Теплофизика и аэромеханика, 2019, том 26, № 4

УДК 532.517.4

Численное моделирование многокомпонентного слоя смешения с твердыми частицами

А.П. Макашева, А.Ж. Найманова

Институт математики и математического моделирования МОиН РК, Алматы, Казахстан

E-mail: altyn-mak@mail.ru, alt_naimanova@yahoo.com

Работа посвящена численному моделированию сверхзвукового плоского слоя смешения многокомпонентных газов с вдувом частиц на границе раздела потоков. Предложен алгоритм решения системы уравнений Навье–Стокса для газовой фазы и системы обыкновенных дифференциальных уравнений для твердых частиц на основе эйлерово-лагранжевого представления. Предполагается, что турбулентное течение является квазидвумерным, и исходная система решается с использованием двумерного DNS-подхода без привлечения дополнительных замыкающих моделей турбулентности. Проведено детальное изучение влияния газовой фазы, в частности, входных чисел Маха и точек впрыска частиц, на закономерности распределения частиц и захват их когерентными структурами. Обнаружено усиливающее влияние центробежной силы на дисперсию частиц с увеличением конвективного числа Маха. Установлено квазиравновесное состояние с газовым потоком частиц малых размеров.

Ключевые слова: двухфазный поток, твердые частицы, многокомпонентный газ, уравнения Навье–Стокса, эйлерово–лагранжев метод.

Введение

Турбулентные сдвиговые слои смешения с наличием частиц используются во многих практических приложениях с целью улучшения процесса горения топлива в камерах сгорания. Двухфазные потоки, включающие твердые, капельные или пузырьковые суспензии, интенсивно изучаются как экспериментально [1–3], так и путем численного моделирования [4–6].

Численное моделирование газовых смесей с твердыми частицами выполняется с помощью системы уравнений Навье–Стокса в части изучения газов, а для изучения поведения частиц используется подход Эйлера или метод Лагранжа с детальным расчетом параметров каждой частицы или пакета частиц. Так, в работе [7] с использованием эйлерова подхода было проведено исследование структуры течения и процесса распространения дисперсной примеси в затопленной газовой струе в широком диапазоне размеров и материала частиц. Было получено, что с ростом размера и плотности частиц проявляются эффекты их накопления, т.е. наблюдается режим шнурования в приосевой области струи. В работах [8, 9] для моделирования дисперсии мелких сферических твердых частиц в турбулентном слое смешения использовался эйлеров подход для газов и лагранжев метод для частиц. В результате детального численного анализа было установлено, что сдвиговый эффект приводит к дисперсии частиц в направлении основного потока. Достаточно полное сравнение применения эйлерова и лагранжева методов приведено в работе [10], где численно моделировалась динамика дисперсной фазы в закрученном газовом потоке за внезапным расширением трубы. Было получено, что эйлеров метод показывает заниженное на 15–20 % значение концентрации частиц по сравнению с лагранжевым.

В работе [11] численно моделировалось распространение частиц в плоском сдвиговом турбулентном слое смешения для различных диаметров частиц. Для течения газовой фазы использовался эйлеров подход, для частиц — лагранжев. Было установлено, что частицы малого и среднего размеров захватываются вертикальными вихревыми структурами, тогда как крупные частицы не увлекаются вихрями. В работе [12] исследовалось влияние крупномасштабных вихревых структур на распространение частиц при низких, средних и высоких числах Стокса. Движение несущей среды здесь моделировалось уравнениями Навье–Стокса, а перемещение частиц дисперсной фазы определялось лагранжевым подходом. Было выявлено, что частиц, движущихся из верхнего потока в нижний, больше, чем движущихся из нижнего в верхний, что обуславливалось асимметричными вихревыми структурами, развивающимися в пространственном слое смешения. Следует отметить, что в указанных работах в основном изучалась проблема взаимодействия частиц с однокомпонентным газом, тогда как вопросы взаимодействия частиц с многокомпонентным газом в сдвиговом слое практически не рассматривались.

В настоящей работе численно моделируется плоское сверхзвуковое турбулентное течение в слое смешения многокомпонентной газовой смеси с вдувом твердых частиц. Для моделирования квазидвумерного турбулентного слоя смешения используется двумерная DNS (Direct Numerical Simulation) модель. Исследуется влияние расположения щелей вдуваемых частиц и входных чисел Маха на распространение твердых частиц в сверхзвуковом турбулентном потоке.

Постановка задачи

Рассматривается плоское течение слоя смешения, образованное двумя потоками многокомпонентных газов, т.е. поверхностями раздела двух параллельных потоков, с наличием вдува твердых частиц (рис. 1).

Основные уравнения

Математическая модель включает в себя два этапа. На первом этапе для описания уравнений импульса, концентраций газовых компонентов и энергии газовой фазы используется эйлеров подход, на втором этапе для описания движения твердых частиц вдоль их траекторий с учетом влияния несущей среды на дисперсную фазу применяется лагранжев подход.

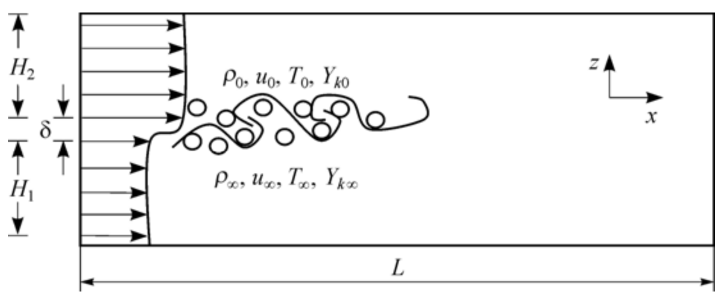

Рис. 1. Схема течения.

Модель газовой фазы

Исходной является система двумерных уравнений Навье–Стокса для многокомпонентной газовой смеси, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{U}}}{\partial t}+\frac{\partial\left(\vec{\boldsymbol{E}}-\vec{\boldsymbol{E}}_v\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\vec{\boldsymbol{F}}-\vec{\boldsymbol{F}}_v\right)}{\partial z}=0, \tag{1}$$

здесь векторы $\vec{\boldsymbol{U}}, \vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{F}}$ имеют вид

$$\vec{\boldsymbol{U}}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho w\\ E_t\\ \rho Y_k\end{pmatrix}\qquad \vec{\boldsymbol{E}}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uw\\ \left(E_t+p\right)u\\ \rho uY_k\end{pmatrix}\qquad \vec{\boldsymbol{F}}=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho w^2+p\\ \left(E_t+p\right)w\\ \rho wY_k\end{pmatrix},$$

а $\vec{\boldsymbol{E}}_v, \vec{\boldsymbol{F}}_v$ содержат диссипативные члены вида

$$\vec{\boldsymbol{E}}_v=\left(0,\tau_{xx},\tau_{xz},u\tau_{xx}+w\tau_{xz}-q_x,J_{kx}\right)^{\mathrm{T}},\quad \vec{\boldsymbol{F}}_v=\left(0,\tau_{xz},\tau_{zz},u\tau_{xz}+w\tau_{zz}-q_z,J_{kz}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Тензоры вязких напряжений и потоки тепла принимают следующий вид:

$$\tau_{xx}=\frac{\mu_1}{\mathrm{Re}}\left(2u_x-\frac{2}{3}\left(u_x+w_z\right)\right),\quad \tau_{zz}=\frac{\mu_1}{\mathrm{Re}}\left(2w_z-\frac{2}{3}\left(u_x+w_z\right)\right),$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\frac{\mu_1}{\mathrm{Re}}\left(u_x+w_x\right),$$

$$q_z=\frac{\mu_1}{\mathrm{Pr\,Re}}\cdot\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{1}{\gamma_\infty \mathrm{M}_\infty^2}\sum_{k=1}^{N}h_k J_{zk},\quad q_x=\frac{\mu_1}{\mathrm{Pr\,Re}}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{1}{\gamma_\infty \mathrm{M}_\infty^2}\sum_{k=1}^{N}h_k J_{xk},$$

$$J_{kx}=-\frac{\mu_1}{\mathrm{Sc\,Re}}\cdot\frac{\partial Y_k}{\partial x},\quad J_{kz}=-\frac{\mu_1}{\mathrm{Sc\,Re}}\cdot\frac{\partial Y_k}{\partial z},$$

где ρ — плотность, u, w — компоненты скорости, p — давление, E_t — полная энергия, Y_k — массовая концентрация k-й компоненты, W_k — молекулярный вес k-й компоненты ($k=1,\dots,N,$ N — число компонент смеси газов), Re — число Рейнольдса, Pr — число Прандтля, Sc — число Шмидта.

Уравнение состояния смеси совершенных газов записывается как

$$p=\frac{\rho T}{\gamma_\infty \mathrm{M}_\infty^2 W},$$

где $W=\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{Y_k}{W_k}\right)^{-1}$ — молярный вес смеси всех газов, причем $\sum\limits_{k=1}^{N}Y_k=1.$

Уравнения для полной энергии имеют вид

$$E_t=\frac{\rho h}{\gamma_\infty \mathrm{M}_\infty^2}-p+\frac{1}{2}\rho\left(u^2+w^2\right),$$

где $h=\sum\limits_{k=1}^{N}Y_k h_k$ — удельная энтальпия смеси, $h_k=h_k^0+\int\limits_{T_0}^{T}c_{pk}dT$ — удельная энтальпия k-й компоненты.

Удельные теплоемкости при постоянном давлении для каждой компоненты c_{pk} вычисляются через молярные удельные теплоемкости C_{pk} по формуле

$$c_{pk} = C_{pk} / W,$$

где C_{pk} определяются по экспериментальным данным при помощи полиномиальной интерполяции четвертого порядка по температуре:

$$C_{pk} = \sum_{i=1}^{5} \bar{a}_{ki} T^{(i-1)}, \quad \text{где} \quad \bar{a}_{jk} = a_{jk} T_{\infty}^{\;j-1}.$$

Численные значения эмпирических констант a_{jk} взяты из таблицы JANAF [13] при нормальном давлении (p = 1 атм) и стандартной температуре T = 293 K.

Молекулярная вязкость смеси определяется по формуле Уилке [14]

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i \mu_i}{\Phi_i},$$

где функция Φ_i задается в виде

$$\Phi_i = \sum_{r=1}^{N} X_r \left[1 + \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_r}} \left(\frac{W_r}{W_i} \right)^{1/4} \right]^2 \left[\sqrt{8} \sqrt{1 + \frac{W_i}{W_r}} \right]^{-1},$$

μ_i — молекулярная вязкость i-ой компоненты, которая вычисляется по формуле

$$\mu_i = \frac{\mu_{i\infty}}{\mu_{\Lambda\infty}} \sqrt{W_i T_{\infty}}, \tag{2}$$

где $\mu_{i\infty} = 2{,}6693 \cdot 10^{-7} \dfrac{\sqrt{W_{i\infty} T_{\infty}}}{\sigma_i^2 \Omega_i^{(2,2)*}\left(T_i^*\right)}$, $\mu_{\Lambda\infty} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{X_i \mu_{i\infty}}{\Phi_i}$, σ_i — диаметр столкновения i-ой компоненты, значения компонент приведены в работе [14]: $\sigma_1 = 2{,}63$, $\sigma_2 = 3{,}30$, $\sigma_3 = 3{,}5$, $\sigma_4 = 3{,}050$, $\sigma_5 = 0{,}50$, $\sigma_6 = 0{,}560$, $\sigma_7 = 3{,}50$; $\Omega_i^{(2,2)*}$ — интеграл соударений для переноса импульса, $T_i^* = kT/\varepsilon_i$ — характеристическая температура, ε_i/k — параметр потенциальной функции межмолекулярного взаимодействия. Согласно работе [13] $\Omega_i^{(2,2)*}\left(T_i^*\right) = 1$.

Модель дисперсной фазы

В представленном исследовании принимаются следующие допущения для течений газа с частицами: частицы представляют собой сферы одинакового размера; взаимодействие частиц между собой не учитывается; движение частиц не влияет на течение газа; силы Сэфмена, Магнуса и тяжести не учитываются, так как рассматриваются алюминиевые частицы малых размеров. В соответствии с этими допущениями уравнения траектории движения $\left(\vec{x}_\text{p}\right)$ и скорости $\left(\vec{u}_\text{p}\right)$ частиц записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \vec{\boldsymbol{x}}_\text{p} = \vec{\boldsymbol{u}}_\text{p}, \quad m \frac{\partial}{\partial t} \vec{\boldsymbol{u}}_\text{p} = F_\text{p},$$

где $m = \frac{4}{3} \pi r_\text{p}^3 \rho_\text{p}$ — масса сферической твердой частицы, F_p — сила сопротивления, действующая со стороны газа на частицу радиусом r_p, которая определяется как

$$F_p = C_d \frac{1}{2}\pi r_p^2 \rho\left|\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}_p\right|\left(\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}_p\right),$$

здесь C_D — коэффициент сопротивления, μ — динамический коэффициент вязкости газа.

Для случая обтекания частицы турбулентным потоком при $\mathrm{Re} > 1$ используются различные формулы коэффициента сопротивления C_D (основанные на формуле Стокса $C_D = 24/\mathrm{Re}$) с учетом свойств газа и режима движения [15−17]. Наиболее известной является формула, предложенная в работе [17], которая также применяется в настоящей работе в виде:

$$C_D = \begin{cases} \dfrac{24}{\mathrm{Re}_p}\left(1+\dfrac{1}{6}\mathrm{Re}_p^{2/3}\right), & \mathrm{Re}_p \le 1000, \\ 0{,}424, & \mathrm{Re}_p > 1000, \end{cases}$$

где $f = 1+\frac{1}{6}\mathrm{Re}_p^{1/3}$ — поправочный коэффициент, корректирующий коэффициент сопротивления C_D при высоких значениях числа Рейнольдса, $\mathrm{Re}_p = \dfrac{2\rho\left|\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{u}}_p\right|}{\mu}$ — число Рейнольдса, построенное по радиусу частицы r_p.

Процесс теплообмена частиц с несущей фазой учитывается следующим образом:

$$m_p C_p \frac{dT_p}{dt} = 2\pi r_p K_{\mathrm{conv}}\left(T - T_p\right)\mathrm{Nu}_p,$$

где m_p — масса частицы p-ой компоненты, $\rho_p = m_p \Big/ \left(4\pi r_p^3/3\right)$ — плотность твердой частицы p-ой компоненты, $K_{\mathrm{conv}} = \left(\mu c_p\right)\Big/\mathrm{Pr}_p$ — коэффициент конвективного теплообмена между частицей и газом при выделении газов.

Обезразмеривание

Основные уравнения (1), (2) записаны в безразмерной форме. В качестве параметров обезразмеривания приняты следующие характерные величины верхнего потока: $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty, Y_{k\infty}$; давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, характерным параметром длины является входная толщина завихренности $\delta_\omega = \dfrac{\left(u_\infty - u_0\right)}{\left(\partial u/\partial z\right)_{\max}}$. Масштаб времени определяется как $t \approx \delta_\omega / u_\infty$. Для дисперсной фазы в качестве обезразмеривания приняты те же параметры, что и для газовой фазы.

Начальные и граничные условия

На входе параметры потоков газов задаются следующим образом:
для нижнего потока

$$u = \mathrm{M}_0\sqrt{\gamma_0 R T_0/W_0},\ w = w_0,\ p = p_0,\ T = T_0,\ Y_k = Y_{k0} \ \text{при}\ x = 0,\ 0 \le z < H_1,$$

для верхнего потока

$$u = \mathrm{M}_\infty\sqrt{\gamma_\infty R T_\infty/W_\infty},\ w = w_\infty,\ p = p_\infty,\ T = T_\infty,\ Y_k = Y_{k\infty} \ \text{при}\ x = 0,\ H_1 + \delta \le z < H_2,$$

где $H_1 + \delta + H_2$ — высота рассматриваемой области. В тонком слое смешения вышеуказанные физические переменные определяются функцией гиперболического тангенса

$$\phi(z) = 0,5\left(\phi_0 + \phi_\infty\right) + 0,5\left(\phi_0 - \phi_\infty\right)\tanh\left(0,5z/\delta_\theta\right), \tag{3}$$

где $\phi = (u, w, Y_k, T)$, $\delta_\theta\left(x\right) = \int\limits_{H_1/2}^{H_2/2}\left(\rho\left(\tilde{u} - u_\infty\right)\left(u_0 - \tilde{u}\right)\Big/\left(\rho_\infty \Delta u^2\right)dz\right)$ — толщина потери импульса, $\tilde{u} = \left(u - u_\infty\right)\Big/\Delta u$ — средняя скорость газа. Начальные условия принимаются такими же, как и граничные условия на входе. На выходной, нижней и верхней границах задаются граничные условия неотражения, где потоки газов и пертурбации проходят границу, не отражаясь обратно [18].

При численном моделировании турбулентного сдвигового слоя одной из проблем является корректная постановка нестационарных граничных условий на входе для образования нестационарной крупномасштабной структуры слоя смешения. Отметим, что на данный момент граничные условия реализуются в основном тремя путями. Первый — введение на входе искусственных возмущений, полученных из линейной теории устойчивости, где учитываются частоты максимального естественного роста колебаний неустойчивого ламинарного сдвигового слоя (как правило, используется самая неустойчивая мода и две или три субгармоники). Второй — без введения возмущений: за счет несоответствия численных и физических граничных условий на входе, которые в некоторых случаях являются достаточным условием для генерирования малых возмущений. Третий — входные возмущения для моделирования конкретных частотных спектров вводятся из экспериментальных данных. Как правило, эти возмущения разрушают продольное распределение завихренности в слое смешения и нарушают гидродинамическое равновесие. В литературе достаточно полно описаны эти подходы, например, в работе [19].

В соответствии с вышесказанным на входе задаются граничные условия, в которых для полей скорости $\phi\left(z\right)$ добавляется случайная фаза ϕ_{distr} :

$$\phi = \phi\left(z\right) + \phi_{\text{distr}},$$

где

$$\phi_{\text{distr}} = \begin{cases} A \cdot \Delta U \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \alpha\right), & (4) \\ A \cdot \Delta\mathrm{U} \cdot \mathrm{Gaussian(z)} \cdot \sum\limits_{\mathrm{m}=0}^{3} \sin\left(2\pi f_m \cdot t + \alpha\right), & (5) \end{cases}$$

здесь $\phi\left(z\right)$ — функция гиперболического тангенса, определяемая формулой (3), A — амплитуда пертурбации, которая принимается из соотношения $A \cdot \Delta U$, где данное произведение должно равняться $0,2 - 0,3\,\%$ от максимальной скорости газов на входе; $\Delta U = (u_\infty - u_0)$ — разность входных скоростей, $\omega = \left(a_0 + a_\infty\right)\Big/\left(2\delta_\theta\right)$ — частота возмущения, a_0, a_∞ — скорости звука на входе, α — случайное число, Gaussian (z) — функция Гаусса, максимальное значение которой равно единице при $z = 0$, ее ширина $\pm 2\sigma$ принималась равной толщине вихревого слоя на входном участке; $f_m = 0,4446$ — основное неустойчивое волновое число, взятое из линейных теорий неустойчивости, и ее первые три субгармоники. Для возмущений ϕ_{distr} используется два подхода: в первом [19] для нестационарного возмущения принимается только одна синусоидальная мода, обусловленная одной частотой (4), во втором [20] возмущения производятся суммой трех гармоник (5). В обоих случаях в качестве основной принимается неустойчивая мода из линейной теории устойчивости.

Метод решения

Численное решение системы уравнений (1), т.е. газовой фазы, осуществляется в два этапа. На первом этапе вычисляются термодинамические параметры ρ, u, w, E_t, на втором определяются массовые концентрации Y_k, $k = \overline{1,7}$. Для более детального учета течения на входе в слое смешения, вводится сгущение сетки с помощью преобразований

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(z). \tag{6}$$

Алгоритм численного расчета основан на конечно-разностной ENO-схеме третьего порядка точности. Реализация ENO-схемы для двумерной системы уравнений (1) в обобщенных координатах представляется в форме

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial t} + \left(A^+ + A^-\right)\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}^m}{\partial \xi} + \left(B^+ + B^-\right)\frac{\partial \vec{\boldsymbol{F}}^m}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{E}}_{v1} + \tilde{\boldsymbol{E}}_{vm}\right)}{\partial \xi} + \frac{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{F}}_{v2} + \tilde{\boldsymbol{F}}_{vm}\right)}{\partial \eta}\right] = 0, \tag{7}$$

где $A = \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \vec{\boldsymbol{U}}}$, $B = \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{F}}}{\partial \vec{\boldsymbol{U}}}$ — матрицы Якоби, $\vec{\boldsymbol{E}}^m = \tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\boldsymbol{E}}_\xi + \vec{\boldsymbol{D}}_\xi$, $\vec{\boldsymbol{F}}^m = \tilde{\boldsymbol{F}} + \vec{\boldsymbol{E}}_\eta + \vec{\boldsymbol{D}}_\eta$ — модифицированные потоки в узловых точках (i, j), состоящих из исходных конвективных векторов $\tilde{\boldsymbol{E}}$, $\tilde{\boldsymbol{F}}$ (здесь $\tilde{\boldsymbol{U}} = \vec{\boldsymbol{U}}/J$, $\tilde{\boldsymbol{E}} = \xi_x\ \vec{\boldsymbol{E}}/J$, $\tilde{\boldsymbol{F}} = \eta_z\ \vec{\boldsymbol{F}}/J$, J — якобиан преобразования) и добавочных членов высокого порядка точности $\vec{\boldsymbol{E}}_\xi, \vec{\boldsymbol{D}}_\xi, \vec{\boldsymbol{E}}_\eta, \vec{\boldsymbol{D}}_\eta$, подробно описанных в работе [21]; $\tilde{\boldsymbol{E}}_{vm}$ и $\tilde{\boldsymbol{E}}_{v2}$ — диффузионные члены, содержащие смешанные и вторые производные.

После интегрирования система (7) принимает следующий вид:

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{U}}^{n+1} + \Delta t\left[\left(A^+ + A^-\right)\frac{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{E}}^{n+1} + \left(\vec{\boldsymbol{E}}_\xi + \vec{\boldsymbol{D}}_\xi\right)^n\right)}{\partial \xi} + \left(B^+ + B^-\right)\frac{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{F}}^{n+1}\left(\vec{\boldsymbol{E}}_\xi + \vec{\boldsymbol{D}}_\xi\right)^n\right)}{\partial \eta} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{E}}_{v2} + \tilde{\boldsymbol{E}}_{vm}\right)^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{F}}_{v2} + \tilde{\boldsymbol{F}}_{vm}\right)^{n+1}}{\partial \eta}\right]\right] = O\left(1/2\,\Delta t^2\right), \tag{8}$$

где $$A^{\pm} = R\Lambda_\xi R^{-1} = R\left(\frac{1 \pm \operatorname{sgn}\left(\Lambda_\xi\right)}{2}\right)R^{-1}, \quad B^{\pm} = T\Lambda_\eta T^{-1} = T\left(\frac{1 \pm \operatorname{sgn}\left(\Lambda_\eta\right)}{2}\right)T^{-1}.$$

Для построения неявного алгоритма решения уравнения (8) члены, содержащие вторые производные, представляются в виде суммы двух векторов, а векторы потоков со смешанными производными аппроксимируются явным образом со вторым порядком точности [21]. Линеаризация конвективных слагаемых осуществляется с использованием свойств однородности.

С использованием факторизации для формулы (8) получается следующее равенство:

1 шаг. $$\left[I + \Delta t\left\{(\hat{A}^+_{i-1/2}\Delta_- A^n_\xi + \hat{A}^-_{i+1/2}\Delta_+ A^n_\xi) + \Delta\frac{\mu_t \xi_x^2}{\operatorname{Re} J}\Delta\frac{1}{U_1^n}\right\}\right]\bar{\boldsymbol{U}}^* = \mathrm{RHS}^n_\xi + \mathrm{RHS}^n_\eta,$$

2 шаг. $$\left[I + \Delta t \left\{ (\hat{B}^{+}_{j-1/2}\Delta_{-}B^{n}_{\eta} + \hat{B}^{-}_{j+1/2}\Delta_{+}B^{n}_{\eta}) + \Delta\frac{\mu_t \eta_z^2}{\operatorname{Re} J}\Delta\frac{1}{U_1^n} \right\} \right] \tilde{\boldsymbol{U}}^{n+1} = \boldsymbol{U}^{*}, \tag{9}$$

$$\mathrm{RHS}^{n}_{\xi} = \hat{A}^{-}_{i+1/2j}\left[\left(\vec{\boldsymbol{E}}_{\xi} + \vec{\boldsymbol{D}}_{\xi}\right)_{i+1j} - \left(\vec{\boldsymbol{E}}_{\xi} + \vec{\boldsymbol{D}}_{\xi}\right)_{ij}\right]^{n} + \hat{A}^{+}_{i-1/2j}\left[\left(\vec{\boldsymbol{E}}_{\xi} + \vec{\boldsymbol{D}}_{\xi}\right)_{ij} - \left(\vec{\boldsymbol{E}}_{\xi} + \vec{\boldsymbol{D}}_{\xi}\right)_{i-1j}\right]^{n},$$

$$\hat{A}^{+}_{i+1/2j}\left[\left(\vec{\boldsymbol{E}}_{\xi} + \vec{\boldsymbol{D}}_{\xi}\right)_{ij}\right]^{n} = \left(\operatorname{minmod}\left(\bar{\boldsymbol{E}}_{\xi i+1/2j}\ \bar{\boldsymbol{E}}_{\xi i-1/2j}\right) + \right.$$

$$\left. + \begin{cases} \dot{m}\left(\Delta_{-}\bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i+1/2j},\ \Delta_{+}\bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i+1/2j}\right) & \text{если} \quad \left|\Delta_{-}\tilde{\boldsymbol{U}}_{ij}\right| > \left|\Delta_{+}\tilde{\boldsymbol{U}}_{ij}\right|, \\ \dot{m}\left(\Delta_{-}\bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i-1/2j},\ \Delta_{+}\bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i-1/2j}\right) & \text{если} \quad \left|\Delta_{-}\tilde{\boldsymbol{U}}_{ij}\right| \le \left|\Delta_{+}\tilde{\boldsymbol{U}}_{ij}\right| \end{cases} \right)\Bigg],$$

$$\hat{A}^{+}_{i-1/2j}\left[\left(\vec{\boldsymbol{E}}_{\xi} + \vec{\boldsymbol{D}}_{\xi}\right)_{ij}\right]^{n} = R\,\hat{\Lambda}^{+}R^{-1}_{i-1/2j}\Big[\Big(\operatorname{minmod}\left(\bar{\boldsymbol{E}}_{\xi i+1/2j}\ \bar{\boldsymbol{E}}_{\xi i-1/2j}\right) -$$

$$\left. - \begin{cases} \dot{m}\left(\Delta_{-}\bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i-1/2j},\ \Delta_{+}\bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i-1/2j}\right) & \text{если} \quad \left|\Delta_{-}\tilde{\boldsymbol{U}}_{ij}\right| \le \left|\Delta_{+}\tilde{\boldsymbol{U}}_{ij}\right|, \\ \dot{m}\left(\Delta_{-}\bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i-1/2j},\ \Delta_{+}\bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i-1/2j}\right) & \text{если} \quad \left|\Delta_{-}\tilde{\boldsymbol{U}}_{ij}\right| \le \left|\Delta_{+}\tilde{\boldsymbol{U}}_{ij}\right| \end{cases} \right)\Bigg],$$

$$\bar{\boldsymbol{E}}_{\xi i\pm1/2j} = \left(R\operatorname{sgn}(\Lambda)R^{-1}\right)_{i\pm1/2j}\frac{1}{2}\left[I - \frac{\Delta t}{\Delta\xi}\left(R|\Lambda|R^{-1}\right)_{i\pm1/2}\right]\Delta_{\pm}\tilde{\boldsymbol{E}}_{ij},$$

$$\bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i\pm1/2j} = \left(R\operatorname{sgn}(\Lambda)R^{-1}\right)_{i\pm1/2j}\frac{1}{6}\left[\frac{\Delta t^2}{\Delta\xi^2}\left(R|\Lambda|R^{-1}\right)^{2}_{\pm} - I\right]\Delta_{\pm}\tilde{\boldsymbol{E}}_{ij},$$

$$\bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i\pm1/2j} = \bar{\boldsymbol{E}}_{\xi i\pm1/2j} + \bar{\boldsymbol{D}}_{\xi i\pm1/2j},$$

где $\operatorname{minmod}(a, b) = \begin{cases} s\cdot\min(|a|,|b|) & \text{если } (a) = \operatorname{sgn}(b) = s, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$ $\qquad \dot{m}(a, b) = \begin{cases} a & \text{если } |a| \le |b|, \\ b & \text{если } |a| > |b|. \end{cases}$

Второе слагаемое $\mathrm{RHS}^{n}{}_{\eta}$ записывается аналогичным образом. Система уравнений (9) решается методом матричной прогонки, для аппроксимации первых производных здесь использовались разности против потока с первым порядком точности, для аппроксимации вторых производных — центральные разности со вторым порядком точности.

По известным значениям исходных переменных вычисляется поле температуры с помощью уравнения

$$f(T) = E_t - \frac{\rho}{\gamma_\infty \mathrm{M}^2_\infty W}\left(H(T) - R\,T\right) - \frac{1}{2}\rho\left(u^2 + w^2\right) = 0, \tag{10}$$

где H — молярная энтальпия смеси газов. Решение алгебраического уравнения (10) относительно температуры осуществляется итерационным методом Ньютона–Рафсона, обладающим квадратичной скоростью сходимости [13].

Предполагается, что турбулентное течение является квазидвумерным, и система уравнений Навье–Стокса решается с помощью двумерного DNS-подхода без привлечения дополнительных замыкающих моделей турбулентности.

Результаты расчетов

Параметры преобразования координат (6) имели вид

$$\xi(x) = L\left[(\beta+1)-(\beta-1)\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{1-x/a}\right]\Bigg/\left[\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{1-x/a}+1\right],$$

$$\eta(z) = K+\frac{1}{\tau}\operatorname{arsh}\left[\left(\frac{z}{z_c}-1\right)\operatorname{sh}(\tau K)\right], \quad K=\frac{1}{2\tau}\ln\left[\left(1+(e^{\tau}-1)\frac{z_c}{H}\right)\Bigg/\left(1+(e^{\tau}-1)\frac{z_c}{H}\right)\right],$$

где β, τ — коэффициенты сгущения ($\beta > 1$, $\tau > 1$), a — длина расчетной области в новой системе координат, z_c — точка, относительно которой производится сгущение. Численное моделирование поставленной задачи выполнялось со следующими входными параметрами: $1{,}5 \le M_0 \le 4$, $1{,}5 \le M_\infty \le 4$, $500\ K \le T_0 \le 1500\ K$, $500\ K \le T_\infty \le 1500\ K$. Расчет проводился в безразмерной области 600×80 на сетке размером 726×251.

Предварительно для апробации численного метода решалась тестовая задача сдвигового течения многокомпонентных газов без вдува частиц. Сопоставление результатов численного моделирования с расчетами [22] выполнялось с параметрами верхнего потока $M_\infty = 2{,}1$, $T_0 = 2000$ K, $p_\infty = 101325$ Па и с параметрами нижнего потока $M_\infty = 2{,}0$, $T_0 = 2000$ K, $p_\infty = 101325$ Па. При этом конвективное число Маха $M_c = (u_c - u_\infty)/a_\infty$, $u_c = (a_\infty u_0 + a_0 u_\infty)/(a_\infty + a_0)$ составляло $M_c = 0{,}38$. В качестве входных данных массовых концентрации компонент смеси газов было принято для верхнего потока $Y_{H_2} = 0{,}1$, $Y_{N_2} = 0{,}9$, для нижнего потока — $Y_{O_2} = 0{,}232$, $Y_{N_2} = 0{,}768$. На рис. 2 представлены графики

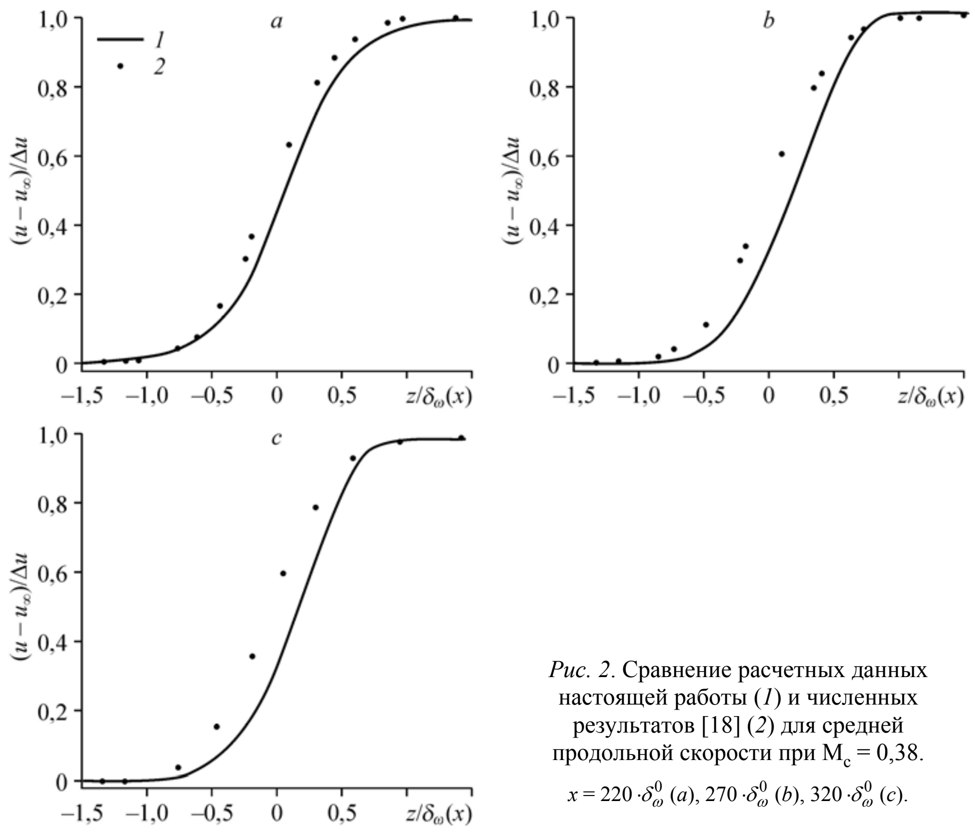

Рис. 2. Сравнение расчетных данных настоящей работы (*1*) и численных результатов [18] (*2*) для средней продольной скорости при $M_c = 0{,}38$.
$x = 220\cdot\delta_\omega^0$ (*a*), $270\cdot\delta_\omega^0$ (*b*), $320\cdot\delta_\omega^0$ (*c*).

сравнения средней скорости $\tilde{u} = \left(u - u_\infty\right) / \Delta u$, полученной в настоящей работе для трех сечений канала, с расчетами [22]. Из рис. 2 следует, что средняя скорость достаточно удовлетворительно совпадает с расчетами работы [20], где толщина завихренности вычисляется по формуле $\delta_\omega = \left(u_0 - u_\infty\right) / \left(\partial u / \partial z\right)_{\max}$.

Следует отметить, что численные эксперименты проводились с пертурбациями, заданными как с одной случайной фазой (4), так и с тремя модами (5). Результаты средних характеристик в обоих случаях практически совпадают. Ниже приведены результаты расчетов, выполненных для входных граничных условий (5) и следующих значений характерных параметров: $\mathrm{M}_0 = 2{,}1$, $\mathrm{M}_\infty = 2{,}0$, конвективное число Маха $\mathrm{M_c} = 1{,}249$, давление и температура на входе нижнего и верхнего потоков предполагаются равными $T_0 = T_\infty = 800$ K, $p_0 = p_\infty = 101325$ Па. Массовые концентрации задаются следующим образом: верхний поток (водородно-азотная смесь) — $Y_{\mathrm{H}_2} = 0{,}5$, $Y_{\mathrm{N}_2} = 0{,}5$, нижний воздушный поток — $Y_{\mathrm{O}_2} = 0{,}2$, $Y_{\mathrm{N}_2} = 0{,}8$. Размерная входная толщина завихренности принята равной 0,002 м. Для данной задачи колмогоровский масштаб составил $\eta = 10^{-6}$ м.

Формирование вихревых структур и рост слоя смешения показаны на примерах линий тока (рис. 3) и изолиний завихренности (рис. 4) в различные моменты времени. В соответствии с работами [11, 20] в областях больших градиентов скоростей в результате неустойчивости потока начинается формирование вихрей. Из рис. 3, 4 следует, что в слое смешения линии тока к моменту времени t = 200 существенно искривляются (рис. 3*a*) и в сечении $x \approx 100$ они сворачиваются в вихри (рис. 4*a*). Вычислительные эксперименты показывают, что на стадии усиления возмущений вихревых структур происходит образование более крупных вихрей путем слияния (спаривания) соседних вихрей.

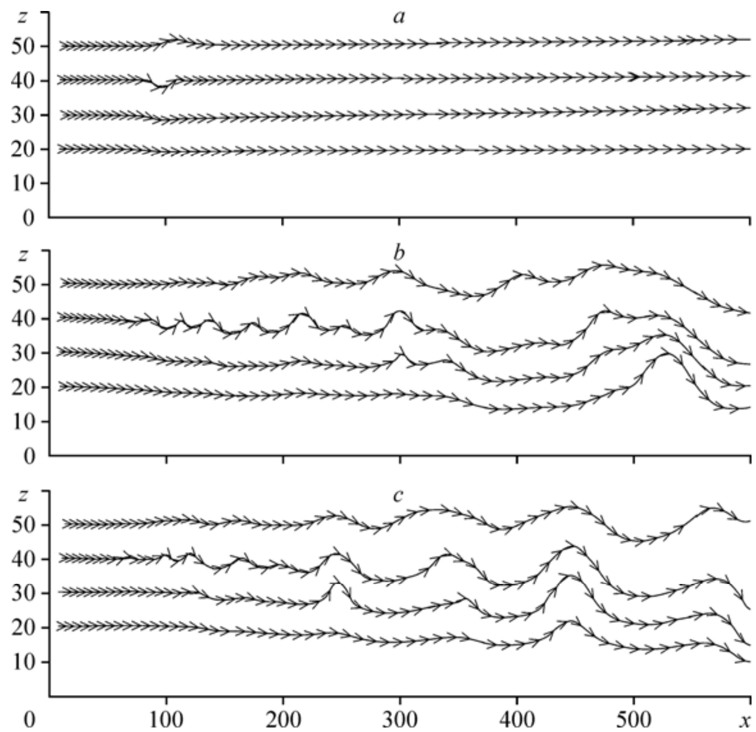

Рис. 3. Распределение линий тока в моменты времени
t = 200 (*a*), 1000 (*b*), 1500 (*c*) при $\mathrm{M_c}$ = 1,249.

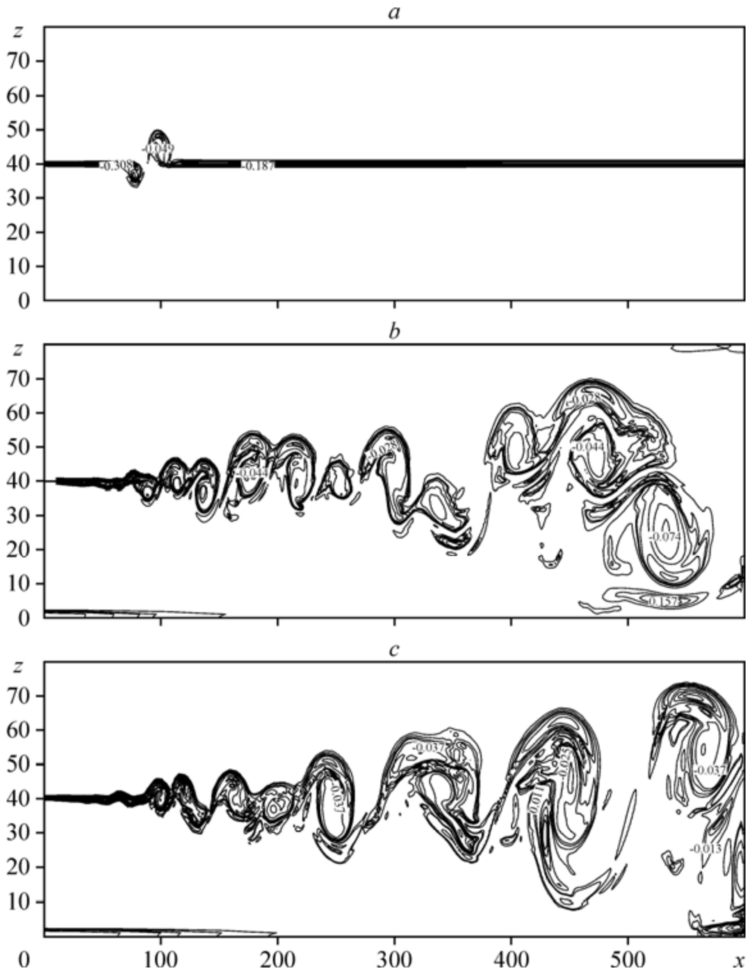

Рис. 4. Распределение изолинии завихренности в моменты времени
t = 200 (*a*), 1000 (*b*), 1500 (*c*) при M_c = 1,249.

Каждое такое слияние приводит к вовлечению в слой смешения незавихренного газа и, соответственно, к утолщению слоя смешения. Так, например, на рис. 3*b* при t = 1000 на расстоянии от x = 10 до x = 300 наблюдается незначительное расширение вихревой системы, а от x = 300 до x = 600 оно становится существенным. Также здесь видна система формирующихся мелких вихрей, обусловленных неустойчивостью. Достаточно устойчивая турбулентная вихревая структура, образовавшаяся с течением времени (t = 1500) приведена на рис. 4*c*.

Изолинии водорода (рис. 5) также наглядно демонстрируют образование и рост системы вихрей. На рис. 5*a* в соответствии с картиной завихренности в момент времени t = 200 (рис. 4*a*) хорошо просматриваются две пары вращающихся вихрей как с захватом воздушного потока, так и с выносом водородно-азотной смеси, а также расширение слоя смешения в сторону медленного воздушного потока. Из численного эксперимента следует, что в результате усиления скручивания вихрей (рис. 4*b* и 4*c*) в центрах их вращения формируются замкнутые зоны водорода (рис. 5*b* и 5*c*), тогда как воздух вовлекается лишь в периферийную часть крупных структур.

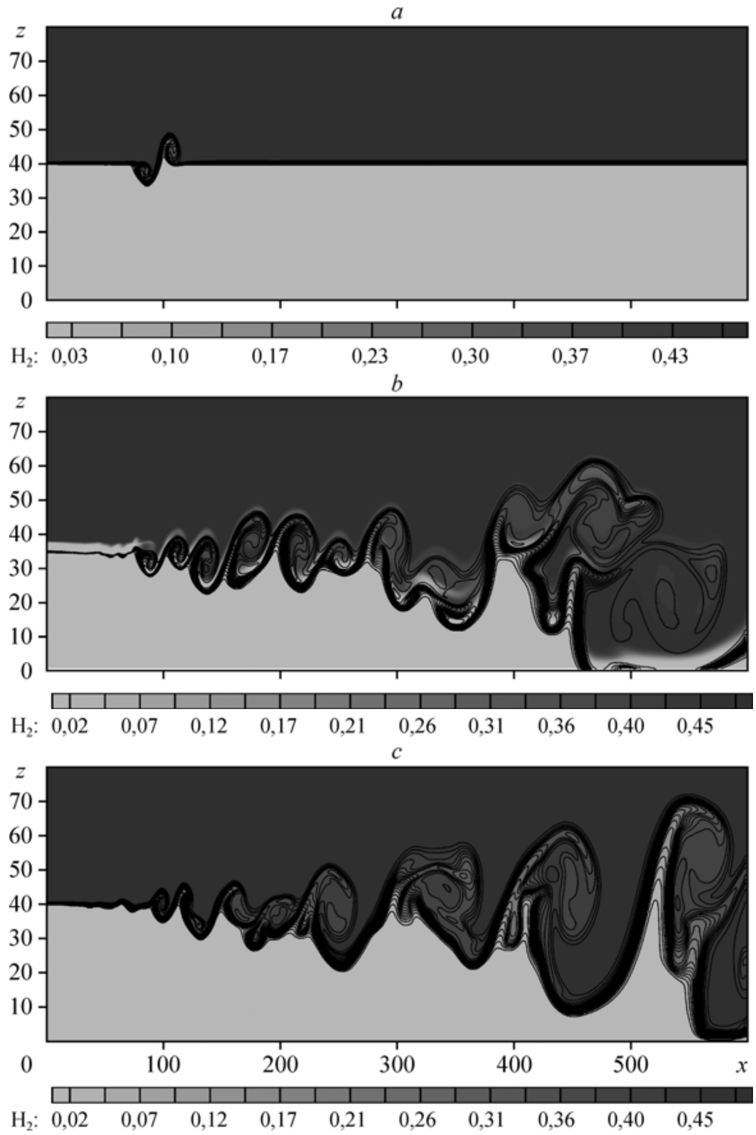

Рис. 5. Распределение изолинии водорода в моменты времени
t = 200 (*a*), 1000 (*b*), 1500 (*c*) при M_c = 1,249.

Для численного изучения распределения частиц в слое смешения одновременно с четырех входных точек — x = 0, z = 20, 30, 40, 50 — осуществлялся вдув частиц алюминия с входными условиями $u_p = u_g$, $\rho_p = 2560\,\text{кг}/\text{м}^3$. Температура частиц на входе предполагалась равной температуре газового потока. Частицы вдувались в поток равномерно, по одной частице через промежуток времени $\Delta t = 5$. Размер частиц $d_p = 25\,\text{мкм}$. Полученные в результате численного моделирования дисперсии частиц в сверхзвуковом слое смешения (рис. 6) качественно согласуются с наблюдаемым поведением частиц в развивающемся слое смешения [23–25], а именно: частицы, вдуваемые в более быстрый поток слоя смешения, диспергируются значительно больше по сравнению с теми, которые инжектируются в медленный поток ($u_0/u_\infty = 2{,}66$ и $M_c = 0{,}92$). Так, например, из рис. 4*a* и 6*a* следует, что частицы, вдуваемые в верхний поток при z = 50 к моменту

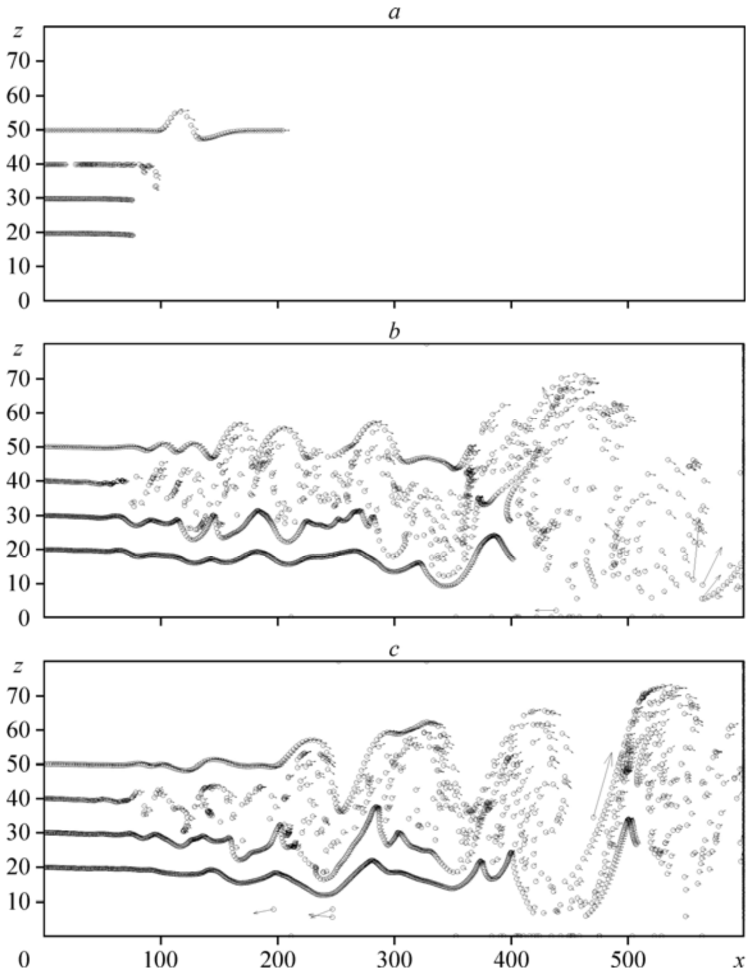

Рис. 6. Распределение частиц в моменты времени
t = 200 (*a*), 1000 (*b*), 1500 (*c*) при M_c = 1,24.

времени t = 200 (рис. 6*a*) простираются до сечения x = 200. При этом часть из них попадает в вихревую зону (x = 100÷150) и траектории этих частиц становятся круговыми. Одновременно частицы, вдуваемые с нижнего слоя смешения (z = 20, z = 30), еще не захватываются вихрями, а продолжают двигаться по собственным прямолинейным траекториям и достигают сечения x = 90. Из рис. 6*b* и 6*c* видно, что с течением времени частицы практически полностью вовлекаются в вихревую зону слоя смешения, однако разброс частиц, вдуваемых в более медленный поток (z = 20, z = 30), значительно меньше разброса частиц, увлекаемых более быстрым потоком (z = 40, z = 50). Из рис. 6 также следует, что отбрасывающая сила частиц незначительна, вследствие чего они захватываются вихрями практически равномерно.

На рис. 7 представлено количественное распределение частиц в верхнем ($z \in \left[40, 80\right]$, рис. 7*a*) и нижнем ($z \in \left[0, 40\right)$, рис. 7*b*) слоях смешения по оси x к моменту t = 1500, которое определяется следующим образом:

$$N_{\text{rms}}(x) = \left(\sum_{i=1}^{N_{\text{cp}}} \frac{N_i\left(x\right)^2}{N_{\text{cp}}} \right)^{1/2},$$

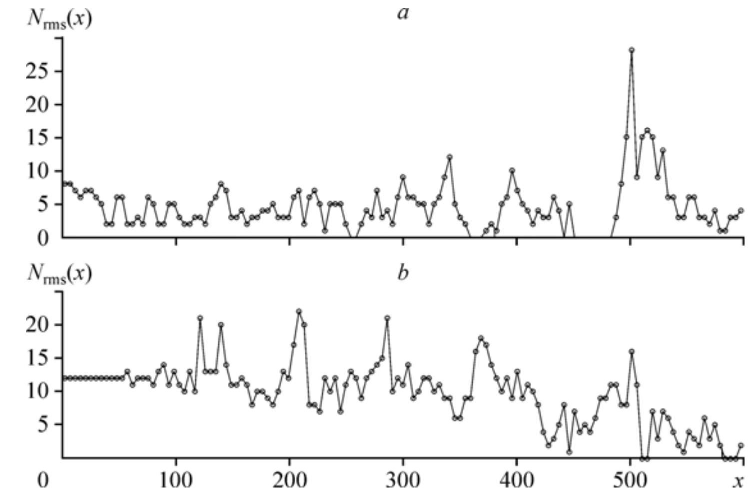

Рис. 7. Количественное распределение частиц верхнего (*a*) и нижнего (*b*) потоков в сечении *x* в момент времени $t = 500$ при $M_c = 0{,}38$.

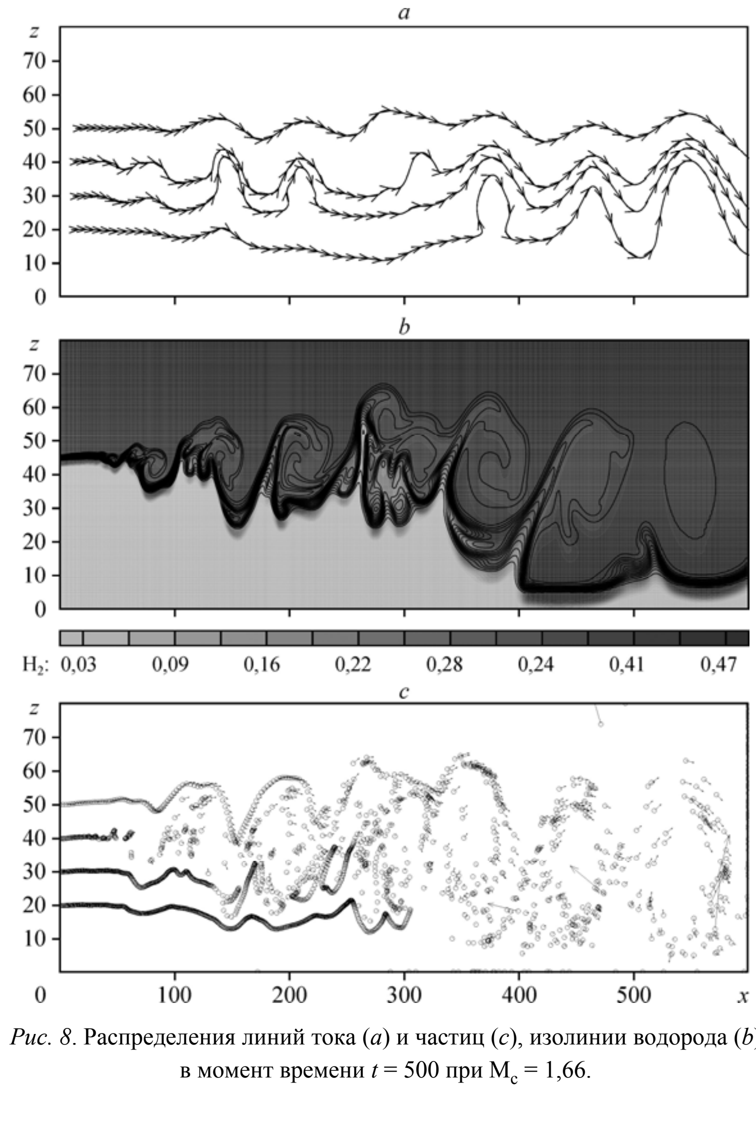

Рис. 8. Распределения линий тока (*a*) и частиц (*c*), изолинии водорода (*b*) в момент времени $t = 500$ при $M_c = 1{,}66$.

здесь N_{cp} — общее количество вычислительных ячеек, $N_i(x)$ — количество частиц в i-й ячейке. Как видно из рисунка, в соответствии с картиной расширения слоя смешения количество частиц в нижнем воздушном потоке (рис. 7*a*) больше по сравнению с количеством в верхнем потоке водородно-азотной смеси (рис. 7*b*).

Численные эксперименты, выполненные при большом значении входного числа Маха верхнего потока водородно-азотной смеси (рис. 8, t = 1500, M_0 = 3, M_c = 1,66, $\mathrm{M}_\infty = 2$), показывают несимметричность слоя смешения, обусловленную значительной разностью входных скоростей потоков: $u_0/u_\infty = 3{,}99$. При этом, как следует из рис. 8*a* и 8*b*, к моменту времени t = 1500 несимметричность слоя смешения существенно возрастает, что приводит к смещению вихревой структуры в сторону нижнего потока. Эту несимметричность наглядно демонстрируют также изолинии водорода (рис. 8*b*). Соответственно, большее количество частиц из верхнего потока перемещаются в нижний (рис. 8*c*). Также на рис. 8*c* видно, что в нижней периферийной зоне слоя смешения (z = 20) наблюдается захват частиц вихревыми структурами раньше (x = 300), чем в предыдущем случае (x = 400, рис. 6*c*). Из распределения частиц (рис. 8*c*) видно, что с течением времени все заметнее становится влияние центробежной силы, т.е. частицы накапливаются вокруг окружности вихря и вдоль косы между двумя вихрями, что приводит к некоторым «пустым» областям внутри вихря. Получено, что локализация частиц в нижней части слоя смешения значительно увеличивается, что также подтверждается графиком количественного распределения частиц в верхней (рис. 9*a*) и нижней (рис. 9*b*) частях слоя смешения.

Увеличение входного числа Маха воздушного потока (нижний поток) до $\mathrm{M}_\infty = 3$, $\mathrm{M}_c = 0{,}68$ (рис. 10, t = 1500) при фиксированном $\mathrm{M}_0 = 2{,}1$ приводит к значительному уменьшению разности входных скоростей газовых потоков по сравнению с предыдущим случаем, когда $u_0/u_\infty = 1{,}87$. Слой смешения при этом расширяется почти линейно, что подтверждается линиями токов газов (рис. 10*a*). Из рис. 10*b* видно формирование устойчивой

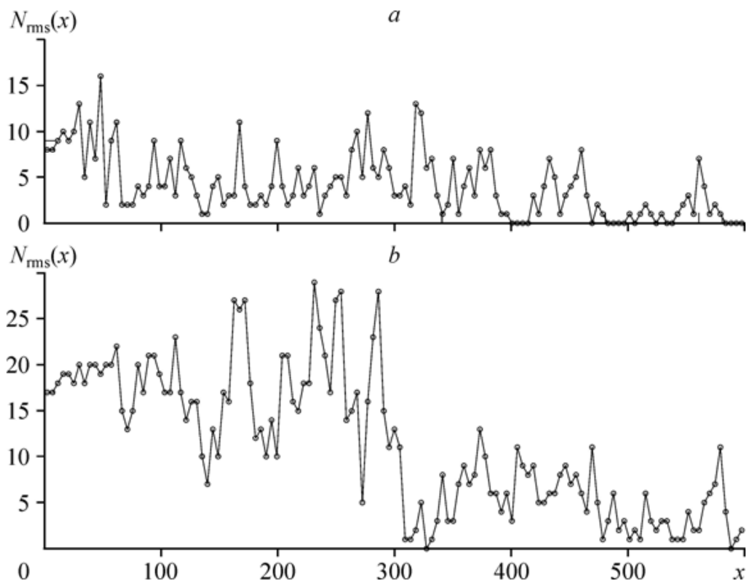

Рис. 9. Количественное распределение частиц верхнего (*a*) и нижнего (*b*) потоков в сечении x в момент времени t = 500 при M_c = 1,66.

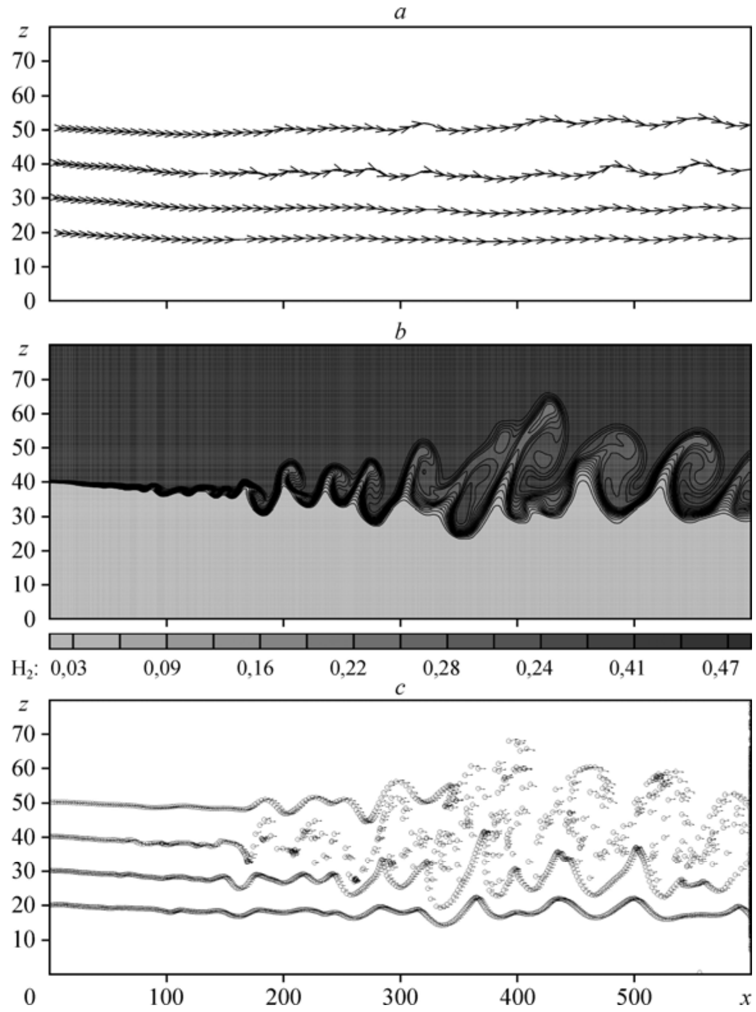

Рис. 10. Распределение линий тока (*a*) и частиц (*c*), изолинии водорода (*b*) в момент времени $t = 500$ при $M_c = 0{,}68$.

вихревой системы в слое смешения. Траектория искривления частиц, распределяемых между точками $z = 30$, $z = 60$, незначительна, следовательно, разброс в поперечном направлении минимален.

Заключение

На основе численных экспериментов с входными числами Маха в диапазоне $1{,}5 \le M_0 \le 4$, $1{,}5 \le M_\infty \le 4$ изучено влияние входных скоростей газов и точек впрыска частиц на динамику твердых частиц. Показано, что с увеличением входного числа Маха верхнего потока вследствие роста вихрей происходит усиливающее влияние центробежной силы на дисперсию частиц, т.е. увеличивается отбрасывание частиц в периферийную зону вихрей и их накапливание вокруг окружностей. Уменьшение отношения входных чисел Маха, напротив, заметно сокращает разброс частиц (в этом случае влияние центробежной силы уменьшается, что приводит к равномерному распределению частиц). Таким образом, моделируемые частицы малых размеров находятся в квазиравновесном состоянии с газовым потоком.

Список литературы

1. **Lazaro B.J., Lasheras J.C.** Particle dispersion in the developing free layer // Part 2. Forced flow // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 235. P. 179–221.
2. **Hishida K., Ando A., Maeda M.** Experiments on particle dispersion in a turbulent mixing layer // J. Multiphase Flow. 1992. Vol. 18, Iss. 2. P. 181–194.
3. **Pantano C., Sarkar S.** A study of compressibility effects in the high-speed, turbulent shear layer using direct simulation // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 451. P. 329–371.
4. **Li Y., McLaughlin J.B.** Numerical simulation of particle-laden turbulent channel flow // Physics of fluids. 2001. Vol. 13. P. 2957–2967.
5. **Jacobs G., Don W.S.** A high-order WENO-Z finite difference based particle-source-in-cell method for computation of particle-laden flows with shocks // J. Comp. Phys. 2009. Vol. 5. P. 1365–1379.
6. **Mahle I., Sesterhenn J., Friedrich R.** Turbulent mixing in temporal compressible shear layers involving detailed diffusion processes // J. Turbulence. 2007. Vol. 8, No. 1. P. 1–21.
7. **Терехов В.И., Пахомов М.А.** Влияние частиц на структуру течения и дисперсию твердой примеси в двухфазной осесимметричной струе // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, вып. 10. С. 27–35.
8. **Lazaro B.J., Lasheras J.C.** Particle dispersion in the developing free layer Part 2. Forced flow // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 235. P. 179–185.
9. **Kallio G., Reeks M.** A numerical simulation of particle deposition in turbulent boundary layers // Int. J. Multiphase Flow. 1989. Vol. 15. P. 433–446.
10. **Пахомов М.А., Терехов В.И.** Распространение твердых частиц в газодисперсном ограниченном закрученном потоке // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 3. С. 335–348.
11. **Aggarwal S.K., Yapo J.B., Grinstein F.F., Kailasanath K.** Numerical simulation of particle transport in planar shear layers // Computers and Fluids. 1996. Vol. 25, No. 1. P. 39–59.
12. **Hu Z., Luo X., Luo K.H.** Numerical simulation of particle dispersion in a spatially developing mixing layer // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2002. Vol. 15, Iss. 6. P. 403–420.
13. **Kee R., Rupley F.M., Miller J.A.** CHEMKIN-II: a Fortran chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics // Sandia Report SAND89-8009B. Albuquerque: Sandia National Laboratories,1989. 165 p.
14. **Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.** Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 366 с.
15. **Симаков Н.Н.** Экспериментальное подтверждение раннего кризиса сопротивления на одиночном шаре // Журнал технической физики. 2010. Т. 80, вып. 7. С. 1–7.
16. **Харьков В.В., Овчинников А.А.** Анализ сил, определяющих движение капель в закрученном газовом потоке // Вестник технологического университета. 2015. Т. 18, № 9. С. 106–109.
17. **Chein R., Chung J.N.** Effects of vortex pairing on particle dispersion in turbulent shear flows // Multiphase Flow. 1987. Vol. 13. P. 775–785.
18. **Poinsot T.J., Lele S.K.** Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows // J. Comp. Phys. 1992. Vol. 101, Iss. 1. P. 104–129.
19. **Tam C.-J., Baurle R.A., Gruber M.R.** Numerical study of jet injection into a supersonic crossflow // 35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Los Angeles, California, USA. AIAA Paper. 1999. No. 99-2254.
20. **Shi X.-T., Chen J., Bi W.-T., Shu C.-W., She Z.-S.** Numerical simulations of compressible mixing layers with a discontinuous Galerkin method // Acta MECH. Sin. 2011. Vol. 27, Iss. 3. P. 318–329.
21. **Бруель П., Найманова А.Ж.** Расчет нормального вдува струи водорода в сверхзвуковом потоке воздуха // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 4. С. 565–576.
22. **Martinez Ferrer P.J., Lehnasch G., Mura A.** Direct numerical simulations of high speed reactive mixing layers // J. Physics: Conf. Ser. 2012. No. 395. P. 1–8.
23. **Varun R., Sundararajan T., Usha R., Srinivasan K.** Interaction between particle-laden underexpanded twin supersonic jets // Physics of Fluids. 2010. Vol. 224, Iss. 9. P. 72–96.
24. **Luo K., Dai Q., Liu X., Fan J.** Effects of wall roughness on particle dynamics in a spatially developing turbulent boundary layer // Int. J. Multiphase Flow. 2018. Vol. 111. P. 414–421.
25. **Dai Q., Jin T., Luo K., Fan J.** Direct numerical simulation of particle dispersion in a three-dimensional spatially developing compressible mixing layer // Physics of Fluids. 2018. Vol. 30. P. 56–78.

Статья поступила в редакцию 7 мая 2018 г.,
после переработки — 1 февраля 2019 г.,
принята к публикации 28 февраля 2019 г.