

УДК 532.5.013.4

## **О параболизации уравнений распространения малых возмущений в двумерных пограничных слоях<sup>\*</sup>**

**А.В. Бойко, К.В. Демьянко, Г.В. Засько, Ю.М. Нечепуренко**

*Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН,  
Москва*

E-mail: k.demyanko@imm.ras.ru

Работа посвящена моделированию распространения возмущений в вязких несжимаемых ламинарных пограничных слоях на основе линеаризованных уравнений распространения амплитуд возмущений. Наряду с численной моделью, основанной на полных линеаризованных уравнениях, рассмотрены три модели, основанные на уравнениях, полученных из полных исключением продольной компоненты градиента давления и/или вязких членов в продольном направлении. Модели сравниваются численно на примере генерации и развития возмущений в пограничном слое над слабо вогнутой пластиной. Делаются выводы о возможности одними и теми же упрощенными моделями адекватно моделировать как волны Толлмина–Шлихтинга, так и вихри Гёrtlера в диапазоне параметров, имеющих практическое значение.

**Ключевые слова:** ламинарные несжимаемые пограничные слои, линеаризованные уравнения распространения возмущений, пространственная неустойчивость, волны Толлмина–Шлихтинга, вихри Гёrtlера, спектральная редукция, алгебраическая редукция.

### **Введение**

При теоретическом и численном исследованиях пространственной неустойчивости двумерных ламинарных пограничных слоев рассматривают трехмерные, гармонические по времени и поперечному направлению возмущения малой амплитуды. Развитие таких возмущений вниз по потоку описывают с помощью линеаризованных относительно основного течения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, из которых затем выводят уравнения для амплитуд возмущений. Краевая задача для этих уравнений с любыми значениями амплитуд компонент скорости на границе рассматриваемой области пограничного слоя, обеспечивающими сохранение массы, имеет единственное решение. Однако граничные условия для возмущений на выходе из этой области, как правило, не известны. Поэтому обычно используют упрощенные уравнения распространения амплитуд возмущений, полученные из полных, например, отбрасыванием членов, отвечающих за вязкую диссиацию в продольном направлении, и продольной компоненты градиента давления. Такая параболизация уравнений распространения амплитуд

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00025).

© Бойко А.В., Демьянко К.В., Засько Г.В., Нечепуренко Ю.М., 2024

возмущений, которые изначально являлись эллиптическими, позволяет для этих уравнений корректно поставить задачу Коши в продольном направлении. Этот подход широко используется при исследовании неустойчивости Гёrtlера (см., например, [1–4]) и для вычисления пространственных оптимальных возмущений (см., например, [5–7]). Однако он оправдан лишь в случаях, когда отбрасываемые члены малы.

Задача Коши в продольном направлении для полных уравнений распространения амплитуд возмущений требует задания начальных (по продольной переменной) значений шести неизвестных функций, например: значений амплитуд трех компонент скорости, производных двух из них в продольном направлении и давления. Независимо от выбора функций, для которых задаются начальные условия, полученная задача Коши будет некорректна по Адамару [8]. Она будет допускать решения, сколь угодно сильно нарастающие вниз по потоку. Хотя решения, сильно нарастающие вниз по потоку, не реализуются на практике, при численном решении задачи Коши из-за погрешностей округления мы будем всегда получать именно такие решения при любых начальных условиях. Известно два способа, позволяющих избежать этого. Первый — выполнять на каждом шаге численного интегрирования вниз по потоку спектральную редукцию, исключающую из решения сильно нарастающие локальные моды (см., например, [9–12]). Второй — использовать для численного интегрирования так называемый PSE-метод (см., например, [13–15]), подавляющий сильно нарастающие локальные моды за счет использования неявного метода Эйлера со специально подобранным шагом интегрирования. Эти подходы также можно интерпретировать как методы параболизации уравнений распространения амплитуд возмущений. Кроме того, спектральную редукцию, исключающую сильно нарастающие моды, иногда называют регуляризацией либо интегрированием уравнений Навье–Стокса в одном направлении [11], поскольку групповые скорости мод, не нарастающих либо слабо нарастающих вниз по потоку, направлены вниз по потоку, а групповые скорости мод, сильно нарастающих вниз по потоку, направлены вверх по потоку. Что касается PSE-метода, то он не только подавляет сильно нарастающие локальные моды, но значительно искажает все остальные, кроме ведущей [16], и поэтому не подходит для моделирования распространения, например, оптимальных возмущений, представляющих собой пакеты большого числа различных мод [17].

Следует отметить, что постановка пространственной задачи Коши для линеаризованных уравнений вязкой несжимаемой жидкости, по-видимому, впервые была подробно рассмотрена в работе [8] при анализе развития вниз по потоку возмущения, заданного в некотором поперечном сечении в двумерном плоско-параллельном пограничном слое. В частности, было отмечено, что хотя такая задача некорректна по Адамару, она может быть регуляризована, если наложить определенные ограничения на начальные условия. Следуя работе [18], было предложено искать решение этой задачи в виде линейной комбинации собственных мод линеаризованных уравнений. Поиск решения в таком виде, в частности, позволил определить ограничения на начальные условия, гарантирующие отсутствие сильно нарастающих вниз по потоку решений. Однако, как было отмечено выше, из-за погрешностей округления такой подход при численном интегрировании все равно будет приводить к сильно нарастающим решениям.

Данная работа посвящена численному исследованию различных способов параболизации линеаризованных уравнений распространения амплитуд возмущений для моделирования развития вниз по потоку волн Толлмина – Шлихтинга и вихрей Гёrtlера. В качестве источника возмущений рассматривается мембрана, отклоняющаяся с малой амплитудой по нормали к поверхности гармонически по поперечному направлению

и времени. Сравниваются модель, использующая полные линеаризованные уравнения и спектральную редукцию (проектирование решения на подпространство локальных мод, не нарастающих либо слабо нарастающих вниз по потоку) на каждом шаге численного интегрирования вниз по потоку, модель, использующая полностью параболизованные уравнения (отброшены члены, отвечающие за вязкую диссипацию в продольном направлении, и продольная компонента градиента давления), и две модели, основанные на комбинации этих подходов: модель, использующая уравнения, в которых отброшены только члены, отвечающие за вязкую диссипацию в продольном направлении, и модель, использующая уравнения, в которых отброшена только продольная компонента градиента давления. В каждой из двух последних моделей используется спектральная редукция, поскольку, в отличие от полной параболизации, частичная параболизация не позволяет полностью исключить моды, сильно нарастающие вниз по потоку.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 описывается рассматриваемая конфигурация (пограничный слой вязкой несжимаемой жидкости над слабо вогнутой пластиной) и приводятся обезразмеренные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости над такой пластиной в локальных криволинейных координатах. В разделе 2 выводятся уравнения генерации и распространения амплитуд малых возмущений. В разделе 3 описываются упомянутые выше численные модели и используемые в них оригинальный универсальный алгоритм спектральной редукции и оригинальный универсальный алгоритм алгебраической редукции [19, 20], позволяющей существенно упростить исходную систему уравнений. В разделе 4 обсуждаются результаты численных экспериментов с этими моделями. В заключении подводятся итоги данной работы, в том числе делаются выводы о том, в каких случаях оправдано использование упрощенных моделей вместо модели на основе полных уравнений, что позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

Всюду далее  $i$  означает мнимую единицу,  $I$  — единичную матрицу подходящего порядка,  $T$  — операцию транспонирования,  ${}^*$  — операцию транспонирования и комплексного сопряжения.

## 1. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости над вогнутой пластиной

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости над вогнутой пластиной бесконечного размаха и постоянного радиуса кривизны  $R$ , помещенной под нулевым углом атаки и с нулевым углом скольжения в однородный набегающий поток с величиной скорости  $U_\infty$ . Будем использовать ортогональные криволинейные координаты  $(x, y, z)$ , где  $y$  — расстояние до пластины по нормали к поверхности,  $x$  — расстояние от передней кромки до основания этой нормали вдоль поверхности пластины,  $z$  — поперечная координата. Через  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\rho$  и  $\nu$  обозначим соответственно компоненты скорости в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , давление, плотность и кинематическую вязкость жидкости. Нас будет интересовать движение жидкости на расстояниях  $y$ , не превосходящих некоторой величины  $y_{\max} < R$ , и на расстояниях  $x$ :  $0 < x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ , при которых пограничный слой уже сформировался, но его толщина значительно меньше  $y_{\max}$ . Скорость жидкости на расстоянии  $y_{\max}$  от поверхности пластины будем считать направленной вдоль  $x$ , а ее величину обозначим через  $U_e(x)$ .

Пусть на пластине в полосе  $x_{\min} \leq x \leq x_0$ , где  $x_0 < x_{\max}$ , расположен бесконечно протяженный в поперечном направлении источник малых возмущений, имеющий длину  $l = x_0 - x_{\min} \ll x_0$ . Будем предполагать, что источник с хорошей точностью описывается неоднородными, нестационарными граничными условиями:

$$u(x, 0, z, t) = \eta_u(x, z, t), v(x, 0, z, t) = \eta_v(x, z, t), w(x, 0, z, t) = \eta_w(x, z, t),$$

$$x_{\min} \leq x \leq x_0, -\infty < z < \infty,$$

где  $\eta_u(x, z, t)$ ,  $\eta_v(x, z, t)$  и  $\eta_w(x, z, t)$  — некоторые достаточно гладкие функции, равные нулю вместе со своими первыми односторонними производными по  $x$  при  $x = x_{\min}$  и  $x_0$ . На остальной поверхности пластины для всех компонент скорости будем предполагать нулевые граничные условия (условия прилипания).

Выбрав скорость  $U_{\infty}$  набегающего потока в качестве характерной скорости, а расстояние  $x_0$  от передней кромки до правой границы источника — в качестве характерной длины по  $x$ , введем число Рейнольдса  $Re = U_{\infty}x_0/\nu$  и безразмерную кривизну  $K = \delta_0/R$ , где  $\delta_0 = \sqrt{\nu x_0/U_{\infty}} = x_0/\sqrt{Re}$  — характерный масштаб длины по нормали к поверхности для пограничного слоя Блазиуса на расстоянии  $x_0$  от передней кромки. Это позволит записать число Гётлера в виде  $Gö = \sqrt{Re K}$ .

Обезразмерим все переменные и параметры, сохраняя их обозначения:

$$\begin{aligned} x &:= \frac{x}{x_0}, \quad y := \frac{y\sqrt{Re}}{x_0}, \quad z := \frac{z\sqrt{Re}}{x_0}, \\ x_{\min} &:= \frac{x_{\min}}{x_0}, \quad x_{\max} := \frac{x_{\max}}{x_0}, \quad y_{\max} := \frac{y_{\max}\sqrt{Re}}{x_0}, \\ u &:= \frac{u}{U_{\infty}}, \quad v := \frac{v\sqrt{Re}}{U_{\infty}}, \quad w := \frac{w\sqrt{Re}}{U_{\infty}}, \quad t := \frac{tU_{\infty}}{x_0}, \quad p := \frac{pRe}{\rho U_{\infty}^2}, \\ l &:= \frac{l}{x_0}, \quad \eta_u := \frac{\eta_u}{U_{\infty}}, \quad \eta_v := \frac{\eta_v\sqrt{Re}}{U_{\infty}}, \quad \eta_w := \frac{\eta_w\sqrt{Re}}{U_{\infty}}, \quad U_e := \frac{U_e}{U_{\infty}}. \end{aligned}$$

Движение жидкости над пластиной описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнением неразрывности, которые после обезразмеривания имеют следующий вид в рассматриваемых криволинейных координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{1-Ky} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{Kuv}{1-Ky} + \\ + \frac{1}{1-Ky} \frac{1}{Re} \frac{\partial p}{\partial x} - \Delta u + \frac{1}{Re} \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K^2 u}{(1-Ky)^2} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{1-Ky} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Gö^2 u^2}{1-Ky} + \\ + \frac{\partial p}{\partial y} - \Delta v - \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{K^2 v}{(1-Ky)^2} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{1-Ky} u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \Delta w = 0, \\ \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{K}{1-Ky} v = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Эти уравнения дополняются следующими граничными условиями:

$$u(x, y_{\max}, z, t) = U_e(x), \quad v(x, y_{\max}, z, t) = w(x, y_{\max}, z, t) = 0 \text{ при } x_{\min} \leq x \leq x_{\max};$$

$$u(x, 0, z, t) = \eta_u(x, z, t), \quad v(x, 0, z, t) = \eta_v(x, z, t), \quad w(x, 0, z, t) = \eta_w(x, z, t) \text{ при } x_{\min} \leq x \leq 1 \\ (\text{то есть в области источника});$$

условиями прилипания для всех компонент скорости при  $1 \leq x \leq x_{\max}$ , где  $-\infty < z < \infty$ .

В поперечном направлении будем предполагать периодичность всех зависящих от  $z$  переменных и параметров модели с периодом  $\lambda_z$ . Тогда описанную математическую модель останется дополнить граничными условиями для компонент скорости при  $x = x_{\min}$  и  $x = x_{\max}$ .

## 2. Уравнения генерации и распространения малых возмущений

Пусть течение в интересующей нас области при  $\eta_u = \eta_v = \eta_w = 0$  является стационарным с компонентами скорости, равными

$$u(x, y, z, t) = U(x, y), \quad v(x, y, z, t) = V(x, y), \quad w(x, y, z, t) = 0,$$

причем  $U(x, 0) = V(x, 0) = 0$  и  $U(x, y_{\max}) = U_e(x)$  при  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$  (далее это течение будем называть основным), а при ненулевых  $\eta_u$ ,  $\eta_v$  и  $\eta_w$  течение представляет собой возмущенное основное течение с отклонениями компонент скорости и давления от компонент скорости и давления основного течения, соответственно равными  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  и  $p'$ .

Далее рассмотрим частный случай описанной конфигурации. Во-первых, предположим, что  $K < Ky_{\max} \ll 1$ . Во-вторых, предположим, что источник возмущений является гармоническим по  $z$  и  $t$  и представляет собой мембрану, колеблющуюся с малой амплитудой в направлении  $y$ . В этом случае с точностью до членов второго порядка малости будут справедливы следующие равенства:

$$\eta_u(x, z, t) = -\frac{\partial U}{\partial y}(x, 0) \eta(x, z, t), \quad \eta_v(x, z, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, z, t), \quad \eta_w(x, z, t) = 0,$$

где

$$\eta(x, z, t) = \text{Real} \left\{ H(x) e^{i(\beta z - \omega t)} \right\},$$

$\beta = 2\pi/\lambda_z$  — поперечное волновое число,  $\omega$  — угловая частота,  $H(x)$  — амплитуда колебаний мембранны, представляющая собой достаточно гладкую функцию на отрезке  $x_{\min} \leq x \leq 1$ , равную нулю вместе со своими первыми односторонними производными при  $x = x_{\min}$  и  $1$  [5]. Отметим, что такого типа граничные условия называют условиями Бенджамина [21].

В рассматриваемом случае возмущения компонент скорости и давления представимы в виде:

$$u''(x, y, z, t) = \operatorname{Real} \left\{ u''(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \right\}, \quad v''(x, y, z, t) = \operatorname{Real} \left\{ v''(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \right\},$$

$$w''(x, y, z, t) = \operatorname{Real} \left\{ w''(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \right\}, \quad p''(x, y, z, t) = \operatorname{Real} \left\{ p''(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \right\},$$

где  $u'', v'', w'', p''$  — комплексные амплитуды. Подставляя выражения для  $u', v', w', p'$  в линеаризованные относительно основного течения уравнения (1), с учетом сделанных предположений получим следующую систему уравнений для амплитуд возмущений:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} u + V \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta_{\beta\omega} u, \\ U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} u + V \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} v + 2G\delta^2 U u + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \Delta_{\beta\omega} v, \\ U \frac{\partial w}{\partial x} + V \frac{\partial w}{\partial y} + i\beta p &= \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Delta_{\beta\omega} w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\beta w &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\Delta_{\beta\omega} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 + i\omega.$$

Здесь и далее для упрощения обозначений двойные штрихи у амплитуд возмущений опущены. Уравнения (2) рассматриваются в области  $x_{\min} < x < x_{\max}$  и  $0 < y < y_{\max}$  со следующими граничными условиями на верхней и нижней границах области:

$$\begin{aligned} u(x, y_{\max}) &= v(x, y_{\max}) = w(x, y_{\max}) = 0, \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, \\ u(x, 0) &= -\frac{\partial U}{\partial y}(x, 0)H(x), \quad v(x, 0) = -i\omega H(x), \quad w(x, 0) = 0, \quad x_{\min} \leq x \leq 1, \\ u(x, 0) &= v(x, 0) = w(x, 0) = 0, \quad 1 \leq x \leq x_{\max}. \end{aligned}$$

Отметим, что для уравнений (2) вместо однородных граничных условий на верхней границе расчетной области иногда используют асимптотические граничные условия [22]. В этом случае в качестве  $y_{\max}$  достаточно выбрать границу пограничного слоя, сократив тем самым высоту расчетной области. Однако такой подход ориентирован на расчет ведущей локальной моды.

Для системы уравнений (2) можно поставить краевую задачу. Для этого для каждой компоненты скорости нужно задать граничные условия на левой и правой границах области, то есть при  $x = x_{\min}$  и  $x_{\max}$  и  $0 \leq y \leq y_{\max}$ . На левой границе естественно задать однородные условия:

$$u(x_{\min}, y) = v(x_{\min}, y) = w(x_{\min}, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq y_{\max}, \tag{3}$$

означающие отсутствие возмущений перед источником. Однако на правой границе граничные условия, как правило, неизвестны, поэтому для системы (2) ставят задачу Коши в продольном направлении.

### 3. Численные модели распространения возмущений вниз по потоку

Опишем возможную аппроксимацию системы (2) по  $y$  и рассмотрим различные численные модели распространения амплитуд возмущений на основе полученной после аппроксимации системы дифференциальных и алгебраических уравнений.

Будем использовать метод коллокаций [23] на сетке с узлами  $y_i = y(s_i)$ , где

$$y(s) = y_{\max} \frac{1+s}{2+\sigma(1-s)}, \quad -1 \leq s \leq 1,$$

$\sigma$  — масштабирующий множитель, а  $s_i = \cos\left(\frac{\pi i}{N+1}\right)$  и являются при  $1 \leq i \leq N$  корнями многочлена Чебышёва второго рода степени  $N$ . Отметим, что в этих обозначениях узлы сетки по  $y$  нумеруются от  $y_0 = y_{\max}$  до  $y_{N+1} = 0$ . Матрицы численного дифференцирования по  $s$  сеточных функций, заданных только во внутренних узлах либо во всех узлах, будем вычислять по алгоритмам, описанным в работе [24]. Используя формулу дифференцирования сложной функции, из них можно получить матрицы дифференцирования по  $y$  для давления и скорости, которые будем обозначать через  $\mathbf{D}_p$  и  $\mathbf{D}_1$  соответственно. Для вычисления вторых производных компонент скорости будем использовать матрицу  $\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1^2$ . Через  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  обозначим соответственно последние столбцы матриц  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  без первых и последних элементов. Для вычисления производных по  $y$  компонент скорости с учетом нулевых граничных условий будем использовать матрицы дифференцирования, полученные из матриц  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  отбрасывая первых и последних строк и столбцов, сохранив их обозначения. Через  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}_y$ ,  $\mathbf{V}_y$  будем обозначать диагональные матрицы порядка  $N$ , содержащие значения компонент основного течения и их производных по  $y$  во внутренних узлах сетки по  $y$ , полученных численным дифференцированием.

Перед аппроксимацией преобразуем в системе (2) первые два уравнения, используя тождества

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \mathbf{u} = \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{V} \mathbf{u}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{V} \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + i\beta \mathbf{V} \mathbf{w},$$

справедливые в силу уравнений неразрывности для основного течения и возмущений. Тогда в результате аппроксимации этой системы по  $y$  получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \frac{d\mathbf{u}}{dx} + 2\mathbf{V}\mathbf{D}_1\mathbf{u} + (\mathbf{U}_y - \mathbf{D}_1\mathbf{V})\mathbf{v} + \frac{1}{Re} \frac{d\mathbf{p}}{dx} &= \frac{1}{Re} \frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \mathbf{L}\mathbf{u} + H(x)\mathbf{f}_u, \\ \mathbf{U} \frac{d\mathbf{v}}{dx} + \frac{d\mathbf{V}\mathbf{u}}{dx} + (2\mathbf{V}\mathbf{D}_1 + \mathbf{V}_y)\mathbf{v} + i\beta \mathbf{V}\mathbf{w} + 2Gö^2\mathbf{U}\mathbf{u} + \mathbf{D}_p\mathbf{p} &= \frac{1}{Re} \frac{d^2\mathbf{v}}{dx^2} + \mathbf{L}\mathbf{v} + H(x)\mathbf{f}_v, \\ \mathbf{U} \frac{d\mathbf{w}}{dx} + \mathbf{V}\mathbf{D}_1\mathbf{w} + i\beta \mathbf{p} &= \frac{1}{Re} \frac{d^2\mathbf{w}}{dx^2} + \mathbf{L}\mathbf{w}, \\ \frac{d\mathbf{u}}{dx} + \mathbf{D}_1\mathbf{v} + i\beta \mathbf{w} + H(x)\mathbf{f}_p &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{p}$  —  $N$ -компонентные векторные функции значений компонент амплитуды возмущения во внутренних узлах сетки по  $y$ , зависящие только от  $x$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{D}_2 - (\beta^2 - i\omega)\mathbf{I}$ ,

а  $\mathbf{f}_u = -\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}(x, 0)(\mathbf{d}_2 - 2\mathbf{V}\mathbf{d}_1)$ ,  $\mathbf{f}_v = -i\omega(\mathbf{d}_2 - 2\mathbf{V}\mathbf{d}_1)$ ,  $\mathbf{f}_p = -i\omega\mathbf{d}_1$  учитывают граничные условия, моделирующие источник.

Введя вспомогательные переменные

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{V}\mathbf{u} - \frac{1}{Re} \frac{d\mathbf{v}}{dx}, \quad \tilde{\mathbf{w}} = -\frac{1}{Re} \frac{d\mathbf{w}}{dx},$$

систему (4) можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dx} = \mathbf{M}(x)\mathbf{q} + \mathbf{f}(x), \quad (5)$$

где  $\mathbf{q} = (\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T, \tilde{\mathbf{v}}^T, \tilde{\mathbf{w}}^T, \mathbf{p}^T)^T$ , а  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{M}$  — соответственно  $6N$ -компонентный столбец и квадратная матрица порядка  $6N$ , зависящие от  $x$ . Длина источника предполагается малой:  $1 - x_{min} \ll 1$ , поэтому скорость основного течения над ним можно считать не зависящей от  $x$ . Таким образом, при моделировании генерации возмущений, то есть при  $x_{min} < x < 1$ , матрица  $\mathbf{M}$  не будет зависеть от  $x$ .

### 3.1. Численное интегрирование вниз по потоку

Рассмотрим для системы (5) задачу Коши с нулевыми начальными условиями при  $x = x_{min}$ . Как отмечалось выше, эта задача допускает решения, сильно нарастающие вниз по потоку. Более того, с уменьшением шага сетки максимальный инкремент нарастания таких решений будет стремиться к бесконечности. Для исключения сильно нарастающих решений предлагается на каждом шаге численного интегрирования по  $x$  проектировать вычисленное решение системы (5) на инвариантное подпространство матрицы  $\mathbf{M}(x)$ , отвечающее собственным значениям, чья действительная часть не превышает некоторой заданной, не очень большой величины. Такие собственные значения и отвечающие им моды для краткости далее будем называть физически значимыми. Найденное таким образом решение, очевидно, не будет слишком сильно нарастать вниз по потоку.

Отметим, что проектирование решения системы (5) на инвариантное подпространство ее физически значимых локальных мод является развитием подхода, предложенного в работе [18], который основан на представлении решения в виде ряда по собственным модам дискретного спектра. Такая система может оказаться неполной, более того, даже в случае полноты она чувствительна к малым возмущениям из-за неортогональности собственных мод. В то же время, несмотря на численную неустойчивость отдельных мод, инвариантное подпространство, отвечающее группе физически значимых собственных значений, в силу их хорошей отделенности от остальной части спектра, является вычислительно устойчивым. Кроме того, оно содержит не только собственные, но и все присоединенные функции, отвечающие физически значимым собственным значениям.

Опишем предлагаемый метод решения задачи Коши для системы на примере численного интегрирования по неявному методу Эйлера:

$$(\mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{M}_k) \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k-1} + \varepsilon \mathbf{f}_k$$

на равномерной сетке  $x_{\min} = x_1 < \dots < x_n = x_{\max}$  с шагом  $\varepsilon$ , где  $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(x_k)$ ,  $\mathbf{M}_k = \mathbf{M}(x_k)$ . Обозначим через  $\mathbf{P}_k$  — спектральный проектор [25] матрицы  $\mathbf{M}_k$ , отвечающий физически значимому подмножеству  $\Lambda_k$  ее спектра. Такой проектор представим в виде  $\mathbf{P}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{Y}_k$ , где  $\mathbf{Q}_k$  — унитарная прямоугольная матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис в инвариантном подпространстве матрицы  $\mathbf{M}_k$ , отвечающем подмножеству  $\Lambda_k$ . Кроме того, выполняются следующие равенства:

$$\mathbf{Q}_k \mathbf{Y}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{Q}_k \tilde{\mathbf{M}}_k \mathbf{Y}_k = \mathbf{M}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{Y}_k, \quad \mathbf{Y}_k \mathbf{Q}_k = \mathbf{I},$$

где  $\tilde{\mathbf{M}}_k = \mathbf{Q}_k^* \mathbf{M}_k \mathbf{Q}_k$  — сужение матрицы  $\mathbf{M}_k$  на это инвариантное подпространство.

Предлагаемый алгоритм представляет собой следующую модификацию неявного метода Эйлера:

$$(\mathbf{I} - \varepsilon \tilde{\mathbf{M}}_k) \tilde{\mathbf{q}}_k = \mathbf{Y}_k (\mathbf{q}_{k-1} + \varepsilon \mathbf{f}_k), \quad \mathbf{q}_k = \mathbf{Q}_k \tilde{\mathbf{q}}_k. \quad (6)$$

Подобным образом можно модифицировать любую другую схему численного интегрирования. Отметим, что поскольку при моделировании генерации возмущения зависимостью от  $x$  матрицы  $\mathbf{M}$  мы пренебрегаем, вычислить спектральный проектор в этом случае будет достаточно только один раз.

Описанное проектирование решения на каждом шаге по  $x$  можно интерпретировать как регуляризацию соответствующей задачи Коши. Отбор представляющего интерес подмножества собственных значений  $\Lambda_k$  можно выполнять по величинам их вещественных частей, то есть по отвечающим собственным значениям инкрементам нарастания, равно как и по любому другому критерию, например, по знаку фазовых скоростей мод, отвечающих собственным значениям.

Опишем один из возможных способов вычисления спектрального проектора квадратной матрицы  $\mathbf{M}$ , отвечающего заданному подмножеству спектра  $\Lambda$ , отделенному от остальной части ее спектра. Этот способ устойчив к накоплению погрешностей округления и не требует полноты базиса собственных векторов [26]. Искомый спектральный проектор представим в виде  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Y}_1$ . Здесь  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Q}_1^* - \mathbf{X} \mathbf{Q}_2^*$ , а  $\mathbf{Q}_1$  и  $\mathbf{Q}_2$  — унитарные прямоугольные матрицы, входящие в разложение Шура

$$\mathbf{M} = [\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ 0 & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^* \\ \mathbf{Q}_2^* \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{S}_{jj}$  — квадратные верхние треугольные матрицы, причем спектр матрицы  $\mathbf{S}_{11}$  совпадает с  $\Lambda$ , а  $\mathbf{X}$  — решение уравнения Сильвестра

$$\mathbf{S}_{11} \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{S}_{22} = -\mathbf{S}_{12}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{M} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{S}_{11} \mathbf{Y}_1 = \mathbf{M} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Y}_1, \quad \mathbf{Y}_1 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}.$$

Реализовать вычисление матриц  $\mathbf{Q}_1$  и  $\mathbf{Y}_1$  можно с помощью стандартных процедур матричного анализа: процедуры вычисления разложения Шура произвольной квадратной комплексной матрицы, процедуры вычисления на основе заданного разложения Шура нового разложения Шура с заданным порядком собственных значений на главной диагонали формы Шура и процедуры решения уравнения Сильвестра. Следует отметить, что

это достаточно затратные вычисления с числом арифметических операций, пропорциональным кубу порядка квадратной матрицы  $\mathbf{M}$  и мультипликативной константой, примерно равной 150.

### 3.2. Упрощенные модели распространения возмущений вниз по потоку

Применение метода (6) для моделирования развития возмущений требует на каждом шаге по  $x$  числа операций, пропорционального кубу числа неизвестных с достаточно большой мультипликативной константой. Поэтому имеет смысл попробовать упростить модель распространения амплитуд возмущений с целью уменьшения числа неизвестных. В данном разделе рассматриваются три упрощенные модели, при этом полную модель на основе системы (5) и спектральной редукции будем для краткости называть моделью 1.

Для построения модели 2 отбросим в системе (5) продольную компоненту градиента давления. Получим дифференциально-алгебраическую систему вида

$$\frac{d\mathbf{q}}{dx} = \mathbf{J}(x)\mathbf{q} + \mathbf{G}\mathbf{p} + \mathbf{g}(x), \quad \mathbf{F}(x)\mathbf{q} + \mathbf{h}(x) = 0,$$

где  $\mathbf{q} = (\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T, \tilde{\mathbf{v}}^T, \tilde{\mathbf{w}}^T)^T$ ,  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{h}$  — соответственно  $5N$ - и  $N$ -компонентные столбцы,  $\mathbf{J}$  — квадратная матрица порядка  $5N$ ,  $\mathbf{F}$  — прямоугольная матрица размера  $N \times 5N$ ,  $\mathbf{G}$  — не зависящая от  $x$  прямоугольная матрица размера  $5N \times N$ . Этую систему при численном интегрировании удобно сводить с помощью алгебраической редукции, предложенной и обоснованной в работах [19, 20], к системе уравнений с числом переменных  $4N$ , относительно проекции решения на ядро матрицы  $\mathbf{F}(x)$ , и системе уравнений с числом переменных  $N$ , относительно проекции решения на ортогональное дополнение этого ядра. Опишем эти преобразования на примере неявной схемы Эйлера. Исходная система в этом случае имеет вид:

$$(\mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{J}_k) \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k-1} + \varepsilon (\mathbf{G}\mathbf{p}_k + \mathbf{g}_k), \quad \mathbf{F}_k \mathbf{q}_k + \mathbf{h}_k = 0.$$

Введем в рассмотрение унитарную прямоугольную матрицу  $\mathbf{Z}_{1k}$ , столбцы которой образуют ортонормированный базис в линейной оболочке столбцов матрицы  $\mathbf{F}_k^*$  и унитарную прямоугольную матрицу  $\mathbf{Z}_{2k}$ , дополняющую  $\mathbf{Z}_{1k}$  до унитарной квадратной, и представим решение в виде  $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{1k} + \mathbf{q}_{2k}$ , где  $\mathbf{q}_{ik} = \mathbf{Z}_{ik} \tilde{\mathbf{q}}_{ik}$ , а  $\tilde{\mathbf{q}}_{ik} = \mathbf{Z}_{ik}^* \mathbf{q}_k$ . Столбцы матрицы  $\mathbf{Z}_{2k}$  образуют ортонормированный базис в ядре матрицы  $\mathbf{F}_k$  и, следовательно,  $\mathbf{F}_k \mathbf{q}_{2k} = 0$ . Кроме того введем в рассмотрение унитарную прямоугольную матрицу  $T$ , столбцы которой образуют ортонормированный базис в ядре матрицы  $\mathbf{G}^*$ .

Отметим, что использование ортонормированных базисов для выполнения алгебраической редукции существенно повышает устойчивость к накоплению погрешностей округления. Соответствующие унитарные прямоугольные матрицы базисных векторов можно вычислять на основе стандартного QR-разложения [26] матриц  $\mathbf{F}_k^*$  и  $\mathbf{G}$ , например,

$$\mathbf{F}_k^* = [\mathbf{Z}_{1k} \mathbf{Z}_{2k}] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $[\mathbf{Z}_{1k} \mathbf{Z}_{2k}]$  — унитарная матрица порядка  $5N$ , а  $\mathbf{R}_k$  — квадратная невырожденная верхняя треугольная матрица порядка  $N$ .

Используя введенные матрицы и векторы, преобразуем исходную схему к следующему эквивалентному виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k^* \tilde{\mathbf{q}}_{1k} + \mathbf{h}_k &= 0, \quad \mathbf{q}_{1k} = \mathbf{Z}_{1k} \tilde{\mathbf{q}}_{1k}, \\ (\tilde{\mathbf{C}}_k - \varepsilon \tilde{\mathbf{J}}_k) \tilde{\mathbf{q}}_{2k} &= \mathbf{T}^* (\mathbf{q}_{k-1} - \mathbf{q}_{1k} + \varepsilon (\mathbf{J}_k \mathbf{q}_{1k} + \mathbf{g}_k)), \quad \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{1k} + \mathbf{Z}_{2k} \tilde{\mathbf{q}}_{2k}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathbf{C}}_k = \mathbf{T}^* \mathbf{Z}_{2k}$ ,  $\tilde{\mathbf{J}}_k = \mathbf{T}^* \mathbf{J}_k \mathbf{Z}_{2k}$  — квадратные матрицы порядка  $4N$ . Это позволяет из первого уравнения найти проекцию  $\tilde{\mathbf{q}}_{12}$  решения  $\mathbf{q}_k$  на ортогональное дополнение ядра матрицы  $\mathbf{F}_k$ , а из третьего уравнения — проекцию  $\tilde{\mathbf{q}}_{2k}$  решения на ядро этой матрицы.

В данном случае необходима еще и спектральная редукция, которую можно выполнить на основе разложения Шура матрицы  $\mathbf{M}_k = \tilde{\mathbf{J}}_k \tilde{\mathbf{C}}_k^{-1}$ . Для этого достаточно переписать последние два уравнения следующим образом:

$$(\mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{M}_k) \xi = \mathbf{T}^* (\mathbf{q}_{k-1} - \mathbf{q}_{1k} + \varepsilon (\mathbf{J}_k \mathbf{q}_{1k} + \mathbf{g}_k)), \quad \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{1k} + \mathbf{Z}_{2k} (\tilde{\mathbf{C}}_k^{-1} \xi),$$

что позволит выполнить спектральную редукцию так же, как и в случае модели 1.

Для построения модели 3 преобразуем в системе (2) первые три уравнения, используя следующие тождества:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \mathbf{u} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \mathbf{u}, \quad \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{U} \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V} \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \mathbf{v} + \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + i\beta \mathbf{V} \mathbf{w}, \quad \mathbf{Y} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U} \mathbf{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V} \mathbf{w}}{\partial y},$$

далее отбросим слагаемые

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dx^2}, \quad \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dx^2}, \quad \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \mathbf{w}}{dx^2}.$$

Тогда после аппроксимации получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \frac{du}{dx} + (\mathbf{V} \mathbf{D}_1 - \mathbf{V}_y) \mathbf{u} + \mathbf{U}_y \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{dp}{dx} &= \mathbf{L} \mathbf{u} + H(x) \mathbf{f}_u, \\ \frac{d(\mathbf{U} \mathbf{v} + \mathbf{V} \mathbf{u})}{dx} + (2\mathbf{V} \mathbf{D}_1 + 2\mathbf{V}_y) \mathbf{v} + i\beta \mathbf{V} \mathbf{w} + 2Gö^2 \mathbf{U} \mathbf{u} + \mathbf{D}_p \mathbf{p} &= \mathbf{L} \mathbf{v} + H(x) \mathbf{f}_v, \\ \frac{d \mathbf{U} \mathbf{w}}{dx} + (\mathbf{V} \mathbf{D}_1 + \mathbf{V}_y) \mathbf{w} + i\beta \mathbf{p} &= \mathbf{L} \mathbf{w}, \\ \frac{du}{dx} + \mathbf{D}_1 \mathbf{v} + i\beta \mathbf{w} + H(x) \mathbf{f}_p &= 0. \end{aligned}$$

Используя четвертое уравнение, исключим теперь из первого уравнения  $d\mathbf{u}/dx$  и запишем полученную систему в виде

$$\frac{d\mathbf{D}(x)\mathbf{q}}{dx} = \mathbf{M}(x)\mathbf{q} + \mathbf{f}(x), \quad (8)$$

где  $\mathbf{q} = (\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T, \mathbf{p}^T)^T$ ,  $\mathbf{f}$  — некоторый  $4N$ -компонентный столбец,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{M}$  — некоторые квадратные матрицы порядка  $4N$ , зависящие от  $x$ . К этой системе при численном интегрировании будем применять спектральную редукцию на основе разложения Шура матрицы  $\mathbf{M}(x) \mathbf{D}(x)^{-1}$ .

Для построения модели 4 отбросим в системе (8) продольную компоненту градиента давления. В результате получим систему дифференциальных и алгебраических уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{C}(x)\mathbf{q}}{dx} = \mathbf{J}(x)\mathbf{q} + \mathbf{G}\mathbf{p} + \mathbf{f}(x), \quad \mathbf{F}(x)\mathbf{q} + \mathbf{g}(x) = 0, \quad (9)$$

где  $\mathbf{q} = (\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T)^T$ ,  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  — некоторые  $3N$  и  $N$ -компонентные столбцы,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{J}$  — некоторые квадратные матрицы порядка  $3N$ , а  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  — прямоугольные матрицы размеров  $N \times 3N$  и  $3N \times N$ . С помощью алгебраической редукции, аналогичной используемой для модели 2, полученную систему будем сводить при численном интегрировании к системе уравнений с числом переменных  $N$ , относительно проекции решения на ортогональное дополнение ядра матрицы  $\mathbf{F}(x)$ , и к системе уравнений с числом переменных  $2N$ , относительно проекции решения на ядро этой матрицы.

Отметим, что система (9) использовалась многими авторами для исследования неустойчивости Гёртлера в пограничном слое над слабо вогнутой пластиной (см., например, [1, 5, 7]). В отличие от первых трех моделей, она не требует спектральной редукции.

#### 4. Численные эксперименты

Для обсуждаемых в этом разделе численных экспериментов компоненты скорости  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  основного течения были рассчитаны на основе уравнений Прандтля [27]. Уравнения для амплитуд возмущений аппроксимировались по  $y$  на сетке с числом узлов  $N = 50$ , с параметром сжатия  $\sigma = 2,5$  и величиной  $y_{\max}$ , выбранной так, что дальнейшее ее увеличение не приводило к заметному изменению результатов. Для интегрирования по  $x$  применялась схема BDF-2 [28] в комбинации с неявной схемой Эйлера на первом шаге интегрирования. В области источника использовалась равномерная сетка с числом узлов 2000, ниже по потоку — равномерная сетка с числом узлов 1000. В ходе расчетов проверялось, что при указанных числах узлов сеток по  $x$  и  $y$  достигалась сходимость по шагу сетки с достаточной точностью.

Значения параметров конфигурации выбирались размерными, типичными для экспериментов в аэродинамических трубах (см., например, [2–5, 29]): радиус кривизны пластины  $R = 10$  м, скорость набегающего потока  $U_\infty = 10$  м/с, кинематическая вязкость  $\nu = 1,497455 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с и соответствовала воздуху при нормальных условиях. Затем параметры обезразмеривались, как это описано в разделе 1. Во всех экспериментах протяженность источника возмущений  $x_0 - x_{\min} = 0,01$  м, а его амплитуда равна

$$A_0 \sin^2 \left( \pi \frac{x - x_{\min}}{x_0 - x_{\min}} \right), \quad x_{\min} \leq x \leq x_0,$$

где  $A_0 = 5 \cdot 10^{-5}$  м. Положение источника, которое в данном случае характеризуется параметром  $x_0$ , а также размерные поперечная длина волны  $\Lambda_z$  и частота  $F$  его колебаний варьировались в достаточно широких диапазонах значений, при которых доминирует либо неустойчивость Толлмина – Шлихтинга, либо неустойчивость Гёртлера. При этом  $\beta = 2\pi x_0 / (\Lambda_z \sqrt{\text{Re}})$ , а  $\omega = 2\pi F x_0 / U_\infty$ .

В табл. 1 представлены типичные времязатраты на моделирование генерации и развития возмущений с помощью моделей 1–4 относительно времязатрат на моделирование развития возмущений с помощью модели 1. При моделировании развития возмущений моделями 1–3 наиболее затратной оказалась спектральная редукция, выполняемая на каждом шаге численного интегрирования. Модель 4 не требует спектральной редукции,

Таблица 1

**Типичные времязатраты моделей 1–4 при моделировании генерации и развития возмущений относительно времязатрат модели 1 на моделирование развития возмущений**

Модель	1	2	3	4
Генерация возмущения	0,004	0,0018	0,0034	0,0016
Развитие возмущения	1	0,64	0,5	0,036

поэтому ее времязатраты значительно меньше, чем у других моделей. Модели 2 и 3, в которых отброшены некоторые слагаемые, имеют меньшую алгебраическую размерность, что заметно ускоряет спектральную редукцию. При моделировании генерации возмущений пренебрегается зависимостью основного течения от  $x$ , поэтому спектральный проектор достаточно вычислить только при  $x = 1$  и использовать его для спектральной редукции во всей области источника. Благодаря этому времязатраты на генерацию оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с времязатратами на моделирование развития возмущений. Наиболее затратно в этом случае решение систем линейных алгебраических уравнений на каждом шаге численного интегрирования.

#### 4.1. Неустойчивость Толлмина – Шлихтинга

В данном разделе обсуждаются результаты численных экспериментов с моделями 1–4 при следующих диапазонах значения параметров источника:  $x_0 = 0,1 \div 0,7$  м,  $F = 50 \div 220$  Гц и значении  $\Lambda_z = 1$  м, при котором генерируются почти двумерные возмущения. Известно [2, 30], что при таких значениях параметров доминирует неустойчивость Толлмина – Шлихтинга. Для сравнения результатов различных моделей необходимо в том числе следить за величиной

$$E = \int_0^{y_{\max}} |u|^2 + \frac{|v|^2}{\text{Re}} + \frac{|w|^2}{\text{Re}} dy,$$

характеризующей среднюю плотность кинетической энергии возмущения при фиксированном  $x$ . Эту величину далее будем для краткости называть энергией возмущения.

Типичные зависимости от  $x$  энергии  $E$  возмущений, вычисленных с помощью моделей 1–4 при различных значениях положения  $x_0$  источника возмущений и его частоты  $F$ , представлены на рис. 1 для значений параметров, указанных в табл. 2. Эти и другие аналогичные результаты показали, что среди упрощенных моделей адекватно моделирует генерацию и развитие волн Толлмина – Шлихтинга только модель 3. Модели 2 и 4, в которых отброшена продольная компонента градиента давления, неправильно воспроизводят ведущую часть спектра: в ней отсутствует собственное значение, отвечающее волне Толлмина – Шлихтинга. Поэтому сгенерированное возмущение быстро затухает.

На рис. 2 показаны в некоторой части расчетной области по  $y$  абсолютные величины амплитуд компонент скорости возмущения при  $x = 1$ , то есть сразу за источником, и этого же возмущения при  $x = 4$ , то есть существенно ниже по потоку, рассчитанные полной моделью 1 и упрощенной моделью 3. Также на этом рисунке показана характерная безразмерная толщина пограничного слоя [27, 31], равная 5 при  $x = 1$  и 10 при  $x = 4$ . Видно, что формы амплитуд достаточно близки. Полученная с помощью этих моделей форма амплитуд компонент возмущений характерна для волн Толлмина – Шлихтинга. Кроме того, как показали дополнительные расчеты, при выбранных значениях параметров эти модели дают близкие значения ведущего собственного значения и отвечающих ему компонент скорости локальной моды.

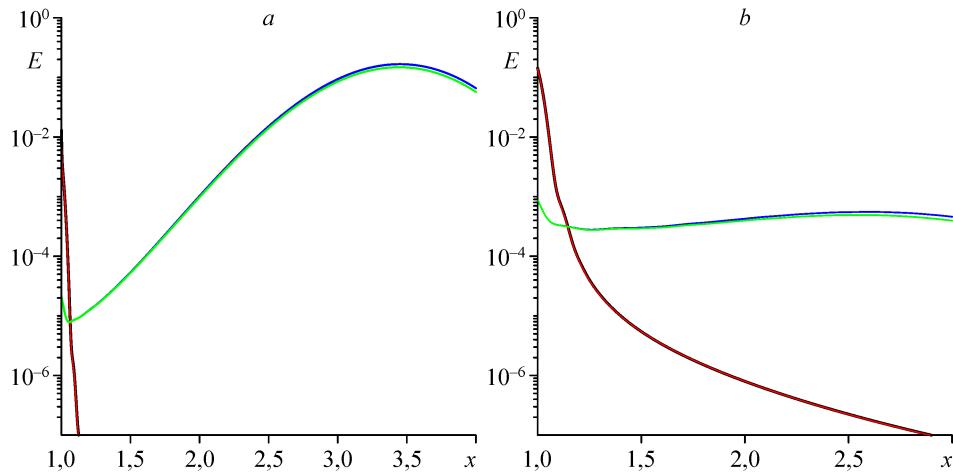


Рис. 1. Зависимость от  $x$  энергии  $E$  возмущения, рассчитанного моделями 1 (зеленый), 2 (красный), 3 (синий), 4 (черный) при  $x_0 = 0,7$  м,  $F = 50$  Гц (а) и при  $x_0 = 0,1$  м,  $F = 220$  Гц (б).

Таблица 2

Значения безразмерных параметров, отвечающие значениям  $x_0$  и  $F$ , указанным в подпись к рис. 1

$x_0$ , м	$F$ , Гц	$\text{Re}$	$\text{Gö}$	$\beta$	$\omega$
0,7	50	$4,674 \cdot 10^5$	6,92	$6,433 \cdot 10^{-3}$	21,99
0,1	220	$6,678 \cdot 10^4$	1,607	$2,431 \cdot 10^{-3}$	13,82

Таким образом, в рассмотренном диапазоне значений параметров, при которых доминирует неустойчивость Толлмина–Шлихтинга, для построения упрощенной модели можно отбрасывать  $\partial^2 u / \partial x^2$ ,  $\partial^2 v / \partial x^2$  и  $\partial^2 w / \partial x^2$ , а  $\partial p / \partial x$  необходимо оставлять.

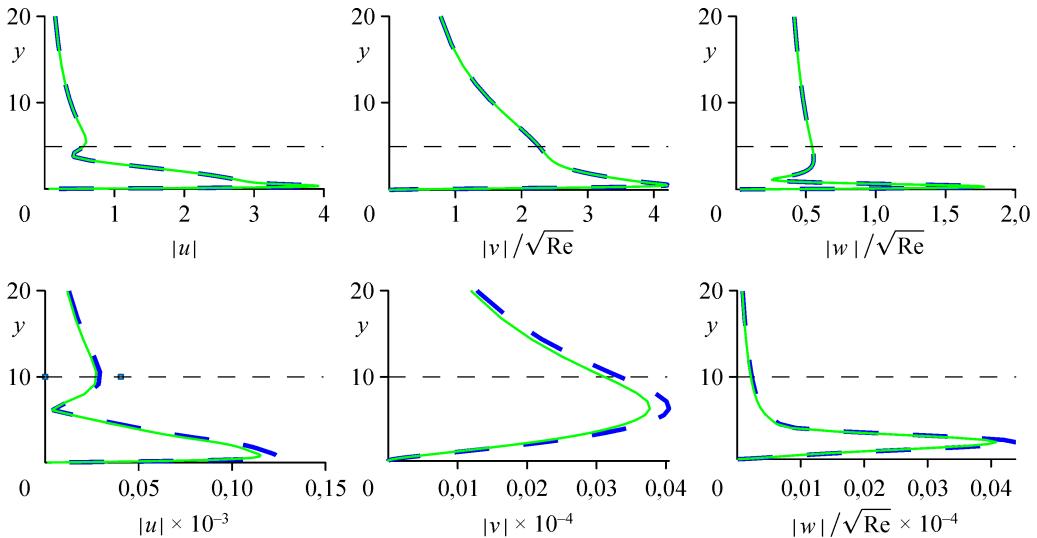


Рис. 2. Абсолютные величины амплитуд компонент скорости возмущения сразу за источником (верхняя строка) и этого же возмущения существенно ниже по потоку (нижняя строка), рассчитанные моделями 1 (зеленый) и 3 (синий) при  $x_0 = 0,7$  м и  $F = 50$  Гц, а также характерная безразмерная толщина пограничного слоя (горизонтальная пунктирная линия).

## 4.2. Неустойчивость Гёртлера

Обсудим теперь результаты численных экспериментов с моделями 1–4, в случае, когда доминирует неустойчивость Гёртлера [2, 30], а именно: при  $x_0 = 0,3$  м,  $F = 1 \div 20$  Гц и значениях  $\Lambda_z = 3 \div 50$  мм, при которых генерируются возмущения с большими углами наклона волнового вектора к продольному направлению.

Типичные зависимости от  $x$  энергии  $E$  возмущений, вычисленных с помощью моделей 1–4 при различных значениях поперечной длины волны  $\Lambda_z$  источника возмущений и его частоты  $F$ , представлены на рис. 3. Соответствующие значения параметров приведены в табл. 3. Эти и другие расчеты в указанных диапазонах параметров показали, что при малых поперечных длинах волн  $\Lambda_z = 3 \div 7$  мм ( $\beta = 1,404 \div 0,6016$ ) результаты, полученные упрощенными моделями, с хорошей точностью совпадают с результатами, полученными с использованием полной модели 1. Вывод сохраняется во всем рассмотренном диапазоне частот  $F$ . Поэтому в этом случае генерацию и развитие вихрей Гёртлера можно с достаточной точностью моделировать моделью 4, которая требует существенно меньших вычислительных затрат, чем остальные модели.

Однако при больших поперечных длинах волн  $\Lambda_z \geq 20$  мм ( $\beta \leq 0,2106$ ) результаты, полученные упрощенными моделями, заметно сильнее отличаются от результатов полной модели. Среди упрощенных моделей наиболее адекватной остается модель 2, в которой отброшено только  $\partial p / \partial x$ . Вывод сохраняется во всем рассмотренном диапазоне частот  $F$ .

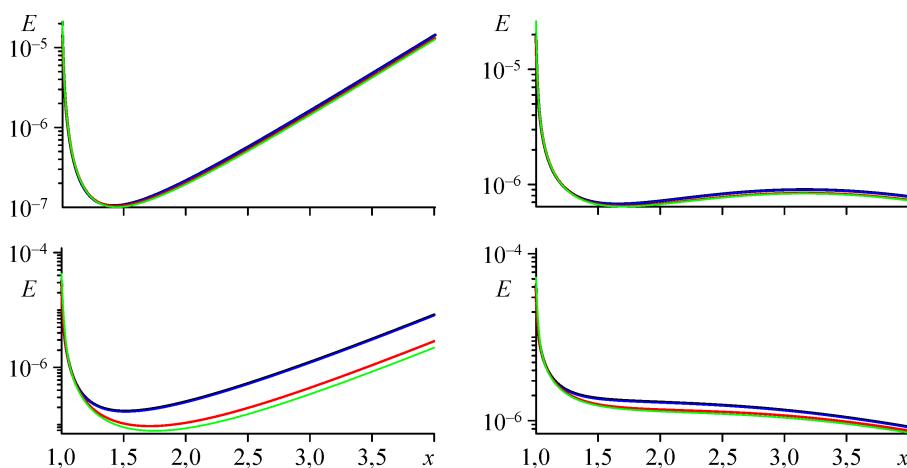


Рис. 3. Зависимость от  $x$  энергии  $E$  возмущения, рассчитанного моделями 1 (зеленый), 2 (красный), 3 (синий), 4 (черный) при  $x_0 = 0,3$  м,  $\Lambda_z = 7$  мм (верхняя строка) и 20 мм (нижняя строка),  $F = 1$  Гц (левая колонка) и 20 Гц (правая колонка).

**Таблица 3**  
Значения безразмерных параметров, отвечающие значениям  $\Lambda_z$  и  $F$ ,  
указанным в подписи к рис. 3

$\Lambda_z$ , мм	$F$ , Гц	Re	Gö	$\beta$	$\omega$
7	1	$2,003 \cdot 10^5$	3,67	0,6016	0,1885
	20				3,77
20	1	$2,003 \cdot 10^5$	3,67	0,2106	0,1885
	20				3,77

На рис. 4 для части расчетной области по  $y$  показаны абсолютные величины амплитуд компонент скорости возмущений при  $x = 1$ , то есть сразу за источником, и при  $x = 4$ , то есть существенно ниже по потоку, для значений параметров  $\Lambda_z = 20$  мм ( $\beta = 0,2106$ ) и  $F = 1$  Гц ( $\omega = 0,1885$ ), при которых наблюдалось наибольшее расхождение между результатами моделей, изображенными на рис. 3. Видно, что среди упрощенных моделей генерацию возмущения удается адекватно моделировать только моделью 3, а развитие — только моделью 2. Упрощенная модель 4 при рассматриваемой большой длине волн не позволяет адекватно моделировать ни генерацию, ни развитие.

Следует отметить, что форма абсолютных величин амплитуд компонент скорости возмущений, изображенных на рис. 4, характерна для вихрей Гёртлера. Кроме того, как показали дополнительные расчеты для рассмотренных значений параметров, все модели дают близкие компоненты скорости ведущей моды и отвечающее ей собственное значение.

Таким образом, в рассмотренном диапазоне значений параметров, при которых доминирует неустойчивость Гёртлера, точность результатов, полученных с помощью упрощенных моделей, зависит от поперечной длины волны возмущения, что согласуется с результатами [32]. При достаточно малых длинах волн все упрощенные модели с хорошей точностью воспроизводят генерацию и развитие возмущений. В частности, для упрощения полной модели в этом случае можно отбрасывать  $\partial p/\partial x$ ,  $\partial^2 u/\partial x^2$ ,  $\partial^2 v/\partial x^2$  и  $\partial^2 w/\partial x^2$ . При достаточно больших длинах волн (характерных для областей неустойчивости вихрей Гертлера в лабораторных экспериментах [2, 5]) для моделирования генерации возмущений можно отбрасывать только  $\partial^2 u/\partial x^2$ ,  $\partial^2 v/\partial x^2$  и  $\partial^2 w/\partial x^2$ , а для моделирования развития возмущений можно отбрасывать только  $\partial p/\partial x$ . Поэтому при решении задач восприимчивости с использованием упрощенных моделей предпочтительно применять разные упрощенные модели для генерации и для распространения возмущений.

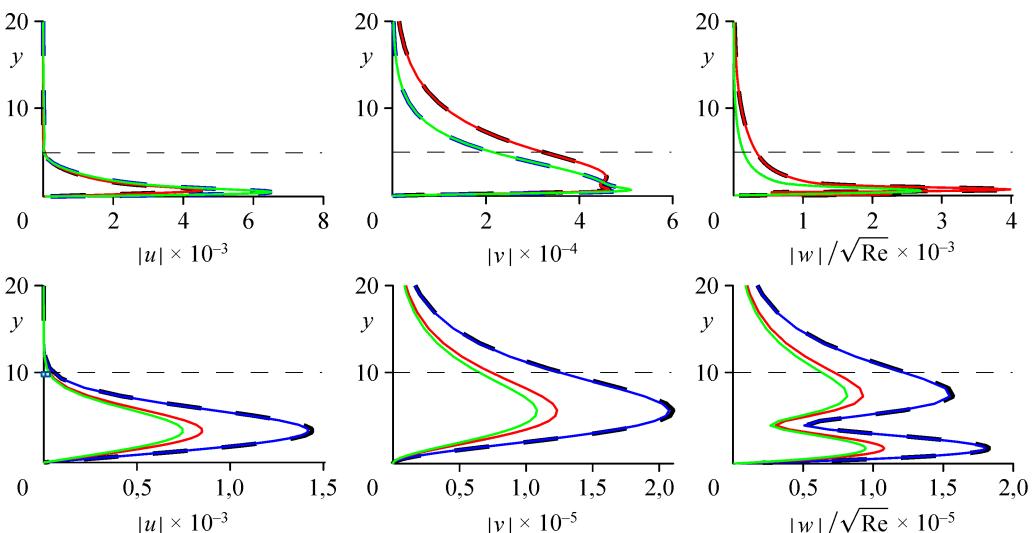


Рис. 4. Абсолютные величины амплитуд компонент скорости возмущения сразу за источником (верхняя строка) и этого же возмущения существенно ниже по потоку (нижняя строка), рассчитанные моделями 1 (зеленый), 2 (красный), 3 (синий) и 4 (черный) при  $\Lambda_z = 20$  мм,  $F = 1$  Гц, а также характерная безразмерная толщина пограничного слоя (горизонтальная штриховая линия).

## Заключение

В данной работе предложен эффективный подход к численному решению линеаризованных уравнений распространения амплитуд возмущений в задачах пространственной гидродинамической устойчивости пограничных слоев. В качестве иллюстрации рассмотрены задачи моделирования волн Толлмина – Шлихтинга и нестационарных вихрей Гёртлера. Одной из главных проблем, возникающих при решении таких задач, является наличие у соответствующих уравнений распространения амплитуд возмущений решений, сколь угодно сильно нарастающих вниз по потоку. Эти решения соответствуют возмущениям, распространяющимся вверх по потоку, которые не наблюдаются на практике, и их надо исключать при численном решении рассматриваемых задач. Для этого на каждом шаге численного интегрирования вниз по потоку уравнений распространения амплитуд возмущений, дискретизированных по нормали к обтекаемой поверхности, найденное решение проектируется на инвариантное подпространство локальных мод этих уравнений, не распространяющихся вверх по потоку.

Проектирование решения является весьма вычислительно затратным. Поэтому, помимо численной модели, основанной на исходных линеаризованных уравнениях распространения амплитуд возмущений, были рассмотрены три упрощенные модели меньшей алгебраической размерности, основанные на уравнениях, в которых отброшены либо продольная компонента градиента давления, либо члены, отвечающие за вязкую диссипацию в продольном направлении, либо все эти члены.

Работоспособность предложенного подхода, а также адекватность описанных упрощенных моделей исследованы на примере моделирования генерации и развития возмущения в пограничном слое над слабо вогнутой пластиной бесконечного размаха, помещенной под нулевыми углами атаки и скольжения в однородный набегающий поток. При этом источник возмущений располагался на некотором расстоянии от передней кромки пластины и представлял собой бесконечную в поперечном направлении мембрану, испытывающую колебания по нормали к поверхности, гармонические в поперечном направлении и по времени. В рамках всех рассмотренных численных моделей источник описывался граничными условиями Бенджамина.

В ходе численных экспериментов продемонстрирована высокая эффективность предложенного подхода. Расчеты проведены в широком диапазоне значений параметров, при которых может доминировать как неустойчивость Толлмина – Шлихтинга, так и неустойчивость Гёртлера. На основе полученных результатов сделаны выводы о возможности адекватного моделирования генерации и/или развития возмущений с помощью упрощенных моделей в рассмотренных диапазонах значений параметров.

## Список литературы

- Luchini P., Bottaro A.** Goertler vortices: a backward-in-time approach to the receptivity problem // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 363. P. 1–23.
- Boiko A.V., Ivanov A.V., Kachanov Yu.S., Mischenko D.A.** Steady and unsteady Goertler boundary-layer instability on concave wall // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2010. Vol. 29. P. 61–83.
- Бойко А.В., Иванов А.В., Качанов Ю.С., Мищенко Д.А.** Исследование слабонелинейного развития нестационарных вихрей Гёртлера // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 4. С. 487–514.
- Иванов А.В., Качанов Ю.С., Мищенко Д.А.** Порождение нестационарных вихрей Гёртлера локальными неоднородностями поверхности. Коэффициенты восприимчивости. // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 5. С. 537–555.
- Boiko A.V. Ivanov A.V., Kachanov Yu.S., Mischenko D.A., Nechepurenko Yu.M.** Excitation of unsteady Goertler vortices by localized surface nonuniformities // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2017. Vol. 31. P. 67–88.

6. Andersson P., Berggren M., Henningson D.S. Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11, No. 1. P. 134–150.
7. Luchini P. Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 404. P. 289–309.
8. Жигулов В.Н., Тумин А.М. Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях. Новосибирск: Наука, 1987. 282 с.
9. Tumin A., Reshotko E. Spatial theory of optimal disturbances in boundary layers // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13, No. 7. P. 2097–2104.
10. Towne A., Colonius T. One-way spatial integration of hyperbolic equations // J. Comp. Phys. 2015. Vol. 300. P. 844–861.
11. Rigas G., Colonius T., Beyar M. Stability of wall-bounded flows using one-way spatial integration of Navier–Stokes equations // 55-th AIAA Aerospace Sci. Meeting, Grapevine, Texas. AIAA Paper. 2017. No. 2017-1881.
12. Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M. Numerical analysis of spatial hydrodynamic stability of shear flows in ducts of constant cross section // Comp. Math. Math. Phys. 2018. Vol. 58, No. 2. P. 700–713.
13. Bertolotti F.P., Herbert Th. Analysis of the linear stability of compressible boundary layers using the PSE // Theor. Comput. Fluid Dyn. 1991. Vol. 3. P. 117–124.
14. Herbert Th. Parabolized stability equations // Annu. Rev. Fluid Mech. 1997. Vol. 29. P. 245–283.
15. Li, F., Malik M.R. Mathematical nature of parabolized stability equations // Laminar-Turbulent Transition: IUTAM Simp. Sendai, Japan. New York: Springer-Verlag, 1995. P. 205–212.
16. Towne A., Rigas G., Colonius T. A critical assessment of the parabolized stability equations // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2019. Vol. 33. P. 359–382.
17. Бойко А.В., Довгаль А.В., Лохов Д.С. Развитие стационарных локализованных возмущений ламинарного течения в присоединенных и оторвавшихся пограничных слоях // Теплофизика и аэромеханика. 2004. Т. 11, № 4. С. 533–539.
18. Salwen H., Grosch C.E. The continuous spectrum of the Orr–Sommerfeld equation. Part 2. Eigenfunction expansions // J. Fluid Mech. 1981. Vol. 104. P. 445–465.
19. Boiko A.V., Nechepurenko Yu.M. Numerical spectral analysis of temporal stability of laminar duct flows with constant cross sections // Comp. Math. Math. Phys. 2008. Vol. 48, No. 10. P. 1–17.
20. Nechepurenko Yu.M. On the dimension reduction of linear differential-algebraic control systems // Doklady Mathematics. 2012. Vol. 86. P. 457–459.
21. Benjamin T.B. Shearing flow over a wavy boundary // J. Fluid Mech. 1959. Vol. 6. P. 161–205.
22. Бойко А.В., Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. Асимптотические граничные условия для расчета положения ламинарно-турбулентного перехода  $e^N$ -методом // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 2. С. 191–207.
23. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. Spectral methods: fundamentals in single domains. Berlin: Springer, 2006. 563 p.
24. Weideman J.A.C., Reddy S.C. A MATLAB differentiation matrix suite // ACM Trans. Math. Software. 2000. Vol. 26, No. 4. P. 465–519.
25. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997. 390 с.
26. Golub G.H., van Loan C.F. Matrix computations. 3rd edition. London: The John Hopkins University Press, 1996. 694 p.
27. Schlichting H., Gersten K. Boundary-layer theory. 9th ed. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2016. 805 p.
28. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems. 2nd edition. Berlin: Springer, 2008. 528 p.
29. Гимон Т.А., Морозов С.О., Лукашевич С.В., Шиплюк А.Н. Методы экспериментального исследования неустойчивости Гёртлера в пограничных слоях (обзор) // Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т. 29, № 2. С. 159–174.
30. Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V. Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2012. 272 p.
31. Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M., Zasko G.V. On the use of probability-based methods for estimating the aerodynamic boundary-layer thickness // Fluids. 2021. Vol. 6, No. 8. P. 267–278.
32. Hall P. The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 130. P. 41–58.

Статья поступила в редакцию 14 апреля 2023 г.,  
после доработки — 15 сентября 2023 г.,  
принята к публикации 21 ноября 2023 г.