УДК 534+517.95
DOI: 10.15372/PMTF202415474

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О. В. Капцов

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
E-mail: kaptsov@icm.krasn.ru

Рассматриваются линейные модельные уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными. Найдены высшие операторные симметрии и общие решения для ряда гиперболических уравнений. Для некоторых уравнений построены преобразования эквивалентности.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, операторные симметрии, общие решения

Введение. В работе Л. В. Овсянникова [1], посвященной исследованию свойств уравнения Чаплыгина, проведена групповая классификация линейных гиперболических уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. В работе [2] классификация была распространена на эллиптические и параболические уравнения. Проблема групповой классификации уравнений с произвольным числом переменных остается нерешенной.

Интерес к исследованию симметрий линейных уравнений математической физики обусловлен тем, что они позволяют найти системы координат, в которых уравнение допускает разделение переменных. Различные примеры решений и их приложения в квантовой механике приведены в [3, 4]. Особенность этого подхода заключается в использовании операторных симметрий первого и второго порядков. Следует отметить, что поиск операторных симметрий высших порядков является сложной задачей.

Линейные уравнения с переменными коэффициентами используются при моделировании различных физических явлений. Известны модели, описывающие звуковые и электромагнитные волны в неоднородной среде [5, 6], распространение волн над неровным дном [7], продольные колебания стержней [8], квантово-механические явления [9]. Некоторые нелинейные уравнения сводятся к линейным с переменными коэффициентами.

В данной работе рассматриваются модельные уравнения с переменными коэффициентами

$$u_{yy} = f(x)u_{xx} + g(x)u_x + h(x)u. \qquad (1)$$

Вводятся высшие операторные симметрии линейных уравнений, уравнение (1) приводится к канонической форме

$$u_{yy} = \pm u_{xx} + V(x)u.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Министерством науки и высшего образования РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение № 075-02-2023-912).

С помощью коммутативных дифференциальных операторов, возникающих при интегрировании уравнения Кортевега — де Фриза [10], получаются высшие симметрии для некоторых канонических уравнений. Методом преобразований Эйлера — Дарбу строятся общие решения выделенных гиперболических уравнений [11–13]. Приводятся примеры эквивалентных уравнений.

1. Операторные симметрии. Введем понятие операторных симметрий, используя способ, отличающийся от принятого в [3, 4]. Пусть имеется дифференциальный оператор порядка m:

$$L = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\,\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — мультииндекс; $|\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n$; $a_\alpha(x)$ — гладкие функции в $\mathbb{R}^n$. Будем полагать, что дифференциальный оператор S порядка k является оператором симметрии для уравнения

$$Lu = 0, \tag{2}$$

если существует дифференциальный оператор P, такой что

$$LS = PL.$$

Порядок оператора S называется порядком симметрии. Предполагается, что S не является многочленом от L.

Оператор симметрии S действует на решениях уравнения (2), т. е. переводит решения в решения. Множество операторов симметрии для данного уравнения образует ассоциативную алгебру относительно стандартного умножения операторов. В то же время коммутаторное умножение порождает алгебру Ли операторов симметрии.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка (1), где f, g, h — гладкие функции на некотором интервале, причем f не обращается в нуль. Приведем это уравнение к каноническому виду. Сначала введем новые переменные $z = p(x)$, $v(y,z) = u(x,y)$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$v_{yy} = (p')^2 f v_{zz} + (p'' + gp')v_z + hv.$$

Если $f > 0$, то полагаем $p(x) = \displaystyle\int f^{-1/2}\,dx$, иначе полагаем $p(x) = \displaystyle\int (-f)^{-1/2}\,dx$. В результате получаем уравнение вида

$$v_{yy} = \pm v_{zz} + G(z)v_z + H(z)v.$$

Введем новую функцию $w = v/s(z)$. Тогда

$$sw_{yy} = \pm sw_{zz} + (\pm 2s' + sG)w_z + (\pm s'' + Gs' + Hs)w.$$

Полагая $s = \exp\Big(\pm\dfrac{1}{2}\displaystyle\int G(z)\,dz\Big)$, получаем уравнение в канонической форме

$$w_{yy} = \pm w_{zz} + V(z)w.$$

Заметим, что уравнение

$$u_y = f(x)u_{xx} + g(x)u_x + h(x)u$$

подобными преобразованиями приводится к канонической форме

$$w_y = w_{zz} + K(z)w.$$

Рассмотрим линейное гиперболическое уравнение в каноническом виде

$$u_{yy} - u_{xx} + V(x)u = 0 \tag{3}$$

и соответствующий оператор

$$L = \partial_y^2 - \partial_x^2 + V(x).$$

Функцию V будем называть потенциалом. Существуют потенциалы V, при которых операторы

$$A_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k(x)\,\partial_x^k \tag{4}$$

коммутируют с L. Значит, операторы A_{2n+1} являются симметриями уравнения (3). Оператор ∂_y^2 коммутирует с любым A_{2n+1}. Следовательно, необходимо, чтобы оператор Штурма — Лиувилля $\mathcal{M} = -\partial_x^2 + V(x)$ коммутировал с A_{2n+1}. Фундаментальные работы [14, 15], в которых исследовались коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы, были опубликованы в первой половине XX в. Позднее коммутирующие операторы использовались при исследовании теории солитонов [16, 17].

Как известно, для любого $n > 0$ существует оператор A_{2n+1} вида (4), коммутирующий с оператором Штурма — Лиувилля $\mathcal{M}$ при условии, что потенциал $V(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению порядка $2n+1$ [10]. Приведем примеры таких операторов и соответствующих уравнений. При $n = 1$ оператор

$$A_3 = -4\,\partial_x^3 + 6V\,\partial_x + 3V'$$

коммутирует с оператором L, если потенциал удовлетворяет уравнению третьего порядка

$$V''' - 6VV' = 0.$$

При $n = 2$ имеется оператор пятого порядка

$$A_5 = 16\,\partial_x^5 - 20(V\,\partial_x^3 + \partial_x^3 V) + 30V\,\partial_x V + 5(V''\,\partial_x + \partial_x V'').$$

Потенциал V должен удовлетворять обыкновенному уравнению

$$\partial_x\left(\frac{\delta S}{\delta V}\right) = 0, \tag{5}$$

где $\delta/\delta V$ — вариационная производная; $S = ((V'')^2 - 5V^2V'' + 5V^4)/2$. При $n = 0$ оператор A_1 равен ∂_x, а $V' = 0$. Кроме того, можно использовать линейные комбинации операторов A_{2n+1} для получения дифференциальных уравнений для потенциалов. Например, таким образом получается уравнение

$$V''' = 6VV' + aV', \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Следует отметить, что уравнениям для потенциалов соответствуют высшие симметрии уравнения Кортевега — де Фриза. Точнее, приравнивая к нулю высшие симметрии уравнения Кортевега — де Фриза, получаем уравнения для потенциалов.

Найдем решение обыкновенного уравнения для потенциалов. Для этого проинтегрируем уравнение (6) два раза. В результате получаем уравнение первого порядка для потенциала

$$(V')^2 = 2V^3 + aV^2 + c_1V + c_2, \tag{7}$$

где c_1, c_2 — произвольные константы. При произвольных константах a, c_1, c_2 решение V уравнения (7) выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(x)$ по формуле $V = a/6 + 2\wp$. Если константы a, c_1, c_2 равны нулю, то ненулевой потенциал равен

$$V = \frac{2}{(x+b)^2}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Если $a = -4k^2$, $c_1 = c_2 = 0$, то потенциал задается одной из формул

$$V = \frac{-2k^2}{\operatorname{ch}^2(kx+b)}, \qquad V = \frac{2k^2}{\operatorname{sh}^2(kx+b)}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

При $a = 4k^2$, $c_1 = c_2 = 0$ потенциал равен

$$V = \frac{2k^2}{\cos^2(kx+b)}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

В общем случае решения уравнения (5) выражаются через двумерные функции θ [10].

2. Построение решений. Найдем решения уравнения (3) с потенциалами, полученными из условий коммутативности. При построении решений с разными потенциалами эффективным является метод, предложенный Л. Эйлером [11] и развитый Ж. Г. Дарбу [12]. В настоящее время он называется методом Дарбу или Эйлера — Дарбу [13]. Ниже приводится предложение, которое следует из утверждения, доказанного в [12]. Более общий результат приведен в [13].

Предложение 1. Пусть $u(x,y)$ — решение уравнения

$$u_{yy} = u_{xx} + V(x)u, \tag{8}$$

а функция $h(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$h'' + (\lambda + V(x))h = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Тогда функция

$$w = u_x - (\ln h)'u \tag{10}$$

является решением уравнения

$$w_{yy} = w_{xx} + V_1 w, \qquad V_1 = V + 2(\ln h)''. \tag{11}$$

Следует отметить, что существует преобразование, переводящее решения уравнения (11) в решения уравнения (8).

Предложение 2. Пусть выполнены условия предложения 1. Если w — решение уравнения (11), то функция u, заданная формулой

$$u = w_x + (\ln h)'w, \tag{12}$$

является решением уравнения (8).

Доказательство осуществляется прямой проверкой. В монографии [13] преобразование типа (12) называется противоположным (10).

Приведем примеры построения решений с использованием предложения 1. Пусть потенциал V равен нулю. Тогда решение уравнения (8) имеет вид

$$u = F(x+y) + G(x-y),$$

где F, G — произвольные гладкие функции. При этом решение уравнения (9) имеет один из следующих видов:

1) $h = c_1 x + c_2$, если $\lambda = 0$;
2) $h = c_1 \exp(\sqrt{-\lambda}\,x) + c_2 \exp(-\sqrt{-\lambda}\,x)$, если $\lambda < 0$;
3) $h = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,x)$, если $\lambda > 0$.

Здесь c_1, c_2 — произвольные константы.

Таким образом, получаем соответствующие потенциалы и решения (3):

$$1) \qquad V_1 = -\frac{2}{x^2}, \qquad u_1 = u_x - \frac{u}{x}, \qquad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad \lambda = 0;$$

$$2) \qquad V_1 = \frac{2k^2}{\operatorname{ch}^2(kx)}, \qquad u_1 = u_x - ku\operatorname{th}(kx), \qquad c_1 = c_2 = 0{,}5, \quad \lambda = -k^2;$$

$$V_1 = -\frac{2k^2}{\operatorname{sh}^2(kx)}, \qquad u_1 = u_x - ku\operatorname{ch}(kx), \qquad c_1 = -c_2 = 0{,}5, \quad \lambda = -k^2;$$

$$3) \qquad V_1 = -\frac{2k^2}{\sin^2(kx)}, \qquad u_1 = u_x - ku\operatorname{ctg}(kx), \qquad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad \lambda = k^2.$$

Данный процесс можно продолжать. Выберем потенциал $V_1 = -2/x^2$ и $\lambda = 0$. Тогда решение уравнения (9) имеет вид

$$h_2 = b_1x^2 + \frac{b_2}{x}, \qquad b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Значит, новый потенциал V_2 равен

$$V_2 = V_1 + 2(\ln h_2)'' = -\frac{6b_1x(b_1x^3 - 2b_2)}{(b_1x^3 + b_2)^2}.$$

Решая уравнение (9) с потенциалом V_2 и $\lambda = 0$, находим функцию

$$h_3 = \frac{b_4(b_1^2x^6 + 5b_1b_2x^3 - 5b_2^2) + b_3x}{b_1x^3 + b_2}, \qquad b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Построить решение другим способом позволяет следующее утверждение [13].

Лемма. *Пусть* $u(x,y)$ *— решение уравнения* (8), $h_1, \dots, h_n$ *— решения уравнения* (9) *при попарно различных* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. *Тогда функция*

$$w = \frac{W(h_1, \dots, h_n, u)}{W(h_1, \dots, h_n)} \tag{13}$$

удовлетворяет уравнению

$$w_{yy} = w_{xx} + (V(x) + 2(\ln W(h_1, \dots, h_n))'')w, \tag{14}$$

где $W(h_1, \dots, h_n, u)$, $W(h_1, \dots, h_n)$ *— вронскианы соответствующих функций.*

Таким образом, для построения решений уравнения (14) можно использовать, например, функции

$$h_i = c_1\exp(\sqrt{-\lambda_i}\,x) + c_2\exp(-\sqrt{-\lambda_i}\,x), \qquad i = 1, \dots, n$$

с различными $\lambda_i < 0$ и функции

$$u = F(x+y) + G(x-y)$$

с произвольными гладкими функциями F, G и получить решение по формуле (13).

3. Преобразования эквивалентности. Представляет интерес исследование задачи нахождения точечных преобразований

$$x_1 = A(x,y), \qquad y_1 = B(x,y), \qquad v(x_1,y_1) = u(x,y), \tag{15}$$

сохраняющих класс уравнений

$$u_{yy} = u_{xx} + V(x,y)u, \tag{16}$$

т. е. преобразований, переводящих решения уравнения (16) в решения уравнения вида

$$v_{y_1y_1} = v_{x_1x_1} + \tilde{V}(x_1,y_1)v$$

с некоторой функцией $\tilde{V}(x, y)$. Подставляя $u(x, y) = v(A, B)$ в (16), получаем уравнение

$$(A_y^2 - A_x^2)v_{x_1x_1} - (B_x^2 - B_y^2)v_{y_1y_1} + 2(A_yB_y - A_xB_x)v_{x_1y_1} + \\ + (A_{xx} - A_{yy})v_{x_1} + (B_{yy} - B_{xx})v_{y_1} + Vv = 0.$$

Следовательно, функции A, B должны удовлетворять системе уравнений

$$A_{yy} = A_{xx}, \qquad B_{yy} = B_{xx}; \tag{17}$$

$$A_yB_y = A_xB_x, \qquad A_y^2 - A_x^2 = B_x^2 - B_y^2. \tag{18}$$

Согласно уравнениям (17) имеем

$$A = f(x + y) + g(y - x), \qquad B = h(x + y) + k(y - x),$$

где f, g, h, k — произвольные функции. Подставляя эти выражения в уравнения (18), находим

$$f = h, \qquad g = -k.$$

Таким образом, преобразование эквивалентности имеет вид

$$x_1 = f(x + y) + g(y - x), \quad y_1 = f(x + y) - g(y - x), \quad v(x_1, y_1) = u(x, y), \tag{19}$$

а преобразованное уравнение — вид

$$v_{y_1y_1} - v_{x_1x_1} = \frac{V(x, y)v}{4f'(y + x)g'(y - x)}. \tag{20}$$

Остается выразить x, y через x_1, y_1 и подставить в правую часть последнего уравнения.

Приведем пример нахождения эквивалентных уравнений. Рассмотрим уравнение, впервые предложенное Л. Эйлером:

$$u_{yy} - u_{xx} = \frac{k}{x^2}\,u. \tag{21}$$

Введем новые переменные

$$a = x + y, \qquad b = y - x.$$

Тогда правая часть уравнения (20) принимает вид

$$V_1 = \frac{kv}{(a - b)^2 f'(a)g'(b)}.$$

Пусть функции f, g задаются формулами

$$f(a) = \operatorname{th}^{-1}(a), \qquad g(b) = \operatorname{th}^{-1}(b).$$

В этом случае

$$f'(a) = \frac{1}{1 - a^2}, \qquad g'(b) = \frac{1}{1 - b^2}.$$

Далее нужно выразить a и b через x_1, y_1. Согласно (20) получаем

$$f(a) = \frac{x_1 + y_1}{2}, \qquad g(b) = \frac{x_1 - y_1}{2}.$$

Значит,

$$a = \operatorname{th}\Big(\frac{x_1 + y_1}{2}\Big), \qquad b = \operatorname{th}\Big(\frac{x_1 - y_1}{2}\Big).$$

Подставляя найденные выражения для a и b в функцию V_1, находим

$$V_1 = \frac{kv}{\operatorname{sh}^2(y_1)}.$$

Если положить

$$f(a) = \operatorname{ch}^{-1}(a), \qquad g(b) = -\operatorname{th}^{-1}(b),$$

то функция V_1 принимает вид

$$V_1 = \frac{kv}{\operatorname{ch}^2(x_1)}.$$

Вместо обратных гиперболических функций f, g можно использовать обратные тригонометрические. Тогда функция V_1 будет выражаться через $\sin(y_1)$ или $\cos(x_1)$.

Замечание. В работе [13] введено обобщение понятия эквивалентности уравнений с частными производными. При этом отображение типа (19) может зависеть от производных. Согласно предложениям 1, 2 уравнения (8) и (11) эквивалентны в обобщенном смысле. Следовательно, все уравнения, полученные путем последовательного применения преобразований Эйлера — Дарбу, образуют класс эквивалентности.

Заключение. В работе рассматривались, главным образом, линейные гиперболические уравнения второго порядка. Получены общие решения некоторых уравнений с рациональными коэффициентами. Найден явный вид преобразований эквивалентности, связывающий уравнение Эйлера (21) с другими уравнениями вида (20).

Следует отметить, что преобразования Эйлера — Дарбу применимы к эллиптическим и параболическим уравнениям вида

$$u_{xx} + u_{yy} = V(x)u, \qquad u_t = u_{xx} + V(x)u.$$

Если применять преобразование Эйлера — Дарбу к уравнениям Лапласа или теплопроводности, то получим новые уравнения с такими же функциями $V(x)$, как в случае гиперболического уравнения. Представляет интерес использование преобразований Эйлера — Дарбу при решении начально-краевых задач, как это сделано в работе [18] для уравнения Фоккера — Планка.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства уравнения С. А. Чаплыгина // ПМТФ. 1960. № 3. С. 126–145.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. **Miller W.** Symmetry and separation of variables. L.: Addison-Westley Publ., 1977.
4. **Kalnins E.** Separation of variables and superintegrability: the symmetry of solvable systems / E. Kalnins, J. Kress, W. Miller. Bristol: IOP Publ., 2018.
5. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
6. **Ruderman M. S., Pelinovsky E., Petrukhin N. S., Talipova T.** Non-reflective propagation of kink waves in coronal magnetic loops // Solar Phys. 2013. V. 286. P. 417–426.
7. **Pelinovsky E., Kaptsov O.** Traveling waves in shallow seas of variable depths // Symmetry. 2022. V. 14. 1448.
8. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
9. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика: В 10 т. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1974.

10. **Дубровин Б. А.** Современная геометрия / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. М.: Наука, 1979.
11. **Эйлер Л.** Интегральное исчисление. Т. 3. М.: Физматгиз, 1958.
12. **Дарбу Ж. Г.** Лекции по общей теории поверхностей: В 4 т. Т. 2. Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2013.
13. **Капцов О. В.** Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009.
14. **Burchnall J., Chaundy T.** Commutative ordinary differential operators // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1923. V. 21. P. 420–440.
15. **Burchnall J., Chaundy T.** Commutative ordinary differential operators // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1928. V. 118. P. 557–583.
16. **Кричевер И. М.** Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12, № 3. С. 20–31.
17. **Lamb G. L.** Elements of soliton theory. N. Y.: John Wiley and Sons Inc., 1980.
18. **Веревкин И. В.** Преобразование Эйлера — Дарбу для уравнения Фоккера — Планка // Теорет. и мат. физика. 2011. Т. 166, № 1. С. 68–76.

Поступила в редакцию 18/III 2024 г.,
после доработки — 16/IV 2024 г.
Принята к публикации 27/IV 2024 г.