$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65N06, 65N12, 65N15 65N22, 74S20, 76M20

Анализ сходимости конечно-разностного метода для задач двумерных течений с однородным полным тензором проницаемости

А. Кинфак Джеутса[1], Х. Донфак[2], Ф.Е. Сапнкен[3,4], Дж.Г. Тамба[3,4]

[1]Higher Technical Teachers' Training College, University of Buea, P.O. Box: 249 Buea, Cameroon

[2]Faculty of Science, University of Bamenda, P.O. Box: 39 Bambili, Cameroon

[3]University Institute of Technology, University of Douala, P.O. Box: 8698 Douala, Cameroon

[4]Higher Institute of Transport, Logistic and Commerce, University of Ebolowa, P.O. Box: B.P. 22 Ambam, Cameroon

E-mail: jeutsa2001@yahoo.fr (Кинфак Джеутса А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 4, Vol. 17, 2024.

Кинфак Джеутса А., Донфак Х., Сапнкен Ф.Е., Тамба Дж.Г. Анализ сходимости конечно-разностного метода для задач двумерных течений с однородным полным тензором проницаемости // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 4. — С. 393–406.

Мы представляем анализ сходимости метода конечных разностей для решения на четырехугольных сетках задач двумерных течений в однородных пористых средах с полным тензором проницаемости. Мы начинаем с вывода дискретной задачи, используя нашу конечно-разностную формулу для смешанной производной второго порядка. Результат существования и единственности решения этой задачи получается благодаря положительной определенности соответствующей матрицы. Исследуются их теоретические свойства, а именно, устойчивость (с соответствующей дискретной энергетической нормой) и оценки ошибки (с L^2-нормой, относительной L^2-нормой и L^∞-нормой). Представлены численные расчеты.

DOI: 10.15372/SJNM20240403
EDN: EYAYHF

Ключевые слова: *конечная разность, задачи диффузии, однородные пористые среды.*

Kinfack Jeutsa A., Donfack H., Sapnken F.E., Tamba J.G. Convergence analysis of a Finite Difference method for 2D-flow problems with a uniform full permeability tensor // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 4. — P. 393–406.

We present in this work a convergence analysis of a Finite Difference method for solving on quadrilateral meshes 2D-flow problems in homogeneous porous media with a full permeability tensor. We start with the derivation of the discrete problem by using our finite difference formula for a mixed derivative of second order. A result of existence and uniqueness of the solution for that problem is given via the positive definiteness of its associated matrix. Their theoretical properties, namely, stability on the one hand (with the associated discrete energy norm) and error estimates (with L^2-norm, relative L^2-norm and L^∞-norm) are investigated. Numerical simulations are shown.

Keywords: *finite difference, diffusion problems, homogeneous porous media.*

1. Введение и модельная задача

Математический анализ метода конечных разностей в задачах двумерных и трехмерных течений с полным тензором проницаемости всегда представляет собой сложную проблему (см., например, [1–3]). Именно поэтому появились некоторые численные методы, основанные на конечно-разностном подходе, такие как миметические методы конечных разностей, для устранения ограничений и недостатков классического метода конечных разностей (см. [4–10] и имеющиеся там ссылки). В настоящее время некоторые авторы занимаются разработкой методов конечных разностей для приложений в нескольких областях, сохраняя при этом классический подход (см., например, [11–20]). Наша работа является частью этого подхода, поскольку целью является математический анализ в терминах устойчивости и оценки ошибки классического подхода конечных разностей на задачах двумерных течений с полной матрицей диффузии в однородной пористой среде на прямоугольной сетке.

Для представления численной схемы рассмотрим двумерную задачу диффузии для поиска функции, удовлетворяющей следующему уравнению в частных производных, связанному с граничным условием Дирихле:

$$-\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) = f \quad \text{в} \;\; \Omega, \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \;\; \Gamma, \tag{1.2}$$

где f — заданная функция, Ω — заданная открытая квадратная область, Γ — ее граница, D — полная симметричная постоянная матрица, описывающая пространственное изменение коэффициента диффузии, которая удовлетворяет условно однородной эллиптичности, т. е.

$$\begin{gathered} \exists\, \gamma_{\min}, \gamma_{\max} \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{такие что} \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^2, \; \xi \neq 0, \\ \gamma_{\min}|\xi|^2 \leq \xi^\top D \xi \leq \gamma_{\max}|\xi|^2, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $|\cdot|$ обозначает евклидову норму в $\mathbb{R}^2$, D_{ij} — компоненты D.

Статья построена следующим образом: в пункте 2 дается конечно-разностная формулировка модельной задачи. В п. 3 доказывается существование и единственность решения дискретной задачи. В п. 4 исследуются теоретические свойства (устойчивость и оценки ошибки в удобных дискретных нормах) решения дискретной задачи. Пункт 5 посвящен численной проверке нашего метода на тестовой задаче, сформулированной в виде (1.1), (1.2), где представлены скорости сходимости для L^2-нормы, относительной L^2-нормы и L^∞-нормы.

2. Конечно-разностная формулировка модельной задачи

2.1. Сетка пространственной области

Для ясности предположим, что пространственная область Ω — это область $]0,1[\times]0,1[$. Предположим, что Ω покрыта квадратной основной сеткой, обозначаемой $\mathcal{P}$, с размером ячейки $h = \dfrac{1}{N}$, где N — заданное положительное целое число. С другой стороны, пусть K_{ij} обозначает сеточный блок, определяемый следующим образом: $K_{ij} = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right]$, где $x_{i+\frac{1}{2}} = x_{i-\frac{1}{2}} + h$, $\;y_{j+\frac{1}{2}} = y_{j-\frac{1}{2}} + h$ для $i, j = 1, \ldots, N$ при $x_{\frac{1}{2}} = y_{\frac{1}{2}} = 0$.

Согласно вариационной теории линейных эллиптических задач (см., например, [21]), система (1.1), (1.2) имеет единственное решение ϕ в пространстве Соболева H_0^1 при предположении (1.3) и условии, что $f \in L^2(\Omega)$.

Замечание 2.1. Предположим, что в дальнейшем

(i) решение (1.1), (1.2) является достаточно регулярным для наших целей;

(ii) дискретные неизвестные считаются приемлемыми аппроксимациями в центрах блоков основной сетки (x_i, y_j), обозначаемыми $\{u_{i,j}\}_{1\le i,j\le N}$;

(iii) точное решение ϕ уравнений (1.1), (1.2) в точках (x_i, y_j) обозначается $\phi_{i,j}$, где $x_i = \frac{1}{2}\left(x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}\right)$ и $y_i = \frac{1}{2}\left(y_{j-\frac{1}{2}} + y_{j+\frac{1}{2}}\right)$.

2.2. Дискретная задача

Записав уравнение баланса (1.1) в каждом центре сеточного блока K_{ij} для $1 \le i$, $j \le N$, получим

$$-\operatorname{div}\big(D\operatorname{grad}\phi(x_i, y_j)\big) = f(x_i, y_j), \tag{2.1}$$

что эквивалентно

$$-D_{11}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x_i, y_j) - 2D_{12}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x_i, y_j) - D_{22}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j). \tag{2.2}$$

Благодаря классическим формулам конечных разностей мы имеем следующие аппроксимации:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}\big[\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}\big] + O\big(h^2\big), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}\big[\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}\big] + O\big(h^2\big), \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x_i, y_j) = \frac{1}{4h^2}\big[\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1}\big] + O\big(h^2\big). \tag{2.5}$$

Путем введения соотношений (2.3)–(2.5) в (2.2), и учитывая замечание 2.1, мы получим следующую дискретную задачу:

$$\begin{aligned} &D_{11}[u_{i,j} - u_{i-1,j}] + D_{11}[u_{i,j} - u_{i+1,j}] + D_{22}[u_{i,j} - u_{i,j-1}] + D_{22}[u_{i,j} - u_{i,j+1}] - \\ &\qquad \frac{1}{2}D_{12}[u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}] + \frac{1}{2}D_{12}[u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}] = h^2 f_{i,j} \quad \forall\, 1 \le i, j \le N \end{aligned} \tag{2.6}$$

с

$$u_{i,0} = u_{0,j} = u_{i,N+1} = u_{N+1,j} = 0 \quad \forall\, 1 \le i, j \le N, \tag{2.7}$$

которые получаются из граничных условий (1.2) и где

$$f_{i,j} = f(x_i, y_j) \quad \forall\, 1 \le i, j \le N.$$

3. Существование и единственность решения дискретной задачи

Предложение 3.1. *Матрица, связанная с дискретной задачей* (2.6), (2.7), *является симметричной и положительно определенной.*

Доказательство. Симметричная структура матрицы очевидна. Умножение (2.6) на $u_{i,j}$ и суммирование для $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ с использованием обозначений (2.7) приводит к следующим соотношениям:

$$D_{11} \sum_{\substack{0 \le i \le N, \\ 1 \le j \le N}} \left[u_{i+1,j} - u_{i,j}\right]^2 + D_{22} \sum_{\substack{1 \le i \le N, \\ 0 \le j \le N}} \left[u_{i,j+1} - u_{i,j}\right]^2 + \frac{1}{2} D_{12} \sum_{\substack{1 \le i \le N, \\ 1 \le j \le N}} \left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right]\left[u_{i,j+1} - u_{i,j-1}\right] = \sum_{\substack{1 \le i \le N, \\ 1 \le j \le N}} h^2 u_{i,j} f_{i,j}\,. \qquad (3.1)$$

В дальнейшем LHS будет обозначать левую часть, а RHS правую часть уравнения (3.1). LHS можно записать в виде

$$\mathrm{LHS} = \mathrm{LHS1} + \mathrm{LHS2} + \mathrm{LHS3} + \mathrm{LHS4}, \qquad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS1} = {} & \frac{1}{4} \sum_{\substack{1 \le i \le N-1, \\ 1 \le j \le N-1}} \Big\{ D_{11}[u_{i+1,j} - u_{i,j}]^2 + 2D_{12}[u_{i+1,j} - u_{i,j}][u_{i,j+1} - u_{i,j}] + D_{22}[u_{i,j+1} - u_{i,j}]^2 \Big\} + \\
& \frac{1}{4} \sum_{\substack{1 \le i \le N-1, \\ 2 \le j \le N}} \Big\{ D_{11}[u_{i+1,j} - u_{i,j}]^2 + 2D_{12}[u_{i+1,j} - u_{i,j}][u_{i,j} - u_{i,j-1}] + D_{22}[u_{i,j} - u_{i,j-1}]^2 \Big\} + \\
& \frac{1}{4} \sum_{\substack{2 \le i \le N, \\ 1 \le j \le N-1}} \Big\{ D_{11}[u_{i,j} - u_{i-1,j}]^2 + 2D_{12}[u_{i,j} - u_{i-1,j}][u_{i,j+1} - u_{i,j}] + D_{22}[u_{i,j+1} - u_{i,j}]^2 \Big\} + \\
& \frac{1}{4} \sum_{\substack{2 \le i \le N, \\ 2 \le j \le N}} \Big\{ D_{11}[u_{i,j} - u_{i-1,j}]^2 + 2D_{12}[u_{i,j} - u_{i-1,j}][u_{i,j} - u_{i,j-1}] + D_{22}[u_{i,j} - u_{i,j-1}]^2 \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS2} = {} & \frac{1}{4} \sum_{1 \le i \le N-1} \Big\{ D_{11}[u_{i+1,N} - u_{i,N}]^2 - 2D_{12} u_{i,N}[u_{i+1,N} - u_{i,N}] + D_{22} u_{i,N}^2 \Big\} + \\
& \frac{1}{4} \sum_{1 \le i \le N-1} \Big\{ D_{11}[u_{i+1,1} - u_{i,1}]^2 + 2D_{12} u_{i,1}[u_{i+1,1} - u_{i,1}] + D_{22} u_{i,1}^2 \Big\} + \\
& \frac{1}{4} \sum_{2 \le i \le N} \Big\{ D_{11}[u_{i,N} - u_{i-1,N}]^2 - 2D_{12} u_{i,N}[u_{i,N} - u_{i-1,N}] + D_{22} u_{i,N}^2 \Big\} + \\
& \frac{1}{4} \sum_{2 \le i \le N} \Big\{ D_{11}[u_{i,1} - u_{i-1,1}]^2 + 2D_{12} u_{i,1}[u_{i,1} - u_{i-1,1}] + D_{22} u_{i,1}^2 \Big\},
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS3} = {} & \frac{1}{4} \sum_{1 \le j \le N-1} \Big\{ D_{11} u_{N,j}^2 - 2D_{12} u_{N,j}[u_{N,j+1} - u_{N,j}] + D_{22}[u_{N,j+1} - u_{N,j}]^2 \Big\} + \\
& \frac{1}{4} \sum_{2 \le j \le N} \Big\{ D_{11} u_{N,j}^2 - 2D_{12} u_{N,j}[u_{N,j} - u_{N,j-1}] + D_{22}[u_{N,j} - u_{N,j-1}]^2 \Big\} + \\
& \frac{1}{4} \sum_{1 \le j \le N-1} \Big\{ D_{11} u_{1,j}^2 + 2D_{12} u_{1,j}[u_{1,j+1} - u_{1,j}] + D_{22}[u_{1,j+1} - u_{1,j}]^2 \Big\} +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{2\le j\le N}\Big\{D_{11}u_{1,j}^2+2D_{12}u_{1,j}[u_{1,j}-u_{1,j-1}]+D_{22}[u_{1,j}-u_{1,j-1}]^2\Big\},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS4}=\ &\frac{1}{4}\ (D_{11}+D_{22}+2D_{12})u_{1,1}^2+\frac{1}{4}(D_{11}+2D_{22}+2D_{12})u_{N,N}^2+\\ &\frac{1}{4}\ (D_{11}+D_{22}-2D_{12})u_{1,N}^2+\frac{1}{4}(D_{11}+D_{22}-2D_{12})u_{N,1}^2+\\ &\frac{1}{2}\ D_{11}\sum_{1\le j\le N}\Big\{u_{1,j}^2+u_{N,j}^2\Big\}+\frac{1}{2}D_{22}\sum_{1\le i\le N}\Big\{u_{i,1}^2+u_{i,N}^2\Big\}.\end{aligned}$$

Благодаря соотношению (1.3), мы имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS1}\ge\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{\substack{1\le i\le N-1,\\1\le j\le N-1}}\Big\{[u_{i+1,j}-u_{i,j}]^2+[u_{i,j+1}-u_{i,j}]^2\Big\}+\\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{\substack{1\le i\le N-1,\\2\le j\le N}}\Big\{[u_{i+1,j}-u_{i,j}]^2+[u_{i,j}-u_{i,j-1}]^2\Big\}+\\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{\substack{2\le i\le N,\\1\le j\le N-1}}\Big\{[u_{i,j}-u_{i-1,j}]^2+[u_{i,j+1}-u_{i,j}]^2\Big\}+\\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{\substack{2\le i\le N,\\2\le j\le N}}\Big\{[u_{i,j}-u_{i-1,j}]^2+[u_{i,j}-u_{i,j-1}]^2\Big\},\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS2}\ge\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{1\le i\le N-1}\Big\{[u_{i+1,N}-u_{i,N}]^2+u_{i,N}^2\Big\}+\\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{1\le i\le N-1}\Big\{[u_{i+1,1}-u_{i,1}]^2+u_{i,1}^2\Big\}+\\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{2\le i\le N}\Big\{[u_{i,N}-u_{i-1,N}]^2+u_{i,N}^2\Big\}+\\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{2\le i\le N}\Big\{[u_{i,1}-u_{i-1,1}]^2+u_{i,1}^2\Big\},\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS3}\ge\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{1\le j\le N-1}\Big\{u_{N,j}^2+[u_{N,j+1}-u_{N,j}]^2\Big\}+\\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{2\le j\le N}\Big\{u_{N,j}^2+[u_{N,j}-u_{N,j-1}]^2\Big\}+\\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{1\le j\le N-1}\Big\{u_{1,j}^2+[u_{1,j+1}-u_{1,j}]^2\Big\}+\\ &\frac{1}{4}\ \gamma_{\min}\sum_{2\le j\le N}\Big\{u_{1,j}^2+[u_{1,j}-u_{1,j-1}]^2\Big\}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Объединив соотношения (3.2)–(3.6), получаем

$$\begin{aligned}
\text{LHS} \geq\ & \gamma_{\min} \sum_{\substack{1\leq i\leq N,\\ 1\leq j\leq N}} \Big\{[u_{i+1,j}-u_{i,j}]^2 + [u_{i,j+1}-u_{i,j}]^2\Big\} + \\
& \frac{1}{4}\,(D_{11}+D_{22}+2D_{12}-2\gamma_{\min})(u_{1,1}^2+u_{N,N}^2) + \\
& \frac{1}{4}\,(D_{11}+D_{22}-2D_{12}-2\gamma_{\min})(u_{1,N}^2+u_{N,1}^2) + \\
& \frac{1}{2}\,(D_{11}+\gamma_{\min}) \sum_{1\leq j\leq N} u_{1,j}^2 + \frac{1}{2}(D_{11}-\gamma_{\min}) \sum_{1\leq j\leq N} u_{N,j}^2 + \\
& \frac{1}{2}\,(D_{22}+\gamma_{\min}) \sum_{1\leq i\leq N} u_{i,1}^2 + \frac{1}{2}(D_{22}-\gamma_{\min}) \sum_{1\leq i\leq N} u_{i,N}^2. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Доказательство завершено. □

Замечание 3.1. Симметричная матрица D является положительно определенной, поэтому

i) $D_{11} > \gamma_{\min}, \quad D_{22} > \gamma_{\min}$,

ii) $D_{11} + D_{22} + 2D_{12} - 2\gamma_{\min} > 0$,

iii) $D_{11} + D_{22} - 2D_{12} - 2\gamma_{\min} > 0$.

Вследствие замечания 3.1 неравенство (3.7) принимает вид

$$\text{LHS} \geq \gamma \|u_h\|_{1,h}^2, \qquad (3.8)$$

где

$$\|u_h\|_{1,h}^2 = \sum_{\substack{0\leq i\leq N,\\ 0\leq j\leq N}} \Big\{[u_{i+1,j}-u_{i,j}]^2 + [u_{i,j+1}-u_{i,j}]^2\Big\} \qquad (3.9)$$

при $u_{N+1,j} = u_{0,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0$ для $i, j \in \{0, \ldots, N\}$ и $\gamma = \frac{1}{2}\gamma_{\min}$. Отсюда следует, что положительная определенность матрицы доказана.

Предложение 3.2 (Существование и единственность). *Дискретная задача, состоящая в том, чтобы найти* $\{u_{i,j}\}_{1\leq i,\ j\leq N}$ *, такие что уравнения* (2.6), (2.7) *удовлетворяются, имеет единственное решение.*

Доказательство. Согласно предположению 3.1 матрица, соответствующая дискретной задаче (2.6), (2.7), является симметричной и положительно определенной. Следовательно, эта дискретная задача имеет единственное решение. □

Замечание 3.2. Дискретная задача (2.6) удовлетворяет дискретному принципу максимума, если $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} \leq 0$ в области Ω.

4. Устойчивость слабого приближенного решения

4.1. Слабое приближенное решение

Начнем с рассмотрения основной сетки $\mathcal{P}$. Элементы $\mathcal{P}$ состоят из квадратов K, полностью вложенных в $\overline{\Omega}$. Пусть Γ_K — граница $K \in \mathcal{P}$ и $\mathbf{E}(\mathcal{P})$ — пространство функций v, определенных почти всюду в $\mathbb{R}^2$, таких что v постоянна в любом $K \in \mathcal{P}$ и равна нулю в противном случае. Это пространство, очевидно, непустое, поскольку существует нулевая функция.

Припишем $\mathbf{E}(\mathcal{P})$ следующую дискретную энергетическую норму: для всех $v \in \mathbf{E}(\mathcal{P})$ положим

$$\|v_h\|_{1,h} = \left[\sum_{a\in\xi}(\Delta_a v)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad (\Delta_a v) = \sum_{\substack{L,\,K,\ \text{такие что}\\ \Gamma_K\cap\Gamma_L=\{a\}}} |v_L - v_K|^2 \tag{4.1}$$

и ξ — множество ребер, полностью вложенных в $\overline{\Omega}$, и K, L взяты в $\mathcal{P}$.

Заметим, что ребро a может принадлежать границе Γ области Ω. В этом случае существует единственный элемент K в $\mathcal{P}$, такой что a принадлежит границе Γ_K области K. В этом случае естественно определить $(\Delta_a v)$ посредством $(\Delta_a v) = |v_K|^2$. Норму, определяемую (4.1), можно рассматривать как дискретную версию классической $H_0^1(\Omega)$-нормы.

Введем пространство

$$C_0\left(\overline{\Omega}\right) = \{v : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ кусочно-непрерывна и } v = 0 \text{ на } \Gamma\}$$

и оператор

$$\begin{gathered}\Pi: \quad C_0\left(\overline{\Omega}\right) \longrightarrow E\left(\mathcal{P}\right),\\ v \mapsto \Pi, v\end{gathered}$$

$$[\Pi v]\,(x,y) = \begin{cases} v(x_{_K}, y_{_K}), & \text{если } (x,y) \in \mathrm{Int}(K),\\ 0, & \text{если } \ x \in \mathbb{R}^2\backslash\Omega,\end{cases}$$

где $K \in \mathcal{P}$ и $(x_{_K}, y_{_K})$ — координаты центра K.

Пусть U_h — приближенное решение диффузионной задачи (1.1), (1.2) и $U_{\mathcal{P}}^h$ — функция из $\mathbf{E}(\mathcal{P})$, такая что $U_{\mathcal{P}}^h\,|_K = U_K$ для $K \in \mathcal{P}$, и где U_K — приближенное решение этой же диффузионной задачи в центральной точке $(x_{_K}, y_{_K})$. Имеем

$$[\Pi U_h]\,(x,y) = U_{\mathcal{P}}^h(x,y) = \begin{cases} U_K, & \text{если } (x,y) \in \mathrm{Int}(K),\\ 0, & \text{если } (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\Omega.\end{cases} \tag{4.2}$$

Определение 4.1. Пусть v — функция из $\mathbf{E}(\mathcal{P})$. Тогда $v_{|\Omega}$ — слабое приближенное решение диффузионной задачи (1.1), (1.2), если существует приближенное решение V для (1.1), (1.2), такое что $v = \Pi V$.

Замечание 4.1. Согласно определению 4.1, $U_{\mathcal{P}}^h$ является слабым приближенным решением (1.1), (1.2). В дальнейшем эту же приближенную функцию будем обозначать u_h, а U_K обозначает $u_{i,j}$.

4.2. Устойчивость слабого приближенного решения u_h

Докажем устойчивость слабого приближенного решения в смысле дискретной энергетической нормы (4.1). Основной частью доказательства этого результата является дискретная версия неравенства Пуанкаре, которая имеет следующий вид.

Лемма 4.1 (Дискретная версия неравенства Пуанкаре). *Существует строго положительное число δ, такое что*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta \|u_h\|_{1,h} \quad \forall\, v \in \mathbf{E}(\mathcal{P}).$$

Доказательство можно найти в [22].

Предложение 4.1 (Устойчивость). *Слабое приближенное решение u_h диффузионной задачи* (1.1), (1.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\|u_h\|_{1,h} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

где C — строго положительное действительное число, независящее от пространственной дискретизации.

Доказательство. Умножение (2.6) на $u_{i,j}$ и суммирование для $i,j \in \{1,2,\ldots,N\}$ дает при обозначениях (2.7) соотношение (3.1). Объединив (3.1) и (3.2), имеем

$$\mathrm{LHS} = \mathrm{RHS}, \tag{4.3}$$

где

$$\mathrm{RHS} = \sum_{\substack{1\leq i\leq N,\\ 1\leq j\leq N}} h^2 u_{i,j} f_{i,j} \leq \left(\sum_{\substack{1\leq i\leq N,\\ 1\leq j\leq N}} h^2 f_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{1\leq i\leq N,\\ 1\leq j\leq N}} h^2 u_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2} \|u_h\|_{L^2}. \tag{4.4}$$

Мы имеем этот результат благодаря соотношениям (3.8), (4.3), (4.4) и лемме 4.1. □

Замечание 4.2. Этот результат означает L^2-устойчивость слабого приближенного решения. Это следует из леммы 4.1.

4.3. Оценки ошибки для слабого приближенного решения

После введения ошибки усечения уравнения (2.6), (2.7) преобразуются следующим образом:

$$D_{11}[\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j}] + D_{11}[\phi_{i,j}-\phi_{i+1,j}] + D_{22}[\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}] + D_{22}[\phi_{i,j}-\phi_{i,j+1}] - \frac{1}{2}D_{12}[\phi_{i+1,j+1}-\phi_{i+1,j-1}] + \frac{1}{2}D_{12}[\phi_{i-1,j+1}-\phi_{i-1,j-1}] = h^2 f_{i,j} + h^2 R_{i,j} \quad \forall\, 1 \leq i,j \leq N \tag{4.5}$$

при

$$\phi_{i,0} = \phi_{0,j} = \phi_{i,N+1} = \phi_{N+1,j} = 0 \quad \forall\, 1 \leq i,j \leq N. \tag{4.6}$$

Замечание 4.3. При предположении $\phi \in C^3(\Omega)$ по блокам основной сетки существуют положительная постоянная C, зависящая только от Ω, и функция ϕ, такая что

$$|R_{i,j}| \leq Ch^2 \quad \forall\, 1 \leq i,j \leq N. \tag{4.7}$$

Определим функцию ε_h почти везде в $\mathbb{R}^2$ следующим образом:

$$\varepsilon_h(x,y) = \begin{cases} \varepsilon_K, & \text{если } (x,y) \in \mathrm{Int}(K), \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad \text{при } K \in \mathcal{P}, \tag{4.8}$$

где множество $\varepsilon_K = \phi_K - u_K$ для всех $K \in \mathcal{P}$; ε_K — общее обозначение для $\varepsilon_{i,j}$.

Замечание 4.4. Из соотношения (4.8) видно, что функция $\varepsilon_h \in \mathbf{E}(\mathcal{P})$. Эта функция в некотором смысле выражает ошибку (т. е. разницу между точным и слабым приближенным решением u_h) и некоторые оценки этой ошибки приведены ниже.

Теперь покажем, что величины $\{\varepsilon_{i,j}\}_{1\le i,j\le N}$ являются решением дискретной задачи вида (2.6), (2.7).

Вычитание (4.5) из (2.6) дает

$$D_{11}[\varepsilon_{i,j}-\varepsilon_{i-1,j}]+D_{11}[\varepsilon_{i,j}-\varepsilon_{i+1,j}]+D_{22}[\varepsilon_{i,j}-\varepsilon_{i,j-1}]+D_{22}[\varepsilon_{i,j}-\varepsilon_{i,j+1}]-\frac{1}{2}D_{12}[\varepsilon_{i+1,j+1}-\varepsilon_{i+1,j-1}]+\frac{1}{2}D_{12}[\varepsilon_{i-1,j+1}-\varepsilon_{i-1,j-1}]=h^2R_{i,j}\quad \forall\, 1\le i,j\le N \tag{4.9}$$

при

$$\varepsilon_{i,0}=\varepsilon_{0,j}=\varepsilon_{i,N+1}=\varepsilon_{N+1,j}=0\quad \forall\, 1\le i,j\le N. \tag{4.10}$$

Умножение (4.9) на $\varepsilon_{i,j}$, суммирование по i,j при $1\le i,j\le N$ и использование (3.8) дают следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\gamma\|\varepsilon_h\|_{1,h}^2 &\le \sum_{\substack{1\le i\le N,\\ 1\le j\le N}} h^2\varepsilon_{i,j}R_{i,j} \le \left(\sum_{\substack{1\le i\le N,\\ 1\le j\le N}} h^2\varepsilon_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{1\le i\le N,\\ 1\le j\le N}} h^2R_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le Ch^2\|\varepsilon_h\|_{L^2}\left(\sum_{\substack{1\le i\le N,\\ 1\le j\le N}} h^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(согласно замечанию 4.3)}\\ &\le Ch^2\|\varepsilon_h\|_{L^2}\big(\mathrm{mes}(\Omega)\big)^{\frac{1}{2}} \le Ch^2\big(\mathrm{mes}(\Omega)\big)^{\frac{1}{2}}\|\varepsilon_h\|_{1,h}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Поэтому

$$\|\varepsilon_h\|_{1,h}\le C_1h^2,\qquad \text{где}\quad C_1=\frac{C\big(\mathrm{mes}(\Omega)\big)^{\frac{1}{2}}}{\gamma}. \tag{4.12}$$

Применив неравенство Пуанкаре, получим

$$\|\varepsilon_h\|_{L^2}\le C_2h^2,\quad \text{где}\quad C_2=\delta C_1. \tag{4.13}$$

Теперь исследуем оценку погрешности для L^∞-нормы, определенной в пространстве $\mathbf{E}(\mathcal{P})$, следующим образом:

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}=\max_K|v_K|\quad \text{или, что эквивалентно,}\quad \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}=\max_{1\le i,j\le N}|v_{i,j}|.$$

Для любых произвольных фиксированных i и j $(1\le i,j\le N)$ поскольку $\varepsilon_{0,j}=0$ (см. соотношение (2.7)) очевидно, что

$$\begin{aligned}|\varepsilon_{i,j}| &\le \sum_{0\le k\le i-1}|\varepsilon_{k+1,j}-\epsilon_{k,j}| \le \sum_{0\le k\le N}|\varepsilon_{k+1,j}-\varepsilon_{k,j}| \le \sum_{0\le k\le N} h^{\frac{1}{2}}\frac{|\varepsilon_{k+1,j}-\varepsilon_{k,j}|}{h^{\frac{1}{2}}}\\ &\le \left(\sum_{0\le k\le N} h\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{0\le k\le N}\frac{(\varepsilon_{k+1,j}-\varepsilon_{k,j})^2}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\,\big(\mathrm{diam}(\Omega)\big)^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}\|\varepsilon_h\|_{1,h}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

При использовании соотношения (4.13) неравенство (4.14) принимает следующий вид:

$$\|\varepsilon_h\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2}\left(\mathrm{diam}(\Omega)\right)^{\frac{1}{2}} C_1 h^{\frac{3}{2}}. \tag{4.15}$$

Объединим эти оценки ошибки (т. е. (4.12), (4.13) и (4.15)) в следующем утверждении.

Теорема 4.1 (Оценки ошибки в нормах $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ и $\|u_h\|_{1,h}$). *Предположим, что тензор диффузии D в диффузионной задаче* (1.1), (1.2) *— положительно определенная полная матрица с постоянными коэффициентами. Предположим также, что единственное вариационное решение ϕ для* (1.1), (1.2) *удовлетворяет $\phi \in C^3\left(\overline{\Omega}\right)$. Напомним, что $\Pi\phi$ является функцией из $\mathbf{E}(\mathcal{P})$, определяемой следующим образом:*

$$\Pi\phi_{|K}(x,y) = \begin{cases} \varphi_K \equiv \textit{значению } \phi \textit{ в центре } K \textit{ для всех } K \in \mathcal{P}, \\ 0 \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда функция $\varepsilon_h = \phi_h - u_h$, где ε_h определяется посредством (4.8) *и $u_h = \Pi U_h$, удовлетворяет следующим неравенствам:*

(i) $|\varepsilon_h|_{1,h} \leq Ch^2$,

(ii) $\|\varepsilon_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sqrt{2}Ch^{\frac{3}{2}}$,

(iii) $\|\varepsilon_h\|_{L^2} \leq Ch^2$,

где C — строго положительное действительное число, зависящее исключительно от φ, Ω и $\gamma_{\min}$.

5. Численные тесты

В данном пункте представим некоторые численные тесты. Для каждого теста используется однородная прямоугольная сетка с различными уровнями измельчения, реализуемыми путем последовательного уменьшения значений, присвоенных размеру ячейки сетки h. Некоторые тесты взяты из FVCA5 Benchmark (см. [23]). Рассматривается задача диффузии, сформулированная в виде (1.1), (1.2).

Обозначим: **numkw** — число неизвестных, **nnmat** — число ненулевых членов в матрице.

Пусть u обозначает точное решение, $\mathcal{T}$ — сетку, а $u_{\mathcal{T}} = (u_K)_{K\in\mathcal{T}}$ — кусочно-постоянное приближенное решение. Введем следующие обозначения:

erL2 — дискретная L^2-норма ошибки, определяемая как

$$\mathbf{erL2} = \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} |K|\left(u(x_K) - u_K\right)^2\right)^{1/2};$$

errL2 — относительная дискретная L^2-норма ошибки, определяемая как

$$\mathbf{errL2} = \left(\frac{\sum\limits_{K\in\mathcal{T}} |K|\left(u(x_K) - u_K\right)^2}{\sum\limits_{K\in\mathcal{T}} |K|\, u(x_K)^2}\right)^{1/2};$$

erL$^\infty$ — дискретная L^∞-норма ошибки, определяемая как

$$\mathbf{erL}^\infty = \max_{P\in\mathcal{T}} |u_P|;$$

ocv-erL2 — порядок сходимости метода для L^2-нормы решения, определяемый посредством **erL2**, относительно размера ячейки сетки:

$$\textbf{ocv-erL2} = \frac{\ln(\textbf{erL2}(imax)) - \ln(\textbf{erL2}(imax-1))}{\ln(h(imax)) - \ln(h(imax-1))},$$

где h — максимальный диаметр контрольного объема, $imax$ — максимальный уровень измельчения заданной основной сетки;
ocv-errL2 — порядок сходимости метода для **errL2**, определяемый также как **ocv-erL2**;
ocv-erL$^\infty$ — порядок сходимости метода для L^∞-нормы, определяемый также как **ocv-erL2**;
slope-[·] — порядок сходимости ошибки к нулю для норм при вычислении методом наименьших квадратов ([·] означает одно из **erL2**, **errL2**, **erL$^\infty$**):

$$ln\,[\textbf{er}[\cdot]\,(i)] = \textbf{slope-}[\cdot]\;ln\,[h(i)] + \beta, \quad \text{где } \beta \text{ — действительное число;}$$

ratio-erL2 для $i \geq 2$, задается как

$$\textbf{ratio-erL2}(i) = -2\,\frac{\ln(\textbf{erL2}(i)) - \ln(\textbf{erL2}(i-1))}{\ln(\textbf{numkw}(i)) - \ln(\textbf{numkw}(i-1))};$$

ratio-errL2 и **ratio-erL$^\infty$** определяются аналогичным образом.

5.1. Численный тест 1

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 10000 \end{pmatrix}$$

Точное решение $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ в $[0,1]\times[0,1]$.

N	h	**numkw**	**nnmat**	**errL2**	**erL2**	**erL$^\infty$**
1	1/4	16	64	0.6192	0.1548	0.4177
2	1/8	64	288	0.2912	0.0364	0.2063
3	1/16	256	1216	0.1420	0.0089	0.1010
4	1/32	1024	4992	0.0702	0.0016	0.0498
5	1/64	4096	20224	0.0349	5.4526 e−04	0.0247
6	1/128	16384	81408	0.0174	1.3600 e−04	0.0123
7	1/256	65536	326656	0.0087	3.3996 e−05	0.0062

обозначение	**errL2**	**erL2**	**erL$^\infty$**
slope-[·]	1.0059	2.0232	1.0164
ocv-[·]	1.0034	2.0039	1.0059
ratio-[·](6)	1.0481	2.0876	1.0464

5.2. Численный тест 2

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 10000 \end{pmatrix}$$

Точное решение $u(x,y) = 16x(1-x)y(1-y)$ в $[0,1]\times[0,1]$.

N	h	**numkw**	**nnmat**	**errL2**	**erL2**	**erL**$^\infty$
1	1/4	16	64	0.7689	0.1922	0.5275
2	1/8	64	288	0.3637	0.0455	0.2615
3	1/16	256	1216	0.1765	0.0110	0.1284
4	1/32	1024	4992	0.0869	0.0027	0.0634
5	1/64	4096	20224	0.0431	6.7386 e−04	0.0315
6	1/128	16384	81408	0.0215	1.6785 e−04	0.0157
7	1/256	65536	326656	0.0107	4.1917 e−05	0.0078

обозначение	**errL2**	**erL2**	**erL**$^\infty$
slope-[·]	1.0249	2.0244	1.0136
ocv-[·]	1.0034	2.0053	1.0046
ratio-[·](6)	1.0468	2.0896	1.0455

5.3. Численный тест 3

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 10^7 \end{pmatrix}$$

Точное решение $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ в $[0, 1] \times [0, 1]$.

N	h	**numkw**	**nnmat**	**errL2**	**erL2**	**erL**$^\infty$
1	1/4	16	64	0.6192	0.1548	0.4176
2	1/8	64	288	0.2913	0.0364	0.2063
3	1/16	256	1216	0.1420	0.0089	0.1010
4	1/32	1024	4992	0.0702	0.0022	0.0498
5	1/64	4096	20224	0.0349	5.4523 e−04	0.0247
6	1/128	16384	81408	0.0174	1.3594 e−04	0.0123
7	1/256	65536	326656	0.0087	3.3941 e−05	0.0061

обозначение	**errL2**	**erL2**	**erL**$^\infty$
slope-	1.0220	2.0223	1.0164
ocv-[·]	1.0041	2.0039	1.0059
ratio-[·](6)	1.0464	2.0882	1.0481

Результаты численных расчетов, приведенные выше, показывают сходимость второго порядка в L^2-норме и сходимости первого порядка в относительной L^2-норме и в L^∞-норме. Эти результаты свидетельствуют о сходимости представленной численной схемы и согласуются с теоретическими результатами.

6. Выводы и перспективы

Мы предложили анализ сходимости метода конечных разностей для задач двумерных течений в однородных пористых средах с однородным тензором проницаемости. Наш результат показал существование и единственность решения дискретной задачи. Результат устойчивости и оценки ошибки были доказаны с использованием L^2-, L^∞- и относительной L^2-нормы. Численные тесты подтвердили теоретические результаты. Наша задача на будущее — представить аналогичную работу на структурированной сетке с использованием треугольников.

Литература

1. **Motzkin T.S., Wasow W.** On the approximation of linear elliptic differential equations by difference equations with positive coefficients // J. Mathem. Phys. — 1952. — Vol. 31, iss. 1-4. — P. 253–259. — https://doi.org/10.1002/sapm1952311253.
2. **Greenspan D., Jain P.C.** On non negative difference analogues of elliptic differential equations // J. Franklin Institute. — 1965. — Vol. 279, iss. 5. — P. 360–365.
3. **Weickert J.** Anisotropic Diffusion in Image Processing. ECMI Series. — Stuttgart: Teubner-Verlag, 1998.
4. **Berndt M., Lipnikov K., Shashkov M., Wheeler M.F., Yotov I.** Superconvergence of the velocity in mimetic finite difference methods on quadrilaterals // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — Vol. 43, № 4. — P. 1728–1749. — DOI: 10.1137/040606831.
5. **Brezzi F., Lipnikov K., Shashkov M.** Convergence of mimetic finite difference method for diffusion problems on polyhedral meshes with curved faces // Math. Models Methods Appl. — 2006. — Vol. 16, № 02. — P. 275–297. — DOI: 10.1142/S0218202506001157.
6. **Lipnikov K., Manzini G., Shashkov M.** Mimetic finite difference method // J. Comput. Phys. — 2014. — Vol. 257. — P. 1163–1227.
7. **Abushaikha A.S., Terekhov K.M.** A fully implicit mimetic finite difference scheme for general purpose subsurface reservoir simulation with full tensor permeability // J. Comput. Phys. — 2020. — Vol. 406. — Article № 109194.
8. **Brezzi F., Buffa A., Lipnikov K.** Mimetic finite differences for elliptic problems// ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. — 2009. — Vol. 43, № 2. — P. 277–295. — DOI: 10.1051/m2an:2008046.
9. **Lipnikov K., Manzini G., Moulton J.D., Shashkov M.** The mimetic finite difference method for elliptic and parabolic problems with a staggered discretization of diffusion coefficient // J. Comput. Phys. — 2016. — Vol. 305, № C. — P. 111–126. — https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.10.031.
10. **Attipoe D.S., Tambue A.** Convergence of the mimetic finite difference and fitted mimetic finite difference method for options pricing // Appl. Math. Comput. — 2021. — Vol. 401. — Article № 12660. — DOI: 10.1016/j.amc.2021.126060.
11. **Kaya A.** Finite difference approximations of multidimensional unsteady convection-diffusion-reaction equations // J. Comput. Phys. — 2015. — Vol. 285. — P. 331–349.
12. **Kozdon J.E., Wilcox L.C.** Stable coupling of nonconforming, high-order finite difference methods // SIAM J. Sci. Comput. — 2016. — Vol. 38, iss. 2. — P. A923–A952. — DOI: 10.1137/15M1022823.
13. **Mattsson K.** Summation by parts operators for finite difference approximations of second-derivatives with variable coefficients // J. Sci. Comput. — 2012. — Vol. 51. — P. 650–682.
14. **Mattsson K., Nordstrom J.** Summation by parts operators for finite difference approximations of second derivatives // J. Comput. Phys. — 2004. — Vol. 199, iss. 2. — P. 503–540. — DOI: 10.1016/j.jcp.2004.03.001.
15. **Soler J., Schwander F., Giorgiani G. et al.** A new conservative finite-difference scheme for anisotropic elliptic problems in bounded domain // J. Comput. Phys. — 2019. — Vol. 405, iss. 5. — Article № 109093. — DOI: 10.1016/j.jcp.2019.109093.
16. **Kumari K., Bhattacharya R., Donzis D.A.** A unified approach for deriving optimal finite differences // J. Comput. Phys. — 2019. — Vol. 399. — Article № 108957. — https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.108957.
17. **Vargas A.M.** A finite difference scheme for the fFractional Laplacian on non-uniform grids // Commun. Appl. Math. Comput. — 2023. — https://doi.org/10.1007/s42967-023-00323-4.

18. **Balsara D.S., Bhoriya D., Shu Chi-Wang, Kumaret H.** Efficient finite difference WENO scheme for hyperbolic systems with non-conservative products // Commun. Appl. Math. Comput. — 2023. — Vol. 6. — P. 907–962. — DOI: 10.1007/s42967-023-00275-9.
19. **Wang Yu, Cai Min** Finite difference schemes for time-space fractional diffusion equations in one- and two-dimensions // Commun. Appl. Math. Comput. — 2023. — Vol. 5. — P. 1674–1696. — https://doi.org/10.1007/s42967-022-00244-8.
20. **Deng D., Jiang Y., Liang D.** High-order finite difference methods for a second order dual-phase-lagging models of microscale heat transfer // Appl. Math. Comput. — 2017. — Vol. 309. — P. 31–48. — https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.03.035.
21. **Brézis H.** Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications. — Masson, 1983.
22. **Njifenjou A., Nguena I.M.** A finite volume approximation for second order elliptic problems with a full matrix on quadrilateral grids: derivation of the scheme and a theoretical analysis // Intern. J. Finite. — 2006. — Vol. 3, № 2. — P. 64–93.
23. **Herbin R., Hubert F.** Benchmark on Discretization Schemes for Anisotropic Diffusion Problems on General Grids. — 2008. — https://hal.science/hal-00429843.

Поступила в редакцию 22 февраля 2024 г.
После исправления 28 мая 2024 г.
Принята к печати 26 августа 2024 г.