

УДК 536.25

Исследование температурных полей в прямоугольной пластине с внутренним источником, зависящим от температуры, при помощи быстрых разложений

А.Д. Чернышов¹, В.В. Горяйнов², А.Н. Марченко¹

¹*Воронежский государственный университет инженерных технологий*

²*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*

E-mail: chernyshovad@mail.ru; gorvit77@mail.ru

Методом быстрых разложений получено приближенное аналитическое решение задачи о температурном поле в прямоугольной пластине с внутренним источником, зависящим от температуры. Найдено критическое значение параметра, характеризующего тепловыделение, которое влияет на вид аналитического решения принципиально. Показано, что максимальная погрешность решения составляет 0,02 при учете первых трех членов ряда Фурье в быстром разложении. Приведены температурные поля и дан анализ влияния габаритных размеров пластины и величины тепловыделения на их формирование. Сделаны рекомендации по выбору формы пластины.

Ключевые слова: аналитическое решение, температура, переменный внутренний источник, прямоугольная форма, быстрые разложения.

Введение

Задача о распределении температуры в прямоугольной пластине со свойствами саморазогрева возникает при решении проблем, связанных с прочностью различных конструкций, в которых используются подобные элементы (обшивка корабля, иллюминаторы, лобовые стекла, различные механизмы, дорожные покрытия и т.д.) Разогревание пластины может происходить за счет внутреннего трения, специального изготовления с внутренним подогревом, вследствие внешнего воздействия, а отвод тепла — за счет охлаждающего теплового потока через границу пластины. Взаимодействие двух противоположных процессов — саморазогрева и оттока тепла через границу — сильно зависит не только от интенсивности тепловыделения, но и от формы пластины, от температурных условий на ее границах. Так, например, в работе [1] было показано, что неограниченное тело угловой формы с внутренним источником будет неограниченно разогреваться независимо от граничных условий, если угол раствора больше или равен прямому. Если же угол раствора острый, то температура при саморазогреве будет ограниченной. В работе [2] методом численного анализа решалась задача теплопроводности в вертикальном канале с дискретными источниками тепла на стенках, в работе [3]

изучается теплообмен в криогенном топливном баке прямоугольной формы с охлаждающим теплообменником. Задачи для пластины с сингулярными точками на ее границах рассматривались в работах [4, 5]. Работы [6–8] посвящены решению задач теплопроводности в цилиндре и в пластине с учетом внутреннего источника тепла, переменного во времени, но не зависящего от координат.

Постановка задачи

Запишем уравнение теплопроводности с переменным внутренним источником, зависящим от температуры:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + E_0 + E_1(T - T_0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega([0, a] \times [0, b]), \quad (1)$$

где T — температура, T_0 — начальная температура, выражение $E_0 + E_1(T - T_0)$ определяет внутренний источник саморазогревания. Для простейшего случая без учета внутренних источников подобная задача рассматривалась в работе [9].

Граничные условия Дирихле для уравнения (1) в прямоугольной области Ω можно представить в виде

$$T|_{x=0} = T|_{x=a} = T_0. \quad (2)$$

Если граничное условие при $y = 0, y = b$ записать постоянными $T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_0$, то получим противоречие с дифференциальным уравнением (1) в угловых точках прямоугольника, которое называется «рассогласовкой». Это означает, что для нахождения гладкого решения из класса $T(x, y) \in L_2^{(2)}$ необходимо изменить либо граничные условия (2), либо условия $T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_0$, либо те и другие условия одновременно. Наиболее простой вариант имеет место при изменении условия $T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_0$. Для этого стороны прямоугольной области Ω вдоль оси x при $y = 0, y = b$ разобьем на три участка с помощью искусственно введенной малой величины ε :

$$0 \leq x \leq \varepsilon \cup \varepsilon \leq x \leq a - \varepsilon \cup a - \varepsilon \leq x \leq a.$$

Впоследствии при получении решения задачи будем переходить к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Опуская промежуточные преобразования, приведем один из простейших вариантов согласованного граничного условия:

$$T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_0 = \begin{cases} T_0 + \frac{E_0}{6} \left[\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} (x - \varepsilon)^3 \right] & \text{при } 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ T_0 & \text{при } \varepsilon \leq x \leq a - \varepsilon, \\ T_0 + \frac{E_0}{6} \left[\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon} (x - a + \varepsilon)^3 \right] & \text{при } a - \varepsilon \leq x \leq a. \end{cases} \quad (3)$$

В условиях (3) в окрестности концов отрезка $x \in [0, a]$ добавлены малые члены второго порядка по ε :

$$\frac{E_0}{6} \left[\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} (x - \varepsilon)^3 \right] \text{ при } 0 \leq x \leq \varepsilon \text{ и } \frac{E_0}{6} \left[\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon} (x - a + \varepsilon)^3 \right] \text{ при } a - \varepsilon \leq x \leq a.$$

При помощи подобных введений удается согласовать граничные условия (2), (3) с дифференциальным уравнением теплопроводности (1) в угловых точках области Ω и,

кроме того, обеспечить непрерывность $T(x, y)$ на границе до производных второго порядка включительно. Это позволит построить решение для температуры в виде быстрых разложений.

Решение задачи

Для решения задачи используем метод быстрых разложений [10, 11], апробированный в работах [12–15], в соответствии с которым можно представить $T(x, y)$ в виде суммы граничной функции и ряда Фурье по синусам:

$$T(x, y) = T(0, y) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + T(a, y) \frac{x}{a} + T_{xx}(0, y) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + T_{xx}(a, y) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(y) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right). \quad (4)$$

В выражении (4) слагаемые перед суммой представляют собой граничную функцию второго порядка. Приняв обозначения

$$T(0, y) = A_1(y), \quad T(a, y) = A_2(y), \quad T_{xx}(0, y) = A_3(y), \quad T_{xx}(a, y) = A_4(y),$$

запишем разложение (4) в более удобной форме:

$$T(x, y) = A_1(y) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_2(y) \frac{x}{a} + A_3(y) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + A_4(y) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(y) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right). \quad (5)$$

Подставим $T(x, y)$ из (5) в граничные условия (2), (3):

$$T|_{x=0} = T|_{x=a} = A_1(y) = A_2(y) = T_0, \quad (6)$$

$$T|_{y=0} = T_{0x} = A_1(0) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_2(0) \frac{x}{a} + A_3(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + A_4(0) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(0) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right), \quad (7)$$

$$T|_{y=b} = T_{0x} = A_1(b) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_2(b) \frac{x}{a} + A_3(b) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + A_4(b) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(b) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right).$$

Из равенств (7) при $x = 0$ и $x = a$ соответственно найдем

$$A_1(0) = A_1(b) = A_2(0) = A_2(b) = T_0. \quad (8)$$

Поскольку в равенствах (7) ряды Фурье допускают вычисление второй производной почленным дифференцированием по переменной x , то из (7) получим

$$\begin{aligned} T_{0x}'' &= A_3(0)\left(1-\frac{x}{a}\right) + A_4(0)\frac{x}{a} - \sum_{m=1}^{\infty} T_m(0)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right), \quad x \in [0, \varepsilon], \\ T_{0x}'' &= A_3(b)\left(1-\frac{x}{a}\right) + A_4(b)\frac{x}{a} - \sum_{m=1}^{\infty} T_m(b)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right), \quad x \in [a-\varepsilon, a]. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как $T_{0x}''(0) = T_{0x}''(a) = -E_0$, то из (9) при $x = 0$ и $x = a$ имеем

$$A_3(0) = A_4(0) = A_3(b) = A_4(b) = -E_0. \quad (10)$$

В соответствии с методом быстрых разложений умножим каждое из уравнений (7) на $\sin(n\pi x/a)$, $n = 1, 2, \dots$ и затем проинтегрируем по $x \in [0, a]$. При вычислении интегралов будем использовать следующие предельные выражения:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^a T_{0x} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} T_{0x} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^a T_{0x} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) dx + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^a T_{0x} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) dx = \int_0^a T_0 \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) dx = \frac{aT_0}{n\pi} [1 - (-1)^n]. \end{aligned} \quad (11)$$

После интегрирования окончательно получим

$$T_n(0) = T_n(b) = E_0 \frac{2a^2}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1], \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

В сумме ряда Фурье (5) ограничимся N слагаемыми и выражение $T(x, y)$ из (5) подставим в уравнение теплопроводности (1):

$$\begin{aligned} &A_3(y)\left(1-\frac{x}{a}\right) + A_4(y)\frac{x}{a} - \sum_{m=1}^N T_m(y)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) + A_1''(y)\left(1-\frac{x}{a}\right) + A_2''(y)\frac{x}{a} + \\ &+ A_3''(y)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + A_4''(y)\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \sum_{m=1}^N T_m''(y)\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) + E_0 - E_1T_0 + \\ &+ E_1 \left[A_1(y)\left(1-\frac{x}{a}\right) + A_2(y)\frac{x}{a} + A_3(y)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + \right. \\ &\left. + A_4(y)\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \sum_{m=1}^N T_m(y)\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда при $x = 0$ и $x = a$ соответственно получим

$$A_3(y) + A_1''(y) + E_0 - E_1T_0 + E_1A_1(y) = 0, \quad A_4(y) + A_2''(y) + E_0 - E_1T_0 + E_1A_2(y) = 0. \quad (14)$$

С учетом (6) из равенств (14) следует:

$$A_3(y) = A_4(y) = -E_0. \quad (15)$$

Используя (6) и (15), упростим уравнение (13):

$$\begin{aligned} &-\sum_{m=1}^N T_m(y)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) + \sum_{m=1}^N T_m''(y)\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) - \frac{E_1E_0}{2}[x^2 - ax] + \\ &+ E_1 \sum_{m=1}^N T_m(y)\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В соответствии с быстрыми разложениями равенство (16) умножим на $\sin(n\pi x/a)$, $n = 1, \dots, N$ и проинтегрируем по $x \in [0; a]$. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $T_n(y)$:

$$T_n''(y) + T_n(y) \left[E_1 - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right] + \frac{2a^2}{n^3 \pi^3} E_1 E_0 \left[1 - (-1)^n \right] = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения (17) используем частное решение

$$T_{n(\text{чп})} = \frac{2a^2}{n^3 \pi^3} E_1 E_0 \cdot \frac{(-1)^n - 1}{E_1 - n^2 \pi^2 / a^2} = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (18)$$

Характеристические корни уравнения (17) имеют вид

$$\lambda_{n1,2} = \pm \sqrt{L_n}, \quad L_n = n^2 \pi^2 / a^2 - E_1. \quad (19)$$

Из (19) видно существование критического значения параметра $E_1 = E_1^*$, характеризующего тепловыделение

$$E_1 = E_1^* = \pi^2 / a^2. \quad (20)$$

Рассмотрим последовательно три случая: $E_1 < E_1^*$, $E_1 = E_1^*$, $E_1 > E_1^*$. В первом, когда тепловыделение в пластине слабое (E_1 мало) и выполняется неравенство $E_1 < \pi^2 / a^2$, все корни $\lambda_{n1,2}$ будут действительными и общее решение уравнения (17) можно записать в виде

$$T_n(y) = \frac{2a^2}{n^3 \pi^3} E_1 E_0 \cdot \frac{1 - (-1)^n}{L_n} + C_{1n} e^{\sqrt{L_n} \cdot y} + C_{2n} e^{-\sqrt{L_n} \cdot y}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (21)$$

Постоянные интегрирования C_{1n} и C_{2n} найдем с помощью граничных условий (12). После этого решение уравнения (17) представляется выражением

$$T_n(y) = \frac{2a^2 E_0}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \left[\frac{E_1}{L_n} - \left(1 + \frac{E_1}{L_n} \right) \left(\frac{1}{1 + e^{\sqrt{L_n} \cdot b}} e^{\sqrt{L_n} \cdot y} + \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{L_n} \cdot b}} e^{-\sqrt{L_n} \cdot y} \right) \right],$$

$$n = 1, \dots, N. \quad (22)$$

После подстановки $A_1(y)$ и $A_2(y)$ из (6), $A_3(y)$ и $A_4(y)$ из (15) и $T_n(y)$ из (22) в выражение (5) получим искомое решение задачи теплопроводности:

$$T(x, y) = T_0 + \frac{E_0}{2} (ax - x^2) + \quad (23)$$

$$+ \sum_{n=1}^N \left[\frac{2a^2 E_0}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \left[\frac{E_1}{L_n} - \left(1 + \frac{E_1}{L_n} \right) \left(\frac{1}{1 + e^{\sqrt{L_n} \cdot b}} e^{\sqrt{L_n} \cdot y} + \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{L_n} \cdot b}} e^{-\sqrt{L_n} \cdot y} \right) \right] \right] \sin \left(n\pi \frac{x}{a} \right).$$

Если $E_1 = E_1^*$, то корни $\lambda_{n1,2}$ также будут действительными и общее решение уравнения (17) будет иметь вид (22) начиная с $n \geq 2$, а при $n = 1$ возникает неопределенность типа

$\{\infty - \infty\}$, после раскрытия которой получаем

$$\lim_{n \rightarrow 1} T_n(y) = 2E_0 \left(\pi^2 y(b-y) - 2a^2 \right) / \pi^3.$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3) для случая (20) запишется в форме

$$T(x, y) = T_0 + \frac{E_0}{2} (ax - x^2) + \frac{2E_0 \left(\pi^2 y(b-y) - 2a^2 \right)}{\pi^3} \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) + \sum_{n=2}^N \left[\frac{2a^2 E_0}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \left[\frac{E_1}{L_n} - \left(1 + \frac{E_1}{L_n} \right) \left(\frac{1}{1 + e^{\sqrt{L_n} \cdot b}} e^{\sqrt{L_n} \cdot y} + \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{L_n} \cdot b}} e^{-\sqrt{L_n} \cdot y} \right) \right] \right] \sin \left(n\pi \frac{x}{a} \right). \quad (24)$$

При $E_1 > E_1^* = \pi^2/a^2$ корни $\lambda_{n1,2}$ будут мнимыми до тех пор, пока $n^2 \pi^2/a^2 < E_1$. Как только $n^2 \pi^2/a^2 > E_1$, корни $\lambda_{n1,2}$ опять будут действительными. В случае мнимых корней $\lambda_{n1,2}$ общее решение уравнения (17) записывается в виде

$$T_n(y) = \frac{2a^2 E_1 E_0}{n^3 \pi^3} \cdot \frac{(1 - (-1)^n)}{L_n} + C_{1n} \cos \sqrt{-L_n} y + C_{2n} \sin \sqrt{-L_n} y, \quad n = 1, \dots, N. \quad (25)$$

Постоянные интегрирования C_{1n} и C_{2n} так же, как и ранее, найдем с помощью граничных условий (12). После этого из (25) получим

$$T_n(y) = \frac{2a^2 E_0}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \left[\frac{E_1}{L_n} - \left(1 + \frac{E_1}{L_n} \right) \left(\cos \sqrt{-L_n} y + \frac{1 - \cos \sqrt{-L_n} b}{\sin \sqrt{-L_n} b} \sin \sqrt{-L_n} y \right) \right], \quad n = 1 \div N. \quad (26)$$

Следовательно, искомое решение задачи теплопроводности с учетом (6), (15) и (26) будет выглядеть следующим образом:

$$T(x, y) = T_0 + \frac{E_0}{2} (ax - x^2) + \sum_{n=1}^N \left[\frac{2a^2 E_0}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \left[\frac{E_1}{L_n} - \left(1 + \frac{E_1}{L_n} \right) \left(\cos \sqrt{-L_n} y + \frac{1 - \cos \sqrt{-L_n} b}{\sin \sqrt{-L_n} b} \sin \sqrt{-L_n} y \right) \right] \right] \sin \left(n\pi \frac{x}{a} \right). \quad (27)$$

Запишем функцию $T(x, y)$ в безразмерном виде. С этой целью положим $T(x, y) = T_0 \cdot \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $E_0 = T_0 \tilde{E}_0/a^2$, $E_1 = \tilde{E}_1/a^2$, $x = a \tilde{x}$, $y = b \tilde{y}$, $L_n = \tilde{L}_n/a^2$. Тогда зависимости (20), (23), (24) и (27) соответственно принимают вид:

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1^* = \pi^2,$$

$$T(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 + \tilde{E}_0 (\tilde{x} - \tilde{x}^2) / 2 + \sum_{n=1}^N \left[\frac{2\tilde{E}_0}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \left[\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{L}_n} - \left(1 + \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{L}_n} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{b}{a} \tilde{y} \sqrt{\tilde{L}_n}}} e^{\frac{b}{a} \tilde{y} \sqrt{\tilde{L}_n}} + \frac{1}{1 + e^{-\frac{b}{a} \tilde{y} \sqrt{\tilde{L}_n}}} e^{-\frac{b}{a} \tilde{y} \sqrt{\tilde{L}_n}} \right) \right] \right] \sin(n\pi \tilde{x}), \quad (28)$$

$$\tilde{T}(x, y) = 1 + \frac{\tilde{E}_0}{2}(\tilde{x} - \tilde{x}^2) + \frac{2\tilde{E}_0(\pi^2 b^2 \tilde{y}(1 - \tilde{y})/a^2 - 2)}{\pi^3} \sin(\pi \tilde{x}) + \quad (29)$$

$$+ \sum_{n=2}^N \left[\frac{2\tilde{E}_0}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \left[\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{L}_n} - \left(1 + \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{L}_n} \right) \left(\frac{1}{1 + e^{\sqrt{\tilde{L}_n} \cdot \tilde{y} \frac{b}{a}}} + \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{\tilde{L}_n} \cdot \tilde{y} \frac{b}{a}}} \right) \right] \right] \sin(n\pi \tilde{x}),$$

$$\tilde{T}(x, y) = 1 + \frac{\tilde{E}_0}{2}(\tilde{x} - \tilde{x}^2) + \sum_{n=1}^N \left[\frac{2\tilde{E}_0}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \left[\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{L}_n} - \left(1 + \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{L}_n} \right) \left(\cos \sqrt{-\tilde{L}_n} \tilde{y} \frac{b}{a} + \left(\left(1 - \cos \sqrt{-\tilde{L}_n} \frac{b}{a} \right) / \sin \sqrt{-\tilde{L}_n} \frac{b}{a} \right) \sin \sqrt{-\tilde{L}_n} \tilde{y} \frac{b}{a} \right) \right] \right] \sin(n\pi \tilde{x}). \quad (30)$$

Максимальная невязка дифференциального уравнения (1) при подстановке полученных решений (28), (29) и (30), учитывающих три члена ряда Фурье ($N = 3$), составляет 0,02 для любых значений координат $x \in [0; a]$ и $y \in [0; b]$ (рис. 1). Такая точность вычислений приемлема для большинства технических расчетов. С увеличением N невязка быстро уменьшается.

Полученные результаты и их обсуждение

Получено критическое значение внутреннего тепловыделения в безразмерном виде: $\tilde{E}_1^* = \pi^2$, при $\tilde{E}_1 < \tilde{E}_1^*$, $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1^*$, $\tilde{E}_1 > \tilde{E}_1^*$ построены аналитические выражения (28)–(30) зависимостей температуры от геометрических координат.

Для случая $E_1 < E_1^*$ температурное поле в пластине при значениях

$$b/a = 3, \quad \tilde{E}_0 = 2, \quad \tilde{E}_1 = 7, \quad (31)$$

$$b/a = 15, \quad \tilde{E}_0 = 2, \quad \tilde{E}_1 = 7 \quad (32)$$

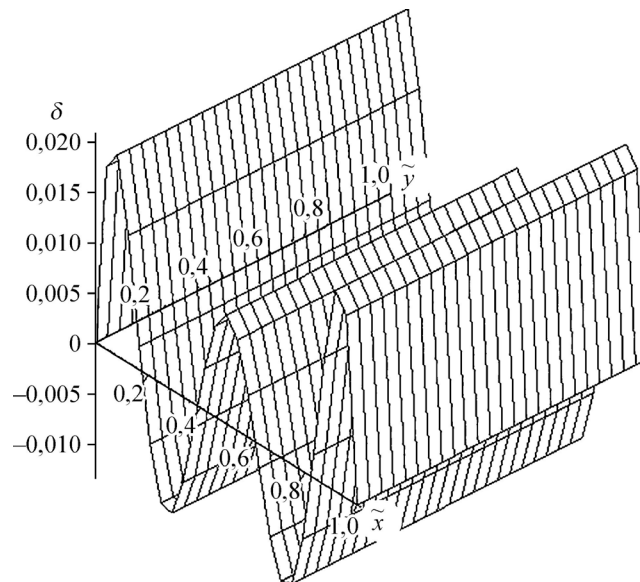


Рис. 1. Невязка дифференциального уравнения (1) при $N = 3$.

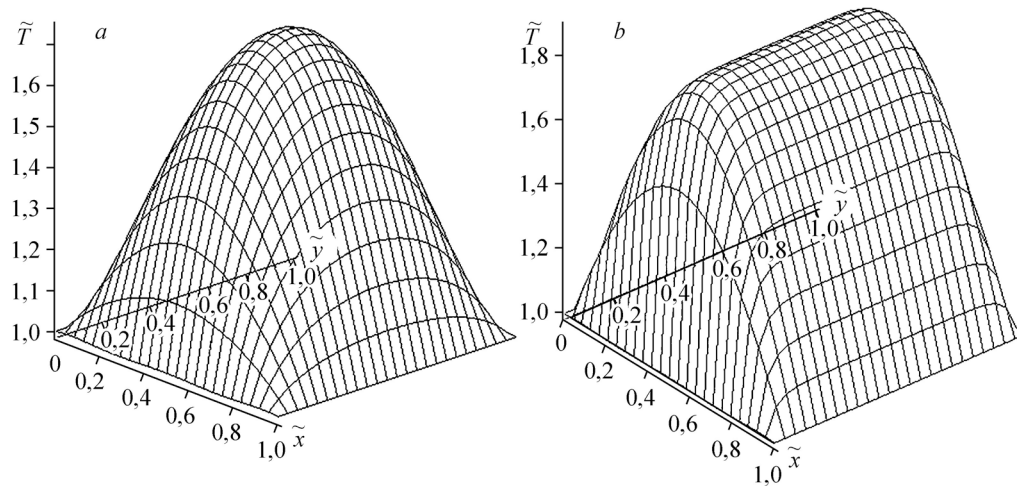


Рис. 2. Температурное поле в пластине с внутренним источником, зависящим от температуры, полученное при значениях 31 (а) и 32 (b).

соответственно показано на рис. 2а и 2б, где видно, что максимальное значение температура достигает в центре пластины. Также из рис. 2 можно сделать вывод, что представляет интерес исследование профилей температуры в пластине при различных значениях параметра b/a . Результат подобного исследования приведен на рис. 3, где представлены профили температуры в сечении $\tilde{x} = 0,5$. Из рис. 3 видно, что с увеличением значения b/a возрастает \tilde{T}_{\max} и при достижении $b/a = 10$ температура \tilde{T}_{\max} больше не растет, а происходит нагрев большей площади поверхности пластины до температуры \tilde{T}_{\max} . При значениях $b/a > 30$ почти вся поверхность пластины в сечении $\tilde{x} = 0,5$ имеет температуру \tilde{T}_{\max} . Таким образом, если саморазогрев пластины под действием внутреннего теплового источника должен быть минимален, то форма пластины должна быть приближена к квадрату.

Как известно, с увеличением мощности внутреннего теплового источника температура пластины возрастает. Это явление наблюдается и в нашем случае: с увеличением параметров \tilde{E}_0 и/или \tilde{E}_1 температура в пластине увеличивается. Представляет интерес

исследование влияния параметра \tilde{E}_1 , имеющего критическое значение $\tilde{E}_1^* = \pi^2$, на изменение профиля температуры. Данное исследование отражено на рис. 4, из которого видно, что если значения \tilde{E}_1 далеки от критического $\tilde{E}_1^* = \pi^2$, то температура в пластине изменяется незначительно. Как только значения \tilde{E}_1 приближаются к $\tilde{E}_1^* = \pi^2$, рост

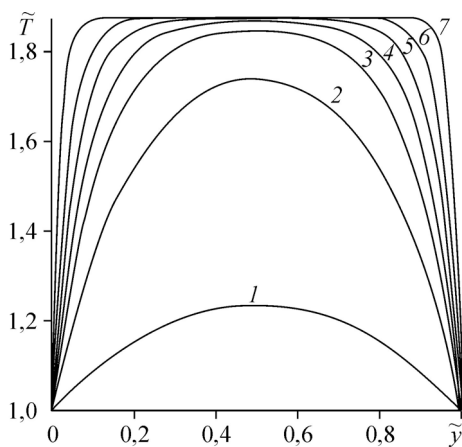


Рис. 3. Профили температуры в сечении $\tilde{x} = 0,5$, полученные при различных значениях параметра b/a . $b/a = 1$ (1), 3 (2), 5 (3), 7 (4), 10 (5), 15 (6), 30 (7).

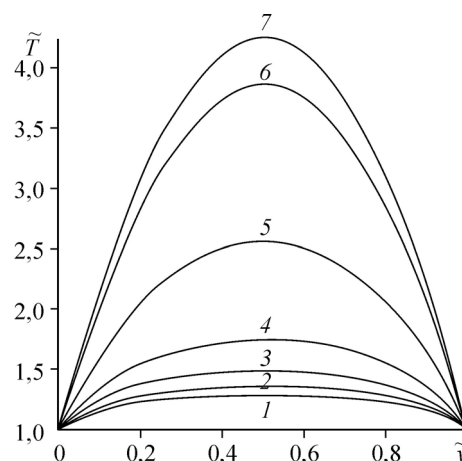
Рис. 4. Профили температуры в сечении $\tilde{x} = 0,5$, полученные при различных значениях параметра \tilde{E}_1 .

$$\tilde{E}_1 = 1 (1), 3 (2), 5 (3), 7 (4), 9 (5), \pi^2 (6), 10 (7).$$

температуры заметно увеличивается. Если же значения \tilde{E}_1 превышают $\tilde{E}_1^* = \pi^2$ (даже незначительно), то температура в пластине резко возрастает.

Заключение

Применение метода быстрых разложений позволило представить решение в явном аналитическом виде при минимальных временных затратах на ЭВМ. В зависимости от того, какому из условий $\tilde{E}_1 < \tilde{E}_1^*$, $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1^*$, $\tilde{E}_1 > \tilde{E}_1^*$ удовлетворяет значение параметра \tilde{E}_1 , расчет температурного поля следует вести по одной из формул (28), (29) или (30) соответственно. Полученное поле температур может быть использовано в расчетах температурных напряжений в рассматриваемой пластине.



Список литературы

1. Чернышов А.Д. Задачи теплопроводности для угловой области с внутренним источником // Инж.-физ. журн. 2003. Т. 76, № 4. С. 150–155.
2. Ермолаев И.А., Жбанов А.И. Смешанная конвекция в вертикальном канале с дискретными источниками тепла на стенке // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 4. С. 40–46.
3. Монсева Л.А., Черкасов С.Г. Математическое моделирование естественной конвекции и теплообмена в криогенном топливном баке с захлаживающим теплообменником // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 3. С. 39–46.
4. Хлуднев А.М. Задача о равновесии термоупругой пластины, содержащей трещину // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 452–463.
5. Селютин А.А. Третья краевая задача о равновесии термоупругой пластины, содержащей трещину // Сиб. журн. индустриальной математики. 2000. Т. III. № 2. С. 180–198.
6. Стефанюк Е.В. Аналитические решения задач теплопроводности при переменных во времени источниках теплоты // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер: Технические науки. 2009. Т. 23, № 1. С. 204–213.
7. Кашеев М.В. Решение задачи теплопроводности для цилиндра конечных размеров с внутренними источниками тепла // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Мат. моделирование физ. процессов. 2009. Вып. 4. С. 45–48.
8. Логинов В.С. Теплообмен в пластине при действии внутренних источников тепла при малых числах Фурье ($Fo < 0,001$) // Изв. Томского политехн. ун-та. 2003. Т. 306, № 2. С. 40–41.
9. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
10. Чернышов А.Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 1. С. 13–24.
11. Чернышов А.Д. Оператор быстрых разложений и теорема единственности быстрых разложений // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. конф. Воронеж: ВГУ, 2012. Ч. 1. С. 401–405.
12. Чернышов А.Д., Павлов И.О., Воронова Е.В., Горяйнов В.В. Решение методом быстрых разложений задачи о сушке зерна // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 6. С. 739–749.
13. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В. Решение одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения методом быстрых разложений // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2012. Т. 12, № 4. С. 105–112.

14. **Чернышов А.Д., Попов В.М., Шахов А.С., Горяйнов В.В., Новиков А.П.** Решение задачи о контактном тепловом сопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4, № 12. С. 544–552.
15. **Попов В.М., Шахов А.С., Горяйнов В.В., Чернышов О.А., Новиков А.П.** Повышенная точность решения задачи о контактном термосопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений // Тепловые процессы в технике. 2014. Т. 6, № 4. С. 179–191.

Статья поступила в редакцию 13 марта 2015 г.