Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.4
DOI: 10.15372/PS20220405

А.В. Хлебалин

КОЛЛЕКТИВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И КОЛЛЕКТИВНАЯ ВЕРИФАКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО РЕЗУЛЬТАТА

В работе выявляются трудности применения концепции верификации доказательства к коллективно полученным математическим результатам на примере теоремы классификации конечных простых групп. Показано, что трудности, возникающие при попытках использования концепции верификации доказательства применительно к коллективным результатам могут преодолеваться средствами социально-эпистемологического исследования. Последние позволяют не только преодолеть неприменимость классических концепций эпистемологии математики к коллективным результатам, но и создать новые концепции, применимые в том числе за пределами исключительно коллективных результатов.

Ключевые слова: коллективное доказательство; верификация доказательства; социальная эпистемология

A.V. Khlebalin

COLLECTIVE RESULTS AND VERIFICATION OF A COLLECTIVE MATHEMATICAL RESULT

The paper reveals the difficulties of applying the proof verification concept to collectively obtained mathematical results using the classification theorem for finite simple groups as an example. It is shown that the difficulties that arise when trying to use the concept of proof verification to collective results can be overcome by means of socio-epistemological research. The latter allow not only to overcome the inapplicability of the classical concepts of the epistemology of mathematics to collective results, but also to create new concepts that are applicable, including beyond the limits of exclusively collective results.

Keywords: collective proof, proof verification, social epistemology

Наблюдаемое в последние десятилетия обращение философии математики к математической практике привело к очень интересным результатам, возникающим при попытках объяснить несоответствие нормативных концепций, призванных направлять математические исследования и оценивать их итоги реальной практике развития математического знания. Эти результаты далеко не всегда опровергают известные концепции, но зачастую обогащают и уточняют их. Самые масштабные преобразования переживают концепция математического доказательства и основанная на ее классическом понимании интерпретация математического познания как предприятия если не исключительно, то по преимуществу индивидуального. В центре внимания в последние годы оказывается тот вызов, который бросает классическим эпистемологическим концепциям, характеризующим математическое знание, стремительное развитие компьютерной математики. Другим направлением критического исследования классических концепций является обращение к нетипичным образцам математического творчества, например к сложным доказательствам или доказательствам, полученным группами математиков. Именно такой случай будет занимать нас далее: мы предпримем попытку сформулировать эпистемологические оценки, точнее, проанализировать проблемы, возникающие при такого рода попытках, для доказательства одного из самых известных результатов, полученных большим коллективом математиков, – теоремы классификации конечных простых групп.

Решение проблемы классификации конечных простых групп имеет длительную историю. Р. Соломон отсчитывает ее начало с 1892 г., когда О. Гёльдер предположил, что «было бы очень интересно, если бы можно было дать обзор всех конечных простых групп» [7, p. 315). В течение первой половины XX в. существенный прогресс был достигнут немецкими и американскими математиками, но сами результаты были фрагментарными, отсутствовало единство методов и подходов к решению проблемы, а исследователи в работали основном индивидуально. Так, например, теорема Брауэра – Сузуки – Уолла, опубликованная в 1958 г., признается результатом конвергентных исследований, а не по-настоящему совместно полученным результатом. [Ibid.].

В 1954 г. Л. Брауэр определил, что отрасль находится в состоянии стагнации, и попытался возобновить интерес к ней в своем послании международному конгрессу математиков. А. Альберт в 1960–1961 гг. организовал в Университете Чикаго курс по теории групп, вокруг которого объединились многие математики, работающие над проблемами теории групп. В том же году Дж. Томпсон и У. Фейт активно работали над 255-страничным доказательством теоремы о нечетном порядке, что привело к восприятию теории групп как самостоятельной области [8, p. 191–195]. Сеть личных отношений, сложившаяся в этом году, имела решающее значение для формирования коллектива, и в течение 1960-х и 1970-х годов специалисты по теории групп интенсивно сотрудничали, результатом чего стал существенный рост числа публикаций в соавторстве [8, p. 195]. С момента формирования группы статьи поражали своим объемом: Томпсон (1968–1979 гг.), публикует в шести частях 410 страничный результат, Уолтер (1967 г.) – 109 страниц, Р. Альперин, Р. Брауэр и Ф. Горенштейн (1970 г.) – 261 страницу, Д. Горенштейн и К. Харада (1974 г.) – 461 страница, а М. Ашбахер (1977 г.) – 115 страниц. Трудность обусловлена в том, что доказательство требует не только нахождения и описания всех возможных конечных простых групп, но также демонстрации того, что любая группа попадает в одну из четырех семей основных групп или в одну из 26 спорадических групп. Процесс открытия новых спорадических групп несистематизирован, и с 1960-х по 1980-е годы было обнаружено около 20 новых спорадических групп [8, p. 190].

Сеть математиков, внесших свой вклад в доказательство, была децентрализована, отсутствовала центральная управленческая команда или какой-либо «информационный центр». В целом, работа над доказательством объединила усилия 100 математиков. Ближе всего к статусу руководителя проекта была роль Д. Горенштейна, чей план из 16 шагов, предложенный в 1971 г. [5, p. 182–193], задал общую структуру исследований на более поздних этапах работы [8, p. 202]. Связи в этой сети математиков были тесными, и тем, кто не были интегрирован в нее или у кого эта интеграция была слабой, фактически не удавалось участвовать в работе [8, p. 197). Участники группы стали уверены в том, что проект близится к завершению в конце 1970-х годов [7, p. 340–341]. Д.Горенштейн объявил, что доказательство было завершено в феврале 1981 г. Объявление этой даты вызывало у многих участников вопросы, так как к тому времени многие результаты были представлены еще только в препринте. В любом случае объявление о завершении проекта было преждевременным из-за нескольких пробелов, наиболее значимый из которых был ликвидирован М. Ашбахером и С. Смитом в 1000-страничной монографии, опубликованной в 2004 г.

К началу 1980-х годов уже были предприняты усилия по созданию ревизионистского доказательства, или доказательства «второго поколения», которое Горенштейн характеризует как направленное на устранение так называемых «локальных ошибок» в доказательстве и прояснение того, как должны быть соединены его различные части [3, p. 4; 4, p. 8]. На данный момент опубликовано восемь томов доказательства «второго поколения», где Горенштейн указан в качестве автора посмертно. Общий объем этого доказательства обещает составить 11 томов, содержащих от 3000 до 4000 страниц [6, p. 75].

Мы ограничились перечислением только тех характеристик доказательства теоремы о классификации конечных простых групп, из-за которых она была прозвана «чудовищной теоремой». Эти же обстоятельства приводят к постановке интересующих нас здесь эпистемологических вопросов.

Прежде всего, это огромный объем доказательства. Когда Горенштейн объявил о завершении доказательства, он подсчитал, что количество статей с доказательством колебалось от 300 до 500, а их общий составил от 5000 до 10 000 страниц [3, p. 1]. Когда первый том доказательства «второго поколения» был опубликован, оценка изменилась: от 10 000 до 15 000 страниц. Эти оценки относятся только к опубликованным статьям и не охватывают неопубликованные статьи и так называемую «серую литературу» (диссертации и проч.), которая либо является, либо когда-то считалась коллективом частью доказательства. Колоссальный размер и сложность доказательства выводят его за пределы понимания отдельным человеком. Никто не читал все части доказательства [6, p. 70] и никто не понимает его глубоко. [1, p. 1354]. Очень немногие претендуют на понимание того, как доказательство собрано в целое.

Второй особенностью является важность личных отношений для сотрудничества. Сами участники проекта подчеркивали определяющее значение личных контактов, сотрудничества «лицом к лицу», «нетекстовых средств передачи» результатов, включая наставничество, преподавание и обмен аспирантами. Благодаря высокой степени личного сотрудничества образовалась довольно сплоченная внутренняя группа, которая имела доступ к препринтам, методам, техникам и новым результатам.

Третья особенность заключается в том, что из-за сложности результатов многие из них были приняты, несмотря на то, что рецензенты и комментаторы были не в состоянии их понять. В 1970 г. Горенштейн, Альперин и Брауэр опубликовали 260-страничную статью. В комментарии для «Mathematical Reviews» [2] П. Фонг отозвался о ней следующим образом: «Как и следовало ожидать от нынешнего состояния теории конечных групп, доказательство длинное, трудное и сложное (и рецензент охотно признается, что не читал и не следил за всеми его тонкостями)» (цит. по: [8, p. 200]. В комментарии к работе Уолтера (1969 г.) Горенштейн сделал аналогичное замечание: «Количество используемых обозначений и стиль изложения автора таковы, что рецензент должен признать, что он не разбирался с аргументацией во всех подробностях» (цит. по: [8, p. 200]). Во всех этих случаях признание результатов основывалось на репутации математиков, которая вместе с «личным доверием и знакомством стала неотъемлемой частью процесса признания» [8, p. 200]. С. Вагенкнехт [9] предлагает обозначить такое признание результата на основе социальных факторов без возможности представить самому себе его обоснования «непрозрачной зависимостью» сообщества математиков.

Наконец, нужно указать на сомнения, присутствовавшие даже у самих участников коллектива, в том, может ли теорема быть установлена как целое [8, p. 204–205]. Горенштейн в 1983 г. во вступительном томе высказывает такие опасения: «При отсутствии последовательного изложения полного доказательства существует вполне реальная опасность, что она постепенно потеряется в живом мире математики, останется похороненной среди пыльных страниц забытых журналов» [8, p. 192]. В 2015 г. С. Смит вторит ему: «Сейчас мы все стареем, и мы хотим изложить все эти идеи, пока не стало слишком поздно. Мы можем умереть, или мы можем уйти на пенсию, или мы можем попросту забыть». [6, p. 70]. Каким бы странным это ни казалось, участники проекта доказательства теоремы опасаются, что вместе с их смертью будет утеряна совокупность неявных знаний, на которых зиждется доказательство. А. Стейнгарт [8] упоминает в связи с этим ряд проблем: математическое сообщество может коллективно забыть, как доказать теорему классификации, может утратиться понимание того, как разные части доказательства сочетаются друг с другом, а уход математиков, которые понимают различные части доказательства, сделает «локальные» ошибки неисправимыми.

Теорема о классификации поднимает множество важных эпистемологических вопросов. Среди них очевидными являются вопросы о том, на основании чего мы можем (и можем ли вообще) знать, что теорема верна, кому мы можем атрибутировать знание доказательства теоремы.

Несмотря на широко известное утверждение Л. Витгенштейна о пестроте математической практики как главной ее ценности, в отношении концепции математического доказательства можно выделить два противостоящих друг другу варианта ее формулировки, которыми мы обязаны Лейбницу и Декарту. Согласно лейбницевской, вычислительной, концепции, доказательство является правильным исключительно в силу своей формы, а не содержания. В версии Лейбница оно представляет собой последовательность утверждений, начинающуюся с утверждений тождества и продолжающуюся конечной последовательностью сугубо логических шагов вывода и правил дефиниционной подстановки вплоть до доказываемой теоремы. Абсолютизация формально-вычислительного аспекта математического рассуждения воплощается, согласно Лейбницу, в проекте *универсальной характеристики*, идеально представляющей природу математического доказательства. Важной характеристикой вычислительной концепции доказательства Лейбница является связь в ней понятий истины и доказательства. Доказательство выступает концептуальным условием истины, оно устанавливает истинность и демонстрирует, почему нечто истинно. Более того, согласно вычислительной концепции доказательства, оно выступает условием понимания: доказательство необходимо для понимания, потому что доказательство, и исключительно оно, предоставляет анализ содержания понятий, которые определяют истинность. Таким образом, вычислительная, или механическая, концепция доказательства Лейбница представляет собой сложное переплетение истины, понимания и причины.

Альтернативная, декартовская, концепция доказательства совершенно иначе определяет соотношение доказательства и истины. Согласно Декарту, нет тесной связи между этими понятиями. В отличие от Лейбница, Декарт не углублялся в анализ собственно математического доказательства. Большая часть этих рассуждений содержится в «Правилах». Декарт проводит хорошо известные различия между интуицией и дедукцией: элементарные истины арифметики интуитивно постижимы фактически всеми, следствия также могут быть понятны интуитивно; дедукция требует интуитивного постижения исходных утверждений. Предлагаемые Декартом характеристики компонентов доказательства имеют явно психологический оттенок. Успешное доказательство, считал Декарт, должно порождать у человека понимание (здесь вновь нужно подчеркнуть индивидуально-психологическое содержание его концепции). Для этого требуется скрупулезное следование шагам доказательства, которые должны быть ясными, очевидными; необходимо держать доказательство в уме целиком, обозревать его.

Наиболее известным последователем Декарта в вопросе математического доказательства среди философов оказывается Л. Витгенштейн, уделявший столь большое внимание таким характеристикам доказательства, как обозримость, ясность, постижимость. Но и некоторые математики открыто признавали важность этих индивидуально-психологических характеристик доказательства.

Очевидно, что история доказательства теоремы классификации демонстрирует нам ее явное несоответствие обеим концепциям доказательства. Специалисты по теории групп довольно откровенно высказывались о том, соответствует ли теорема классификации условиям, содержащимся в охарактеризованных выше концепциях математического доказательства. «Большинство экспертов убеждены, что доказательство по своему существу верно; любые выявляемые ошибки – незначительные недосмотры или локальные ошибки, которые могут быть исправлены теми же методами, что были разработаны в процессе завершения классификации. «Более того, большинство уверено, что никакая ошибка не изменит конечный результат, т.е. не может привести к новым простым группам». (цит. по: Стейнгард [8, p. 197]). О последней тревожащей возможности Гольдшмидт однажды оригинальным образом спросил Томпсона. Он сказал: «Представьте, что Вы умерли, и классификация, по сути, завершена. Итак, Вы умираете, попадаете к воротам рая, и святой Петр говорит: “Ты пропустил одну группу и тебя не пустят, пока ты не найдешь ее. Как Вы думаете, Вы когда-нибудь ее найдете?” Томпсон ответил: “Разумеется, нет. Нет шансов!”» [цит. по: 8, p. 205].

Эти опасения поднимают вопрос о том, обеспечивает ли имеющееся доказательство должную эпистемологическую поддержку теоремы. Даже если доказательство на самом деле верно, сама длина доказательства, сложность областей математики, которые оно охватывает, и несистематический способ, которым обнаруживались спорадические группы, не позволяют заявить о том, что кто-либо в состоянии оценить все элементы доказательства и убедиться в его корректности.

Эта характерная для теоремы классификации конечных простых групп ситуация с большим количеством локальных ошибок, которые исправимы теми же методами и не ставят под сомнение корректность теоремы в целом, привела к тому, что была предложена еще одна характеристика корректного доказательства (наряду с такими хорошо известными, как, например, обозримость) – исправимость. А. Стейнгарт излагает ее так: «Сообщество включило понятие “локальные ошибки” в свое определение доказательства: допускаются ошибки, которые не изменяют окончательный результат доказательства. Эта модификация традиционного представления о строгом доказательстве зависит от группы “экспертов”, способных исправить эти ошибки, используя известные приемы и инструменты» [8, p. 202].

Иными словами, доказательство исправимо, если все его ошибки могут быть легко исправлены экспертами без необходимости привлекать какие-либо новые по отношению к использованным методы и концепции. Особенностью теоремы классификации является то, что один математик не может справиться со всеми такими исправлениями – слишком много областей математики задействовано в доказательстве результата.

Другая проблема, с которой сталкивается концепция исправимости, заключается в том, что неясно, как провести различие между «локальными» и «нелокальными» ошибками. Возникает серьезная опасность, что различие локальных и нелокальных ошибок будут использовать произвольно. Мы сомневаемся в том, что можно предложить универсальный критерий различения этих типов ошибок, который реально может применяться в анализе практики математического доказательства, но это не должно привести к произвольности использования этого различия.

Случай с доказательством теоремы классификации конечных простых групп ставит множество вопросов о концепции доказательства и ее роли в эпистемологии математики. История доказательства теоремы хорошо задокументирована, а эпистемологические исследования доказательства явно запаздывают. На наш взгляд, философское исследование доказательства теоремы классификации обещает крайне интересные результаты для эпистемологического исследования организации и функционирования математической практики и роли социальных факторов в ней. Интересующее нас доказательство является «социальным» по крайней мере в двух смыслах. Во-первых, убежденность в правильности доказательства основывается в нашем случае на степени интегрированности в сообщество и явно снижается по мере удаления от него. Во-вторых, агентом знания и агентом доказательства является именно большое сообщество, далеко не каждый член которого знаком с большинством других участников, и никто самостоятельно не может ни гарантировать истинность результата, ни охарактеризовать доказательство как целое. Первые попытки дать эпистемологические оценки доказательства теоремы классификации уже предоставили интересные результаты, такие как концепция исправимости, которая нам кажется очень важной и перспективной для анализа математической практики. Но как в случае этой концепции, так и в случае эпистемологического исследования доказательства теоремы классификации нам кажется явной угрозой отхода от социально-эпистемологического анализа в сторону простого описания социально-исторических факторов, окружающих доказательство.

Литература

1. *Davies B.* Wither mathematics // Notices of the AMS. 2005. No. 52. P. 1350–1356.

2. *Fong P.* MathSciNet review of Alperin et al. // https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=28449

3. *Gorenstein D.* An outline of the classification of finite simple groups // The Santa Cruz Conference on Finite Groups: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics / American Mathematical Society. 1980. Vol. 37, P. 3–28.

4. *Gorenstein D.* The Classification of Finite Simple Groups. The University Series in Mathematics. N. Y.: Springer, 1980.

5. *Gorenstein D.* The classification of finite simple groups I: Simple groups and local fnalysis // Bulletin of the American Mathematical Society. 1979. No. 1. P. 43–200.

6. *Ornes S.* The Whole Universe Catalog // Scientific American. – 2015. No 313 (1). P. 68–75.

7. *Solomon R.* A brief history of the classification of the finite simple groups. // Bulletin of the American Mathematical Society. 2001. No 38 (3). P. 315–352.

8. *Steingart A.* A group theory of group theory: Collaborative mathematics and the “uninvention” of a 1000-page proof // Social Studies of Science. 2012. No 42 (2). P. 185–213.

9. *Wagenknecht S.* Opaque and translucent epistemic dependence in collaborative scientific practice // Episteme. 2014. No. 11. P. 475–492.

References

1. *Davies, B.* Wither Mathematics. // Notices of the AMS. – 2005. – № 52. – P. 1350–1356.

2. *Fong, P.* MathSciNet Review of Alperin et al. // https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=28449

3. *Gorenstein, D.* The Classification of Finite Simple Groups 1. Simple Groups and Local Analysis. // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1979. – №. 1. – P. 43–200.

4. *Gorenstein, D.* An Outline of the Classification of Finite Simple Groups. // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society. Santa Cruz Conference on Finite Groups. – 1980. – Vol. 37. – P. 3–28.

5. *Gorenstein, D*. The Classification of Finite Simple Groups. The University series in Mathematics. New York: Springer, 1980.

6. *Ornes, S.* The Whole Universe Catalog. // Scientific American. – 2015. – № 313. – P. 68–75.

7. *Solomon, R.* A brief history of the classification of the finite simple groups. // Bulletin of the American Mathematical Society. – 2001. – № 38(3). – P. 315–352.

8. *Steingart, A.* A group theory of group theory: Collaborative mathematics and the 'uninvention' of a 1000-page proof. // Social Studies of Science. – 2012. – № 42(2). – P. 185–213.

9. *Wagenknecht, S.* Opaque and Translucent Epistemic Dependence in Collaborative Scientific Practice. // Episteme. – 2014. – №. 11. – P.475–492.

Информация об авторе

Хлебалин Александр Валерьевич – Институт философии и права Сибирского отделения Российской академии наук (ул. Николаева, 8, Новосибирск, 630090, Россия)

sasha_khl@mail.ru

Information about the author

Khlebalin Alexander Valerievich – Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaeva st., Novosibirsk, 630090, Russia)

Дата поступления 27.11.2022