карт, формально удовлетворяющих значениям в заданных точках. Собственно карты в геологии являются не только результатом, но и инструментом проведения исследований, например, для проверки модельных представлений о пространственных закономерностях свойств изучаемых объектов, прогнозе свойств в малоизученных зонах. Во многом это определяет то, что с развитием компьютерных технологий постоянно совершенствуются существующие, разрабатываются новые методы картирования, и расширяются рамки задач, связанных с картопостроением [Xingong, 1997; Kemp et al., 2001; Дюбрул, 2002; Красавчиков, 2002; Торопов, 2002; Emery, 2008; Hengl et al., 2008; Назаренко, 2008; Wessel, Becker, 2008; Ершов и др., 2009; Плавник и др., 2009]*.

Эффективность решения задач содержательного характера в значительной степени зависит от учета и реализации возможностей, заложенных в используемом методе построения карт. Это является одним из факторов, определяющих актуальность работ по обобщению методов решения задач, связанных с геокартированием, в том числе и на основе сплайн-аппроксимационного подхода.

ОПЫТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО КАРТИРОВАНИЯ В СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Сплайн-аппроксимационная постановка при решении задач компьютерного картопостроения активно применяется в геологии начиная с середины 1970-х годов. За это время произошло существенное изменение самих решаемых задач и расширение представлений о восстановлении геологических полей в целом. В постановку проблемных вопросов и развитие методов их решения значимый вклад внесли В. А. Василенко, А.М. Волков, А.Н. Сидоров, С.В. Торопов и другие ученые (основные результаты их исследований и библиография представлены в монографии [Волков, 1988]). Работы новосибирских ученых под руководством Ю.С. Завьялова [1980] по изучению теоретических вопросов сплайновых методов и их практическому приложению для решения широкого круга важных практических задач машиностроения, авиастроения и многих других послужили основой для развития направления использования сплайнов в решении задач картирования свойств геологических объектов.

Первоначальная задача моделирования некоторой поверхности по наблюденным значениям была дополнена возможностью учета производных искомой функции в заданных точках. В последующем это направление обобщено путем введения произвольного дифференциального оператора второго порядка, действующего на искомую функцию. Приложение разрабатываемых методов для изучения морфологии и границ распространения резервуара привело к формулировке задачи одновременной аппроксимации нескольких полей. Дополнение задачи возможностью учета нормы разности между искомой и некоторой известной функциями позволило использовать косвенную информацию, например, при построении структурной карты привлекать результаты сейсмических исследований или данные по более изученному горизонту. Для решения других геологических задач применяются более сложнопостроенные нормы.

Программы, обеспечивающие решение перечисленных выше задач картирования на основе сплайн-аппроксимации, в основном разработаны в 80-х годах прошлого столетия и практически без кардинальных изменений использовались до недавнего времени [Волков, 2008]. Вместе с тем значительный прогресс компьютерных технологий в направлении средств визуализации, дружественности пользовательского интерфейса наряду с многопорядковым увеличением ресурсов и быстродействия персональных вычислительных машин обусловливают актуальность разработки новых программных средств, соответствую-

* Представленные ссылки отражают лишь малую часть работ, опубликованных в последние годы и посвященных решению задач, связанных с картированием свойств геологических объектов.

щих современному уровню программного обеспечения и предоставляющих геологу широкие возможности для картопостроения.

Для реализации решения максимально широкого круга задач в рамках единой программы важным условием является общность используемой математической постановки. Этот вопрос, как нам представляется в силу объективных причин, остался недостаточно проработанным, поскольку разработка алгоритмов и написание соответствующих программных модулей, реализующих сплайн-аппроксимационный подход, в основном следовали за постановкой специальных геологических задач.

В данной работе излагаются результаты обобщения сплайн-аппроксимационной постановки задачи картопостроения, полученные при проектировании и реализации программного комплекса GST [Сидоров и др., 2005].

Общая идея аппроксимационных методов состоит в том, что решение ищется из условия минимизации некоторого функционала, определяемого содержательной частью геологической задачи. Предпочтительным вариантом является условие квадратичности вхождения неизвестных параметров в функционал, чем обеспечивается простое и строгое сведение задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений.

В принципе аппроксимация может осуществляться в достаточно широком классе возможных функций. Однако полиноминальные сплайны обладают рядом свойств, определяющих их особое место среди других функций.

Среди очевидных вычислительных преимуществ это, во-первых, простота и высокая скорость расчета значения сплайна и его производных, что имеет огромное значение при больших объемах вычислений. Во-вторых, возможность получения аналитических выражений для производных и интегралов позволяет обеспечить глубокую проработку математической постановки алгоритма решения задачи и на этой основе минимизировать объемы вычислений. В-третьих, использование специальных *B*-сплайнов, имеющих ограниченную область определения (компактный носитель), сводит задачу к решению системы алгебраических уравнений, имеющих симметричную матрицу ленточного типа, что позволяет значительно экономить оперативную память компьютера и использовать специальные эффективные методы обращения матрицы.

Наряду с этим сплайны обладают известными оптимальными свойствами при решении ряда задач интерполяции и аппроксимации. Так, при сглаживании экспериментальных данных среди всех функций одной переменной, гладких до вторых производных включительно, кубический сплайн минимизирует функционал, включающий в себя интегрированный показатель кривизны искомой функции [Завьялов и др., 1980].

Широкое внедрение методов сплайн-аппроксимации в определенной степени обусловлено тем, что в первую очередь эти методы использовались для построения структурных карт границ пластов и горизонтов в условиях отсутствия дизъюнктивных нарушений, и представления геологов о закономерностях поведения картируемых объектов оказались созвучны идее минимальности кривизны. Последующее развитие этих методов также непосредственно связано с тем, что физический смысл используемых подходов оставался достаточно очевидным и, соответственно, результаты применяемых вычислительных схем были прогнозируемыми и понятными.

Остановимся более подробно на математической стороне методов решения конкретных геологических задач [Волков, 1988]. В простейшем варианте восстановления поля только по наблюденным значениям решение определяется из минимума функционала

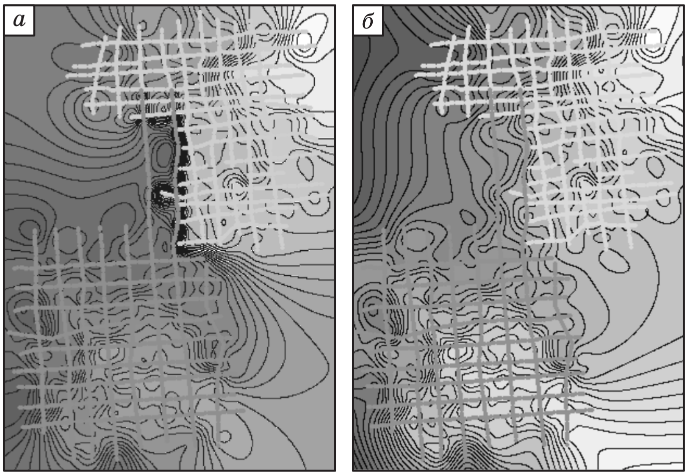
$$J(F) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i (F_i - z_i)^2 + \sum \rho S, \tag{1}$$

$$\sum \rho S = \rho_c S_c + \rho_s S_s + \rho_v S_v,$$

$$S_c = \int\limits_{\Omega} \left(F_{xx}^2 + 2F_{xy}^2 + F_{yy}^2 \right) dxdy, \quad S_s = \int\limits_{\Omega} \left(F_x^2 + F_y^2 \right) dxdy, \quad S_v = \int\limits_{\Omega} F^2 dxdy.$$

Здесь S_c, S_s и S_v — стабилизаторы, минимизирующие кривизну, поверхность и значения искомой функции; F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} — первые и вторые производные искомой функции по соответствующим координатам; ρ_c, ρ_s и ρ_v, — весовые коэффициенты стабилизаторов. Выбор этих коэффициентов определяется физическим смыслом картируемого параметра. Например, при построении структурных карт преимущественно используется стабилизатор минимума кривизны. Для параметров, значения которых физически ограниченны (таких, как пористость), увеличивается вес у стабилизатора минимума поверхности.

Во многих случаях результаты наблюдений получаются методами или источниками, имеющими различные систематические отклонения от реальных. Например, при обработке результатов сейсмичес-



Варианты картирования по материалам двух сейсмопартий.

а — без сбивки, *б* — со сбивкой.

ких работ по перекрещивающимся профилям или по профилям, полученным разными сейсмопартиями, как правило, требуется сбивка данных. Решение этого класса задач осуществляется минимизацией модифицированного по сравнению с (1) функционала

$$J(F)=\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\rho_{ij}(F_{ij}-z_{ij}-\lambda_j)^2+\sum\rho S+\rho_\lambda\sum_{j=1}^{M}(\lambda_j-\lambda_j^*)^2, \quad (2)$$

где λ_j — систематическое отклонения j-го источника данных, M — количество этих источников. Значения λ_j могут задаваться предварительно или определяться одновременно с решением задачи. Весовой коэффициент ρ_λ позволяет контролировать допустимый размах расчетных систематических отклонений от некоторой задаваемой величины λ_j^*. Пример построения карт по сейсмическим данным, проведенный без их сбивки и со сбивкой, рассмотрен на рисунке. Данные разных сейсмопартий выделены серым и белым цветом. Очевидно, что второй вариант лучше согласуется с реальной природой картируемого параметра.

При построении структурных карт зачастую испытывается недостаток данных по картируемому горизонту, в то время как по расположенному выше информация представлена значительно лучше и уже имеется построенная карта (описываемая некоторой функцией $G(x,y)$). Учет этой косвенной информации может быть осуществлен разнообразными способами, представляющими различные варианты реализации одной простой идеи — наследуемости характера формы близлежащих горизонтов.

Первый заключается в непосредственном использовании косвенных данных с поправочными коэффициентами на основе очевидного обобщения функционала (2)

$$J(f)=\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\rho_{ij}(F_{ij}-\mu_j z_{ij}-\lambda_j)^2+\sum\rho S+\rho_\lambda\sum_{j=1}^{M}(\lambda_j-\lambda_j^*)^2+\rho_\mu\sum_{j=1}^{M}(\mu_j-\mu_j^*)^2. \quad (3)$$

Учет уже построенной карты может производиться добавлением в функционал (1) слагаемых

$$\rho_g\int_\Omega(F-\xi G-\zeta)^2\,dxdy+\rho_\xi(\xi-\xi^*)^2+\rho_\zeta(\zeta-\zeta^*)^2, \quad (4)$$

реализующих модель линейной зависимости двух поверхностей

$$F\approx\xi G+\zeta, \quad (5)$$

где ξ и ζ — задаваемые или определяемые коэффициенты пропорциональности и смещения. Так же как и ранее, ρ_g, ρ_ξ и ρ_ζ — управляющие весовые коэффициенты.

Эта же линейная модель зависимости может быть реализована другим способом, основанным на пропорциональности первых производных искомой функции и косвенной поверхности,

$$\rho_g\int_\Omega\left[(F_x-\xi G_x)^2+(F_y-\xi G_y)^2\right]dxdy+\rho_\xi(\xi-\xi^*)^2. \quad (6)$$

При построении структурных карт часто оказывается полезным подход, базирующийся на предположении коррелированности вторых производных функций F и G,

$$\rho_g\int_\Omega\left[(F_{xx}-\xi G_{xx})^2+(F_{yy}-\xi G_{yy})^2\right]dxdy+\rho_\xi(\xi-\xi^*)^2. \quad (7)$$

В этом случае удается моделировать ситуацию со смещением в плане вершин структур. Отметим, что в рамках других подходов [Аронов, 1990; Xu et al., 1992; Леус, 2005] возможность учета косвенной информации реализована в более ограниченной постановке.

Использование интегральных вариантов (4), (6), (7) представляется предпочтительнее по сравнению с дискретным подходом (3), поскольку функция G сама может быть получена с помощью косвенной информации, которая в интегральных методах «наследуется».

В некоторых ситуациях удобнее задавать не значения картируемого параметра, а его производные в точках наблюдения. В этом случае часть функционала, представляющая собой сумму взвешенных квадратов невязок замеров и расчетных данных, представляется в виде

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\rho_{ij}\left[L_j(F)_{ij}-z_{ij}\right]^2,$$

где L — линейный дифференциальный оператор второго порядка, определяемый соотношением

$$L(F)=a_0F+a_1F_x+a_2F_y+a_3F_{xy}+a_4F_{xx}+a_5F_{yy}. \tag{8}$$

Здесь a_0—a_5 — параметры оператора, вещественные числа.

Введение линейного дифференциального оператора в набор базовых инструментальных средств позволило перейти на качественно новый уровень изучения картируемых параметров — верификацию применимости теоретических моделей, основанных на фундаментальных уравнениях математической физики. Например, возможность удовлетворительного описания поля пористости с применением уравнения диффузии в потоке. Реализация учета дифференциального уравнения

$$L(F) = G$$

осуществляется добавлением в функционал дополнительного интегрального показателя

$$\rho\int_{\Omega}\left[L(F)-G\right]^2 dxdy.$$

В ряде случаев оказывается необходимым одновременно восстанавливать несколько параметров, связанных некоторым единым процессом, описываемым системой алгебраических или дифференциальных уравнений. Такие задачи возникают, например, при изучении морфологии и границ распространения резервуаров. Их решение осуществляется на основе естественного обобщения подхода к формированию минимизируемого функционала. Если две искомые поверхности F_1 и F_2 связаны соотношением

$$L_1(F_1) + L_2(F_2) = G,$$

то в функционал добавляется следующее слагаемое

$$\rho\int_{\Omega}\left[L_1(F_1)+L_2(F_2)-G\right]^2 dxdy.$$

Изложенные выше основные результаты (скомпилированные по материалам монографии [Волков, 1988]) развития и применения методов сплайн-аппроксимации убедительно свидетельствуют о широких возможностях, предоставляемых этими методами для формулировки, апробации и реализации представлений геологов о закономерностях формирования и строения разнообразных геологических объектов и их параметров.

ОБОБЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ КАРТОПОСТРОЕНИЯ

Накопленный опыт позволяет провести некоторые обобщения математической постановки задачи картопостроения с целью дальнейшего развития этого метода и разработки программных средств, обеспечивающих максимальную реализацию его возможностей в рамках единого интерфейса.

На основании изложенного, выделяются следующие важные элементы постановки и решения перечисленных выше задач:

– аппроксимационный подход, в котором задача изначально формулируется в вариационной постановке минимизации некоторого функционала;

– возможность одновременного восстановления нескольких поверхностей;

– использование стабилизаторов для задания общих свойств картируемой поверхности;

– введение дифференциальных операторов, с помощью которых можно описать искомую поверхность и ее связи с известными полями;

– использование данных, локально задаваемых в точках наблюдений;

– применение уравнений в частных производных, аналогичных уравнениям математической физики, описывающих свойства картируемой поверхности во всей расчетной области;

– некоторые элементы регрессионного анализа, при котором коэффициенты связи определяются одновременно с решением основной задачи картопостроения;

– аддитивное включение в функционал в принципе произвольного числа прямой и дополнительной информации, учитываемой при построении, на основе приближенных условий с использованием весовых коэффициентов в качестве управляющих параметров.

Каждое отдельное условие, связывающее несколько искомых (F_i) и ряд известных поверхностей (G_i), может быть записано в виде следующего **обобщающего уравнения**:

$$\sum_{i=1}^{I} L_i F_i \approx \sum_{j=1}^{J} \widehat{L}_j G_j . \tag{9}$$

Введем некоторые понятия, детализирующие само уравнение и входящие в него параметры. Будем называть уравнение **локальным**, если оно определяется на ограниченном числе точек наблюдения $\{x_m, y_m\}$. Простейшим примером такого уравнения являются прямые замеры картируемого параметра в точках

$$F(x_m, y_m) = z_m.$$

Если предполагается выполнение (приближенное) данного уравнения во всей области решения задачи, то его будем называть **глобальным**. Примером такого уравнения является условие (5) в задаче учета косвенных данных.

Локальное уравнение входит в функционал задачи в виде суммы квадратов невязок левой и правой части в точках наблюдений:

$$\sum_m \rho_L^m \left(\sum_{i=1}^{I} L_i F_i - \sum_{j=1}^{J} \widehat{L}_j G_j \right)_{x,y}^2 .$$

Для глобальных уравнений используется интегральный аналог

$$\int_\Omega \rho_G \left(\sum_{i=1}^{I} L_i F_i - \sum_{j=1}^{J} \widehat{L}_j G_j \right)^2 dxdy.$$

Здесь ρ_L^m и ρ_G — весовые коэффициенты.

Операторы L_i, действующие на неизвестные функции F_i, назовем **левосторонними**, по их расположению в уравнении (9). И, соответственно, операторы $\widehat{L}_j$ — **правосторонними**. Отличаются они тем, что в качестве параметров правосторонних операторов допустимо использование неизвестных переменных, а для левосторонних — это неприемлемо, поскольку в данном случае задача становится нелинейной.

Остановимся более подробно на операторах и их возможных параметрах. Использование оператора, производящего производные от функции до второго порядка включительно, представляется вполне очевидным при решении задач в классе кубических сплайнов, третьи производные которых терпят разрыв, а более высокие — равны нулю. Вместе с тем применяемый обычно вид оператора (8), имеющий очевидные корни с операторами, используемыми в параболических, гиперболических и эллиптических уравнениях математической физики, представляется недостаточно общим с позиций использования бикубических сплайнов. Действительно, в рамках оператора типа (8) невозможно сформулировать задачу по нахождению сплайна, реализующего экстремальные свойства кубических сплайнов двух переменных, поскольку для этой задачи функционал содержит интеграл от квадрата производной четвертого порядка (дважды по каждой из координат) [Завьялов и др., 1980]. Поэтому представляется целесообразным дополнить дифференциальный оператор тремя параметрами, соответствующими высшим непрерывным производным бикубического сплайна,

$$L(F) = a_0 F + a_1 F_x + a_2 F_y + a_3 F_{xy} + a_4 F_{xx} + a_5 F_{yy} + a_6 F_{xxy} + a_7 F_{xyy} + a_8 F_{xxyy}.$$

Параметры a_0—a_8 левостороннего оператора могут быть либо числами, либо известными функциями координат. Для локальных уравнений эти функции могут задаваться в виде таблицы значений в точках наблюдения. В правостороннем операторе, кроме этого, одним или несколькими параметрами могут быть неизвестные числа, определяемые одновременно с решением общей задачи.

Назовем ***L*-параметром** объект, представляющий собой число, элемент массива, значение функции в некоторой точке или неизвестную переменную. Как следует из изложенного выше, параметры операторов относятся к классу L-параметров.

Конкретный тип L-параметра существенным образом влияет на реализацию его использования при программировании. С позиции повышения эффективности программной реализации обобщенного выражения для глобального уравнения необходимо выделить особый случай, когда функция G_k, характеризующая известные данные, постоянна и равна g_k. В этом случае информативен лишь первый параметр оператора и поэтому можно исключить работу с большим объемом нулевых элементов. При явной записи этой ситуации в обобщенное уравнение добавляется линейная комбинация L-параметров (p_k)

$$\sum_{i=1}^{I} L_i F_i = \sum_{j=1}^{J} \hat{L}_j G_j + \sum_{k=1}^{K} p_k g_k.$$

Случай, когда p_k есть некоторая функция G, а данные, на которые действует этот оператор, являются константой g_k, представляется достаточно искусственным. Математически аналогична, но более естественной является постановка задачи, в которой на функцию G действует оператор с параметром a_0, равным g_k.

Если ни один из входящих в комбинацию параметров p_k не является функцией, то последняя сумма может быть заменена одним обобщенным L-параметром (P)

$$\sum_{i=1}^{I} L_i F_i = \sum_{j=1}^{J} \hat{L}_j G_j + P, \tag{10}$$

где P может быть или заранее известным числом, или некоторой неизвестной величиной, определяемой при решении общей задачи. Отметим, что такая детализация глобального уравнения выполнена для повышения эффективности программной реализации.

Для локальных уравнений ситуация несколько отличается тем, что данные о известных функциях G_j, представленные в правой части, могут задаваться в виде табличных значений для каждой точки наблюдения, как это имеет место при непосредственном задании значений картируемых параметров. Простейший оператор с ненулевым параметром a_0 в этом случае есть единственный осмысленный оператор, который может действовать на этот тип данных. С учетом этого обстоятельства выражение для локальных уравнений в виде

$$\sum_{i=1}^{I} L_i F_i = \sum_{j=1}^{J} \hat{L}_j G_j + \sum_{k=1}^{K} p_k g_k + P \tag{11}$$

является, с одной стороны, достаточно обобщенным, а с другой — в необходимой мере детализированным для обеспечения эффективности программной реализации его использования. Параметр P в локальном уравнении (11) также отличается от одноименного параметра в глобальном уравнении (10) возможностью его представления в виде набора табличных данных.

Использование локального уравнения в виде (11) в рамках общей вариационной постановки задачи определения искомых функций фактически является включением в постановку задачи геокартирования аппарата множественной регрессии и корреляции.

Кроме описанных выше локальных и глобальных уравнений при решении задач восстановления поверхностей используются условия, которые можно назвать **нестрогими связями**. Ярким примером такого типа условий является предпосылка о близости неизвестной величины λ_j (систематической погрешности j-го источника данных) некоторой задаваемой величине λ_j^*, используемая в (2) в виде приближенного равенства

$$\lambda_j - \lambda_j^* \approx 0.$$

Очевидно, обобщенным выражением для нестрогих связей является линейное уравнение с известными коэффициентами c_j и d

$$\sum_j c_j x_j - d \approx 0,$$

где суммирование может производиться по всем неизвестным задачи x_j, включая коэффициенты сплайнов искомых поверхностей и L-параметры. Так же как локальные и глобальные уравнения, нестрогие связи входят в общий функционал в связке с весовым коэффициентом

$$\rho_c \left(\sum_j c_j x_j - d \right)^2.$$

В ряде задач может оказаться необходимым устанавливать **строгие связи** между неизвестными, определяемые строгими равенствами

$$\sum_j c_j x_j - d = 0.$$

Реализация этих условий осуществляется стандартным образом с использованием множителей Лагранжа.

Заметим, что введенные выше обобщающие понятия уравнений, связей и параметров напрямую не связаны с использованием полиноминальных сплайнов. Однако при этом сохранено основное свойство алгоритма сплайн-аппроксимации, определяющее вычислительную эффективность его применения.

Поиск решения в классе сплайн-функций обеспечивает квадратичную форму результирующего функционала относительно неизвестных параметров, что позволяет свести задачу к решению системы алгебраических уравнений. При этом матрица симметрична, имеет ленточную структуру и допускает использование эффективных алгоритмов численного решения системы уравнений с большим числом неизвестных.

Рассматривая описанный подход к аппроксимации данных в целом, легко убедиться, что он может трактоваться как применение классического метода разрешения некорректных задач — путем введения некоторого стабилизирующего условия [Тихонов, Арсенин, 1979], а также как реализация метода многокритериальной оптимизации [Дубов и др., 1986] — путем минимизации линейной свертки критериев (стабилизаторов). И для этого имеются глубокие основания.

Действительно, задача картопостроения, сформулированная как восстановление континуума значений искомой поверхности по ограниченному набору наблюденных данных, является математически некорректной, т.е. допускающей многозначность решений. Поэтому любой метод картопостроения явно или неявно использует некоторые дополнительные предположения о закономерностях поведения картируемой поверхности вне точек наблюдения. Эта дополнительная информация не может быть выведена формальными методами из массива наблюденных результатов. Из изложенного вытекают следующие важные положения:

– не существует формализованных признаков, определяющих преимущества одного метода картирования над другим в смысле точности восстановления всей искомой поверхности по ограниченному набору данных;

– выбор метода картирования и ответственность за результаты построений полностью лежат на геологе;

– методы компьютерного картопостроения должны максимально обеспечивать геолога средствами для реализации его представлений о поведении картируемого объекта.

Именно последнее положение является реальным критерием в выборе метода картопостроения. С этих позиций вариационный метод картопостроения, где решение ищется на основе сплайн-аппроксимации, представляется наиболее универсальным, обеспечивающим эффективное решение широкого круга геологических задач, которые другими методами решаются или частично, или с большими трудозатратами, или вообще не решаются. Отметим несколько наиболее отличительных моментов этого подхода:

– использование при построении карты в принципе произвольного набора разнородных прямых и косвенных данных;

– применение уравнений в частных производных для описания свойств картируемой поверхности во всей области или в локально задаваемых точках наблюдений;

– некоторые элементы регрессионного анализа, при котором коэффициенты связи определяются одновременно с решением основной задачи картопостроения;

– комбинирование приближенных и точных условий для неизвестных параметров.

На основе изложенной выше обобщенной постановки реализован и апробирован программный комплекс GST, успешно используемый при решении многих практических задач [Ставицкий и др., 2004; Атлас…, 2007] в России и за рубежом. Применение в этом комплексе обобщенного сплайн-аппроксимационного подхода обеспечивает решение широкого спектра геологических вопросов от непосредственного картирования пространственных данных до расширенного анализа и моделирования свойств геологических объектов.

Заложенная в этой программе общность математической постановки задачи позволяет в рамках единого интерфейса использовать достаточно абстрактные модели поведения картируемой поверхности, вплоть до решения уравнений математической физики с высокой точностью [Сидоров, Плавник, 2004]. Так, например, для уравнения Пуассона, описывающего провисание тяжелой мембраны, закрепленной на прямоугольной рамке,

$$u_{xx} + u_{yy} = -2, \quad (x, y) \in \Omega \ ,$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

где Ω — область на плоскости x,y: $\{0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$, точное решение, приведенное в [Касти, Калаба, 1976], и приближенное, полученное на основе сплайн-аппроксимации (с использованием шага по x и y, равного 0.05), отличаются менее чем на 0.002 %.

Высокий уровень абстрактности возможной постановки задачи картопостроения, конечно, является не самоцелью, а средством для решения множества прикладных вопросов методами, хорошо изученными теоретически и апробированными практически. Например, использование уравнения Пуассона оказалось эффективным для описания мощностей русловых отложений, что вполне ожидаемо вследствие очевидной аналогии поведения этого параметра в границах распространения коллектора и тяжелой мембраны, закрепленной на этих границах.

Возможные направления применения предложенных подходов достаточно очевидны и в задачах смежных с картопостроением, например, для расчета полей гидродинамических и геофизических показателей с учетом физических закономерностей их поведения. В частности, представляется, что разработанные методы и программные средства их реализации могут использоваться в задачах моделирования геотемпературного поля осадочных отложений, например, при оценке искажений поля температур поверхностным рельефом, требующих решения уравнения Лапласа для граничных условий смешанного типа [Аюнов, Дучков, 2008]. Перспективным является и направление по апробации и верификации моделей взаимосвязи различных геологических параметров. В целом сплайн-аппроксимационные методы применимы и эффективны для решения многих других задач, связанных с изучением пространственных закономерностей в изменении свойств геологических объектов.

ЛИТЕРАТУРА

Аронов В.И. Методы математической обработки данных на ЭВМ. М., Недра, 1978, 168 с.

Аронов В.И. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. М., Недра, 1990, 301 с.

Атлас «Геологическое строение и нефтегазоносность неокомского комплекса Ханты-Мансийского автономного округа—Югры» / Под ред. А.В. Шпильмана, Г.П. Мясникова, Г.И. Плавника. Ханты-Мансийск, ИздатНаукаСервис, 2007, 191 с.

Аюнов Д.Е., Дучков А.Д. Применение метода статистического моделирования (Монте-Карло) для оценки искажений геотемпературного поля поверхностным рельефом // Геология и геофизика, 2008, т. 49 (4), с. 382—389.

Волков А.М. Геологическое картирование нефтегазоносных территорий с помощью ЭВМ. М., Недра, 1988, 221 с.

Волков А.М. Геоинформатика. Тюмень, Вектор Бук, 2008, 368 с.

Давид М. Геостатистические методы при оценке запасов руд. Л., Недра, 1980, 389 с.

Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора систем. М., Наука, 1986, 296 с.

Дюбрул О. Использование геостатистики для включения в геологическую модель сейсмических данных. Париж, EAGE, 2002, 296 с.

Ершов С.В., Букреева Г.Ф., Красавчиков В.О. Компьютерное моделирование геологического строения клиноформного комплекса неокома северных и арктических районов Западной Сибири // Геология и геофизика, 2009, т. 50 (9), с. 1035—1048.

Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М., Наука, 1980, 352 с.

Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. М., Мир, 1976, 223 с.

Красавчиков В.О. Комплексная интерпретация слабо согласованных геолого-геофизических данных при построении региональных структурных карт (на примере осадочного чехла Западно-Сибирской плиты) // Геология и геофизика, 2002, т. 43 (5), с. 456—469.

Леус В.А. Решение задач геологической компьютерной картографии на основе потенциал-полиномов // Геология и геофизика, 1998, т. 39 (10), с. 1423—1430.

Леус В.А. Интерполяционный метод учета косвенной информации при построении карт геологических поверхностей // Геология и геофизика, 2005, т. 46 (2), с. 223—234.

Назаренко Е.В. Сплайн-аппроксимация на основе триангуляции // Проблеми програмування, 2008, № 2—3, спеціальний випуск, с. 657—664.

Плавник А.Г., Курчиков А.Р., Ставицкий Б.П. Районирование многопараметрических данных в постановке задачи картопостроения // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности, 2009, № 6, с. 18—23.

Сидоров А.Н., Плавник А.Г. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методами сплайн-аппроксимации // Труды Международной конференции по вычислительной математике

МКВМ-2004 / Под ред. Г.А. Михайлова, В.П. Ильина, Ю.М. Лаевского. Новосибирск, Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004, ч. 2, с. 648—652.

Сидоров А.Н., Плавник А.Г., Сидоров А.А., Шутов М.С., Степанов А.В., Пономарева М.А. Свидетельство о регистрации программы GST в Реестре программ для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам № 2005612939 от 14 ноября 2005 г.

Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. Томск, Изд-во Том. ун-та, 2002, 128 с.

Ставицкий Б.П., Курчиков А.Р., Конторович А.Э., Плавник А.Г. Гидрохимическая зональность юрских и меловых отложений Западно-Сибирского бассейна // Геология и геофизика, 2004, т. 45 (7), с. 828—832.

Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979, 285 с.

Торопов С.В. Картирование плотности прогнозных ресурсов углеводородов // Вестник недропользователя, 2002, № 11, с. 45—49.

Briggs I.C. Machine contouring using minimum curvature // Geophysics, 1974, v. 39, № 1, p. 39—48.

Emery X. Uncertainty modeling and spatial prediction by multi-Gaussian kriging: accounting for an unknown mean value // Comput. Geosci., 2008, v. 34, № 11, p. 1431—1442.

Hengl T., Bajat B., Reuter H.I., Blagojević D. Geostatistical modeling of topography using auxiliary maps // Comput. Geosci., 2008, v. 34 , № 12, p. 1886—1899.

Kemp L.D., Bonham-Carter G.F., Raines G.L., Looney C.G. Arc-view extension for spatial data modelling using weights of evidence, logistic regression, fuzzy logic and neural network analysis. 2001, Arc-SDM: http://ntserv.gis.nrcan.gc.ca/sdm/.

Lee D.T., Schachter B.J. Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation // Int. J. Computer Information Sci., 1980, v. 9, № 3, p. 219—242.

Renka R.J. Multivariate interpolation of large sets of scattered data // ACM Transaction on Mathematical Software, 1988, v. 14, № 2, p. 139—148.

Sibson R.A. Brief description of natural neighbor interpolation // Interpreting multivariate data / Ed. V. Barnett. New York, John Wiley and Sons, 1981, p. 21—36.

Smith W.H.F., Wessel P. Gridding with continuous curvature splines in tension // Geophysics, 1990, v. 55, № 3, p. 293—305.

Wessel P., Becker J.M. Interpolation using a generalized Green's function for a spherical surface spline in tension // Geophys. J. Int., 2008, v. 174, Iss. 1, p. 21—28.

Xingong Li. Development of a neural network spatial interpolator for precipitation estimation // GIS/LIS'97 Annual Conference, October 28—30, 1997. Cincinnati, Ohio, Proceedings CD-ROM, 1997, p. 667—676.

Xu W., Tran T.T., Srivatsava R.M., Jornel A.G. Integrating seismic data in reservoir modeling // The collocated cokriging alternative, 1992, SPE 24742. p. 833—842.

Рекомендована к печати 25 декабря 2009 г.
А.Э. Конторовичем

Поступила в редакцию
10 июля 2009 г.