

УДК 533.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОИДАЛЬНОЙ БЕТЫ И СОБСТВЕННОЙ ИНДУКТИВНОСТИ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕГО УРАВНЕНИЯ ГРЭДА — ШАФРАНОВА ДЛЯ ТОКАМАКА С КРУГЛЫМ СЕЧЕНИЕМ

М. Азиф, А. Азиф*

Институт информационных технологий COMSATS, 54000 Лахор, Пакистан

* Междисциплинарный исследовательский центр биомедицинских материалов
Института информационных технологий COMSATS, 54000 Лахор, Пакистан
E-mails: dr.muhammd.asif@gmail.com, anila.asif@gmail.com

Проведено исследование полоидальной беты β_p и собственной индуктивности l_i путем решения простейшего уравнения Грэда — Шафранова с использованием условия равновесного состояния Соловьева для токамака НТ-7 с круговым сечением. Измерения полоидальной беты и собственной индуктивности выполнены с помощью диамагнитного и компенсационного контуров в сочетании с сигналами полоидальных магнитных датчиков. Представлены теоретические и экспериментальные результаты определения значений β_p и l_i . Показано, что расчетные значения полоидальной беты и собственной индуктивности зависят от типа разряда или тока плазмы.

Ключевые слова: полоидальная бета, собственная индуктивность, магнитогидродинамическая неустойчивость, уравнение Грэда — Шафранова.

Введение. Измерения полоидальной беты β_p и собственной индуктивности l_i важны для работы токамака. Многие параметры плазмы, такие как ее энергия, время удержания, профиль плотности тока и магнитогидродинамическая (МГД) неустойчивость, можно получить расчетным путем.

Для получения важной информации о форме плазмы, коэффициента безопасности, суммы средней полоидальной беты β_p и собственной индуктивности l_i в токамаке проводятся внешние магнитные измерения [1]. Существуют методы получения параметров плазмы на основе результатов внешних магнитных измерений. Эффективный метод восстановления формы плазмы и линейных интегралов пограничного полоидального магнитного поля на основе внешних магнитных измерений предложен в [2]. В соответствии с этим методом распределение тока плазмы аппроксимируется с использованием нескольких токов накала. В [3] ток плазмы моделируется с помощью распределенных источников. Для нахождения лучшей аппроксимации профиля плотности тока нелинейное уравнение Грэда — Шафранова решается несколько раз. Как известно, аналитические решения уравнения Грэда — Шафранова очень важны при проведении теоретических исследований равновесной плазмы, процесса переноса и МГД-устойчивости [4, 5]. При этом часто используется известное условие равновесного состояния Соловьева [6], в том числе в качестве теста численных программ, предназначенных для нахождения более общих решений. Однако решения, полученные с использованием условия равновесного состояния Соловьева [6, 7], имеют много

ограничений либо по форме (эллиптическая), либо по току плазмы, который обычно зависит от полоидальной беты β_p .

Существующие точные решения получены для различных профилей плотности тока или различных функционалов источников функций. Простое аналитическое решение неоднородного уравнения Грэда — Шафранова, соответствующее источникам функциям, линейным по ψ , и зависящее от шести параметров, получено в [8]. Форму плазмы можно описать четырьмя параметрами, для которых в прямоугольной области выбираются фиксированные граничные условия. При этом форма профиля тока плоская. В качестве двух других свободных параметров можно выбрать ток плазмы I_p и полоидальную бету β_p . В [9] представлено простейшее решение уравнения Грэда — Шафранова, которое является известным условием равновесного состояния Соловьева [6] и имеет пять параметров. В настоящей работе используется простейшее решение уравнения Грэда — Шафранова [9], зависящее от пяти параметров, которые могут быть определены из заданных граничных условий для круговой области с учетом значения тока плазмы в токамаке.

В данной работе анализируется возможность выбора распределения тока для интерпретации результатов магнитных измерений и непосредственно рассчитываются полоидальная бета β_p и собственная индуктивность l_i на основе решения уравнения Грэда — Шафранова [10–12] и свойств дискретных магнитных катушек [13]. Уравнение Грэда — Шафранова решается с использованием линейных источников функций и заданных граничных условий для кругового сечения токамака НТ-7 [13] при изменении меньшего радиуса плазмы. Решение содержит три величины (ток плазмы I_p , меньший радиус плазмы a и величину $\beta_p + l_i/2$), которые являются входными данными. Эти величины измеряются катушкой Роговского, отклоняющей катушкой и набором дискретных магнитных катушек [13] соответственно. В соответствии с определением полоидальной беты β_p и собственной индуктивности l_i [11, 14] указанные три величины используются в выражении для функции полоидального потока в решении, полученном в данной работе. Затем определяется зависимость параметров плазмы от времени для типичных разрядов в токамаке НТ-7 с круговым сечением (большой радиус 1,22 м, меньший радиус 0,27 м, напряженность тороидального поля $1,0 \div 2,5$ Тл, ток плазмы $100 \div 250$ кА, время разряда приблизительно 300 с, плотность электронов $(1 \div 6) \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$). На рис. 1, 2 показаны диамагнитный и компенсационный контуры, а также схема магнитной сборки.

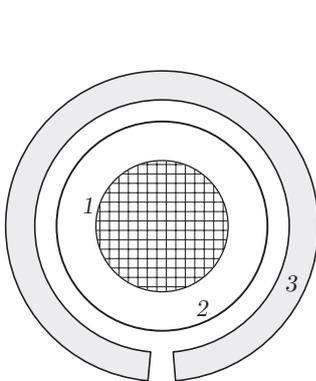


Рис. 1

Рис. 1. Диамагнитный и компенсационный контуры:

1 — плазма, 2 — диамагнитный контур, 3 — компенсационный контур

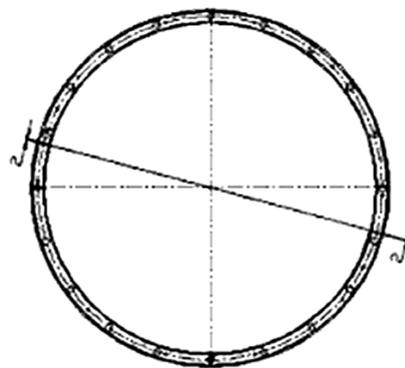
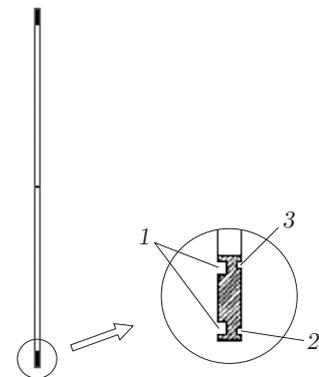


Рис. 2

Рис. 2. Структура магнитной сборки:

1 — компенсационный контур, 2 — диамагнитный контур 1, 3 — диамагнитный контур 2



Полоидальная бета β_p и собственная индуктивность l_i определяются с использованием простейшего решения уравнения Грэда — Шафранова с учетом условия равновесного состояния Соловьева для токамака НТ-7 с круговым сечением. Полоидальная бета β_p и собственная индуктивность l_i измеряются с использованием диамагнитного и компенсационного контуров в сочетании с сигналами полоидальных магнитных датчиков. В данной работе получены теоретические и экспериментальные значения β_p и l_i .

1. Обобщенное уравнение Грэда — Шафранова. Уравнения Максвелла и уравнение баланса сил МГД в цилиндрических координатах (R, Z) сводятся к двумерному нелинейному эллиптическому уравнению в частных производных или к уравнению Грэда — Шафранова [7]. Для получения обобщенного уравнения Грэда — Шафранова можно использовать ту же процедуру, что и в линейном случае [10]:

$$\Delta^* \psi = \mu_0 R J_\varphi = -\mu_0 (\gamma - 1) R^2 \frac{du(\psi)}{d\psi} - F(\psi) \frac{dF(\psi)}{d\psi}. \quad (1)$$

Здесь

$$\Delta^* = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$u(\psi)$, $F(\psi)$ — свободные функции; μ_0 — проницаемость вакуума; J_φ — плотность тока тороидальной плазмы; u — внутренняя энергия, которая является функцией потока.

2. Решение уравнения Грэда — Шафранова. В осесимметричной системе координат магнитное поле целесообразно представить в форме

$$B = F \nabla \varphi + \nabla \psi \times \nabla \varphi,$$

где φ — игнорируемый угол в цилиндрической системе координат (R, φ, Z) ; F , ψ — осесимметричные скалярные функции: F — функция потока, соответствующая полоидальному току в системе, ψ — полоидальный поток, деленный на 2π . Следует отметить, что тороидальное поле не определяется уравнением Грэда — Шафранова, оно определяется с точностью до коэффициента безопасности q . При этом не изменяются формы поверхностей потока и профилей внутренней энергии, плотность тока, коэффициент безопасности и т. д.

Простейшее решение уравнения (1) можно найти, полагая

$$\mu_0 (\gamma - 1) \frac{\partial u}{\partial \psi} = -A_1, \quad F \frac{\partial F}{\partial \psi} = A_2, \quad (2)$$

где A_1 , A_2 — константы. Очевидно, что все возможные формы профилей плотности тока определяются величиной $J_\varphi = RA_1 - A_2/R$.

С учетом ограничений, накладываемых уравнением (2), уравнение Грэда — Шафранова сводится к уравнению

$$\Delta^* \psi = R^2 A_1 - A_2. \quad (3)$$

Решение неоднородного уравнения представляется в виде [8]

$$\psi = \psi_0 + A_1 R^4 / 8 - A_2 Z^2 / 2,$$

где ψ_0 — решение однородного уравнения $\Delta^* \psi = 0$.

Если предположить, что плазма симметрична в вертикальном направлении, то ее форму можно описать с использованием четырех параметров: параметров крайних экваториальных точек R_i и R_0 и координат высшей точки R_t , Z_t или с использованием эквивалентных параметров: большего радиуса $R_0 = (R_i + R_o)/2$, меньшего радиуса $a = (R_o - R_i)/2$, удлинения $\varkappa_0 = Z_t/a$ и треугольности $\delta = (R_o - R_t)/2$. Простейшее решение уравнения (3) имеет вид [8, 10]

$$\psi = c_1 + c_2 R^2 + c_3 (R^4 - 4R^2 Z^2) + c_4 (R^2 \ln(R) - Z^2) + A_1 R^4 / 8 - A_2 Z^2 / 2. \quad (4)$$

Для определения пяти коэффициентов, входящих в уравнение (4), необходимо иметь пять уравнений. Предполагается, что на границе внутренняя энергия обращается в нуль, т. е. $\psi(R, Z)|_b = 0$ [8, 9].

С учетом уравнения (4) и граничных условий при $R = R_0 \pm a$, $Z = 0$ и $R = R_t$, $Z = Z_t$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\psi(R_i, 0) &= c_1 + c_2 R_i^2 + c_3 R_i^4 + c_4 R_i^2 \ln(R_i) + A_1 R_i^4 / 8 = 0, \\ \psi(R_o, 0) &= c_1 + c_2 R_o^2 + c_3 R_o^4 + c_4 R_o^2 \ln(R_o) + A_1 R_o^4 / 8 = 0,\end{aligned}\quad (5)$$

$$\psi(R_t, Z_t) = c_1 + c_2 R_t^2 + c_3 (R_t^4 - 4R_t^2 Z_t^2) + c_4 (R_t^2 \ln(R_t) - Z_t^2) + A_1 R_t^4 / 8 - A_2 Z_t^2 / 2 = 0.$$

Предполагается, что плазма удерживается внутри идеально проводящей тороидальной поверхности с круговым сечением радиусом a , поэтому нормальная компонента магнитного поля равна нулю:

$$\frac{1}{R} \frac{d\psi(R_t, z_t)}{dR} = 2c_2 + 4c_3 (R_t^2 - 2Z_t^2) + c_4 (2 \ln(R_t) + 1) + \frac{A_1}{2} R_t^2 = 0. \quad (6)$$

Ток плазмы можно точно измерить с помощью катушки Роговского [13]. Выражение для тока плазмы можно записать в виде

$$I_p = \int J_\varphi dR dZ = \frac{1}{\mu_0 R} \int (R^2 A_1 + A_2) dR dZ. \quad (7)$$

Сначала проще решить уравнение для плазмы с единичным током и единичным большим радиусом, а затем использовать приведенные выше отношения масштабирования для получения искомого равновесного состояния. Однако даже в этом простейшем случае можно получить только численные решения уравнений (5)–(7). Коэффициенты вычислялись численно, если известны параметры плазмы.

В данной работе используется параметр $\beta_p + l_i/2$ [11], поскольку этот параметр для суперпроводящего токамака НТ-7 [13] с круговым сечением [15] может быть получен на основе экспериментальных данных с использованием дискретных магнитных датчиков:

$$\beta_p + \frac{l_i}{2} = \frac{\left(\oint dl\right)^2}{(2\pi\mu_0 I_p)^2 \iint R dR dZ} \left(2,5A_1 \iint \psi(R, Z) R dR dZ + 0,5A_2 \iint \frac{\psi(R, Z)}{R} dR dZ\right).$$

Сумма полоидальной беты и половины собственной индуктивности плазмы $\beta_p + l_i/2$ равна [13, 16–19]

$$\beta_p + \frac{l_i}{2} = 1 + \ln \frac{a}{b} + \frac{\pi R_0}{\mu_0 I_0} (\langle B_\theta \rangle + \langle B_n \rangle).$$

Здесь

$$\langle B_\theta \rangle = B_\theta|_{\theta=0} - B_\theta|_{\theta=\pi}, \quad \langle B_n \rangle = B_n|_{\theta=\pi/2} - B_n|_{\theta=3\pi/2},$$

b — минимальный радиус камеры. Локальные магнитные поля B_θ , B_n были измерены магнитными датчиками [13] при указанных выше значениях угла θ .

3. Определение полоидальной беты и собственной индуктивности на основе решения уравнения Грэда — Шафранова для токамака НТ-7. Круговое сечение токамака НТ-7 [20] имеет большой радиус $R_0 = 1,22$ м, малый радиус $a = 0,27$ м, при этом $R_i = R_0 - a$, $R_o = R_0 + a$, $R_t = R_0$, $Z_t = a$. В 2004 г. с использованием новых графитовых ограничителей в токамаке НТ-7 была получена плазма, существовавшая в течение 240 с [20].

Предположим, что константа A_2 равна нулю. В этом случае из уравнений (5)–(7) получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\psi(R_0, 0) &= c_1 + 1,4884c_2 + 1,7813c_3 + 0,2231c_4 + 0,2769A_1 = 0, \\ \psi(R_0 - a, 0) &= c_1 + 0,9025c_2 + 0,8145c_3 - 0,04629c_4 + 0,10118A_1 = 0, \\ \psi(R_0 + a, 0) &= c_1 + 2,2201c_2 + 4,9288c_3 + 0,8853c_4 + 0,6161A_1 = 0, \\ \frac{1}{R} \frac{d\psi(1,22, 0,27)}{dR} &= 2c_2 + 5,3704c_3 + 1,3977c_4 + 0,7442A_1 = 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Уравнение (7) содержит интеграл, который был получен для суперпроводящего тока-мака НТ-7:

$$\mu_0 I_p = A_1 \int_{R_0-a}^{R_0+a} R dR \int_{-\sqrt{a^2-(R-R_0)^2}}^{\sqrt{a^2-(R-R_0)^2}} dz.\tag{9}$$

Вычислив интеграл в (9), получаем

$$\begin{aligned}A_1(\pi a^2 R_0 - 4a^3/3) &= 0,2532A_1 = \mu_0 I_p; \\ A_1 &= 3,952\mu_0 I_p.\end{aligned}\tag{10}$$

Таким образом, из уравнений (8) с учетом (10) получаем выражения для коэффициентов c_1 , c_2 , c_3 , c_4 :

$$c_1 = 0,3094\mu_0 I_p, \quad c_2 = -0,6768\mu_0 I_p, \quad c_3 = -0,1544\mu_0 I_p, \quad c_4 = -0,5413\mu_0 I_p.$$

Подставляя эти коэффициенты в уравнение (4), имеем

$$\psi = \mu_0 I_p (0,3094 - 0,6768R^2 - 0,1544(R^4 - 4R^2 Z^2) - 0,5413(R^2 \ln(R) - Z^2) + 0,492R^4).\tag{11}$$

Выражение для магнитного потока можно получить из уравнения (11). Собственная индуктивность определяется следующим образом [11, 14]:

$$l_i = \frac{\left(\oint dl\right)^2 \iint \psi J_\varphi dR dZ}{2\pi\mu_0 I_p^2 \iint R dR dZ}.$$

Выражение для собственной индуктивности с учетом условия равновесного состояния Соловьева имеет вид [6, 11, 14]

$$l_i = \frac{\left(\oint dl\right)^2}{(2\pi\mu_0 I_p)^2 \iint R dR dZ} \left(A_1 \iint \psi(R, Z) R dR dZ + A_2 \iint \frac{\psi(R, Z)}{R} dR dZ \right).$$

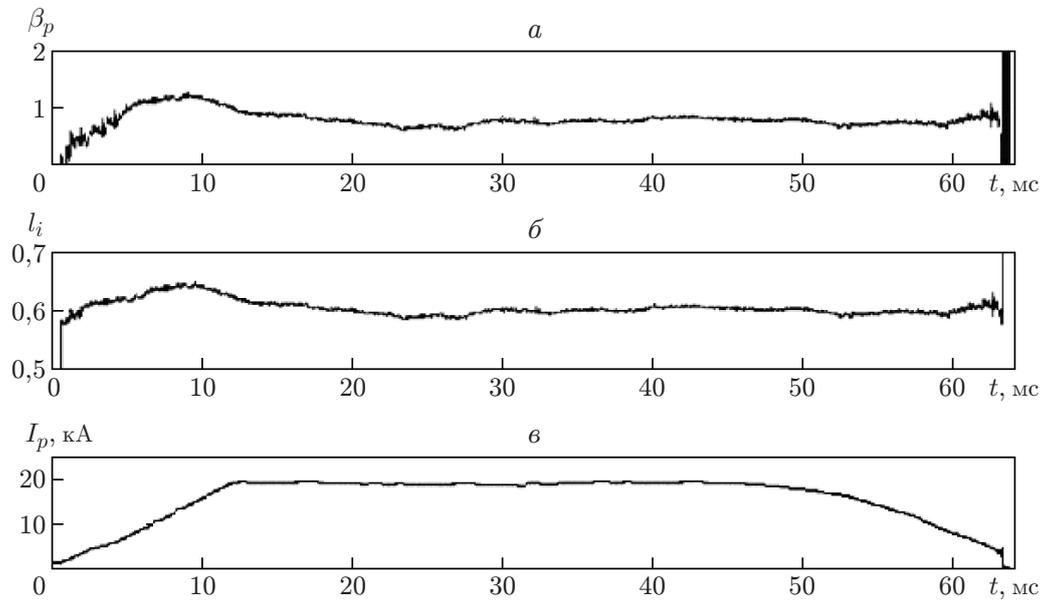


Рис. 3. Расчетные зависимости полоидальной беты (*a*), собственной индуктивности (*б*) и тока плазмы (*в*) от времени при омическом разряде в круговом сечении токамака НТ-7

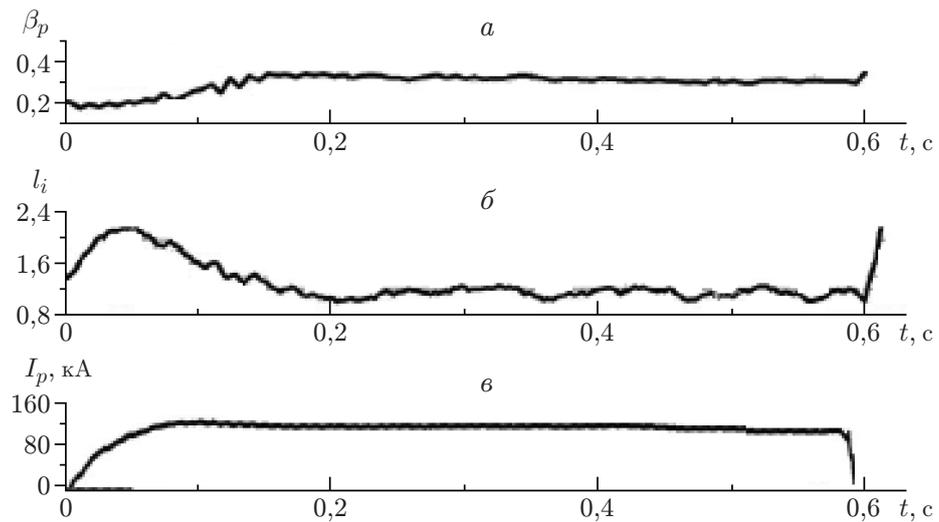


Рис. 4. Экспериментальные зависимости полоидальной беты (*a*), собственной индуктивности (*б*) и тока плазмы (*в*) от времени при омическом разряде в круговом сечении токамака НТ-7

Также с учетом условия равновесного состояния Соловьева можно найти полоидальную бету [6, 11, 14]:

$$\beta_p = \frac{\left(\oint dl\right)^2}{(2\pi\mu_0 I_p)^2 \iint R dR dZ} 2A_1 \iint \psi(R, Z) R dR dZ.$$

Все двойные интегралы в этих уравнениях берутся по полной площади сечения столба плазмы в круговом сечении токамака НТ-7.

Расчетные зависимости полоидальной беты и собственной индуктивности от времени показаны на рис. 3. На рис. 4 представлены экспериментальные зависимости $\beta_p(t)$, $l_i(t)$, $I_p(t)$ в случае омического разряда в круговом сечении токамака НТ-7. Из рис. 3, 4 следует, что расчетные значения полоидальной беты и собственной индуктивности зависят от типа разряда или тока плазмы.

Заключение. В работе с использованием решения простейшего уравнения Грэда — Шафранова и условия равновесного состояния Соловьева для токамака НТ-7 с круговым сечением определены полоидальная бета β_p и собственная индуктивность l_i . С помощью диамагнитного и компенсационного контуров в сочетании с сигналами полоидальных магнитных датчиков проведены измерения полоидальной беты β_p и собственной индуктивности l_i . Получены теоретические и экспериментальные значения β_p и l_i . Показано, что расчетные значения полоидальной беты и собственной индуктивности зависят от типа разряда или тока плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lao L. L., John H. St., Stambaugh R. D., et al.** Reconstruction of current profile parameters and plasma shapes in tokamaks // Nuclear Fusion. 1985. V. 25. P. 1611–1618.
2. **Swain D. W., Neilson G. H.** An efficient technique for magnetic analysis of non-circular, high-beta tokamak equilibria // Nuclear Fusion. 1982. V. 22. P. 1015–1030.
3. **Luxon J. L., Brown B. B.** Magnetic analysis of non-circular cross-section tokamaks // Nuclear Fusion. 1982. V. 22. P. 813–822.
4. **Grad H., Rubin H.** Theoretical and experimental aspects of controlled nuclear fusion // Proc. of the 2nd United nat. conf. on the peaceful uses of atomic energy. Geneva, 1958. V. 31. P. 190–197.
5. **Solov'ev L. S.** The theory of hydromagnetic stability of toroidal plasma configurations // Zh. Eksper. Teoret. Fiz. 1967. V. 53. P. 626–633.
6. **Asif M.** Study of plasma displacement and $B_p + l_i/2$ by the simplest Grad — Shafranov equation solution for circular cross section tokamak // Rev. Mexicana Fís. 2013. V. 59. P. 517–520.
7. **Freidberg J. P.** Ideal magnetohydrodynamics. N. Y.: Plenum, 1985. P. 162–167.
8. **Zheng S. B., Wootton A. J., Solano E. R.** Analytical tokamak equilibrium for shaped plasmas // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. P. 1176–1178.
9. **Rahimirad A., Emami M., Ghoranneviss M., Salar Elahi A.** Demonstration of Shafranov shift by the simplest Grad — Shafranov equation solution in IR-T1 tokamak // J. Fusion Energy. 2010. V. 29. P. 73–75.
10. **Asif M.** Study of Shafranov shift by the simplest Grad — Shafranov equation solution for HT-7 superconducting tokamak // Magnetohydrodynamics. 2011. V. 47. P. 11–16.
11. **Rahimi-Rad A., Ghoranneviss M.** Calculation of internal inductance and poloidal beta using Solovev's assumption in a circular cross section tokamak // J. Fusion Energy. 2013. V. 32. P. 405–409.

12. **Salar Elahi A., Ghoranneviss M., Emami M., Rahimi Rad A.** Theoretical and experimental approach in poloidal beta and internal inductance measurement on IR-T1 tokamak // J. Fusion Energy. 2009. V. 28. P. 346–349.
13. **Shen B., Sun Y. W., Wan B. N., Qian J. P.** Poloidal beta and internal inductance measurement on HT-7 superconducting tokamak // Rev. Sci. Instrum. 2007. V. 78, iss. 9. 093501.
14. **Atanasiu C. V., Günter S., Lackner K., Miron I. G.** Analytical solutions to the Grad — Shafranov equation // Phys. Plasmas. 2004. V. 11. P. 3510–3518.
15. **Freidberg J. P., Graf M., Niemiszewski A., et al.** Why β_p and l_i cannot be separately measured in a near circular tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. 1993. V. 35. P. 1641–1648.
16. **Mukhovatov V. S., Shafranov V. D.** Plasma equilibrium in a tokamak // Nuclear Fusion. 1971. V. 11. P. 605–634.
17. **Ninomiya H., Suzuki N.** Estimations of plasma position and $\beta_p + l_i/2$ from magnetic measurements under high- β conditions in JFT-2 // Japan. J. Appl. Phys. 1982. V. 21. P. 1323–1327.
18. **Asif M., Gao X., Li J. G., et al.** Study of MHD activity in the HT-7 superconducting tokamak // Phys. Lett. A. 2005. V. 342. P. 175–180.
19. **Asif M., Gao X., HT-7 Team.** Analysis of disruptive discharges during density limit experiments on the HT-7 tokamak // Brazilian J. Phys. 2006. V. 36. P. 190–193.
20. **Asif M., Gao X., Li J., et al.** Plasma density behavior with new graphite limiters in the hefei tokamak-7 // Phys. Plasmas. 2005. V. 12. 082502-6.

Поступила в редакцию 18/II 2013 г.
