

Автор искренне благодарит С. С. Кутателадзе за предложенную тему и за ценные советы при выполнении работы.

Поступила 23 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. К у т а т е л а д з е С. С. Гидродинамическая теория изменения режима кипения жидкости при свободной конвекции. Изв. АН СССР, ОТИ, 1951, № 4.
2. Z u b e r N. Stability of boiling heat transfer. Trans. ASME, 1958, vol. 80.
3. W o l l i s G. B. Some hydrodynamic aspects of two-phase flow and boiling. International developments in heat transfer, part II, 1961.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В. С. Зарубин (Москва)

Рассматривается тонкая непрозрачная сферическая оболочка, среда в полости которой диатермична. Излучение внутренней поверхности принимается серым, диффузным. Извне оболочка поглощает переменный по поверхности удельный тепловой поток $q(\vartheta, \psi)$, причем ϑ и ψ — угловые координаты точки (фиг. 1) сферы ($0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$). Температура по толщине оболочки считается неизменной, а передачей тепла теплопроводностью вдоль оболочки пренебрегается.

К подобной расчетной схеме может быть сведена задача по определению установившегося температурного состояния тонкой непрозрачной оболочки искусственного спутника Земли, используемого в качестве пассивного ретранслятора радиосигналов, метеорологического шара-зонда в разреженных слоях атмосферы и т. п.

Для единичной площадки сферы с координатами ϑ, ψ запишем выражение баланса удельных тепловых потоков на внутренней поверхности

$$q^*(\vartheta, \psi) = \varepsilon' q_0(\vartheta, \psi) + R' q^\circ \quad (1)$$

$$(R' = 1 - \varepsilon', \quad q_0(\vartheta, \psi) = \sigma_0 T^4(\vartheta, \psi))$$

Здесь ε' — степень черноты внутренней поверхности оболочки, $q^*(\vartheta, \psi)$ и q° — эффективный и падающий удельные лучистые тепловые потоки, σ_0 — коэффициент излучения абсолютно черного тела, $T(\vartheta, \psi)$ — температура оболочки, в общем случае переменная по ее поверхности.

Особенность геометрии сферы состоит в том, что q° при принятых выше предположениях не зависит от координат и постоянно для любой точки внутренней поверхности. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим элементарную площадку $dS = r^2 \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta$. Здесь r — радиус сферы, α и β — углы, отсчет которых аналогичен углам ϑ и ψ . Эта площадка посылает на единичную площадку с координатами ϑ и ψ лучистый поток

$$dq^\circ(\alpha, \beta) = q^*(\alpha, \beta) \, d\varphi$$

где $d\varphi$ — элементарный угловой коэффициент [1] двух элементарных площадок с координатами α, β и ϑ, ψ . Проведя через точки A и B с этими координатами дугу большого круга (фиг. 2), получим, что

$$d\varphi = \frac{\cos^2 \gamma}{\pi (AB)^2} \, dS = \frac{\sin \alpha}{4\pi} \, d\alpha \, d\beta$$

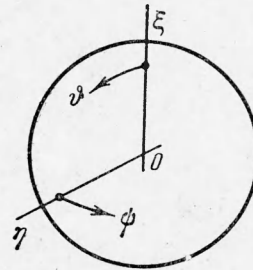
Вся внутренняя поверхность сферы посылает на единичную площадку с координатами ϑ, ψ удельный поток

$$q^\circ = \int_S q^*(\alpha, \beta) \, d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} q^*(\alpha, \beta) \frac{\sin \alpha}{4\pi} \, d\alpha \, d\beta = \text{const} \quad (2)$$

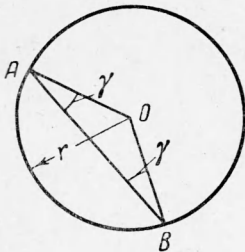
который не зависит от координат площадки.

Для дальнейшего решения задачи выразим $q^*(\vartheta, \psi)$ через результирующий удельный тепловой поток $q^+(\vartheta, \psi)$; получим [2]

$$q^*(\vartheta, \psi) = q_0(\vartheta, \psi) - \frac{R'}{\varepsilon'} q^+(\vartheta, \psi) \quad (3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Из баланса тепловых потоков на наружной поверхности сферы имеем

$$q^+(\vartheta, \psi) = q(\vartheta, \psi) - \varepsilon'' q_0(\vartheta, \psi) \quad (4)$$

Здесь ε'' — степень черноты наружной поверхности сферы. Из (1) — (4) получим

$$\left(1 + \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) q^*(\vartheta, \psi) = q(\vartheta, \psi) + \left(1 + R' \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} q^*(\alpha, \beta) \frac{\sin \alpha}{4\pi} d\alpha d\beta \quad (5)$$

Это уравнение легко решается относительно $q^*(\vartheta, \psi)$, если задано распределение по поверхности сферы поглощаемого извне потока $q(\vartheta, \psi)$. В общем случае имеем

$$\left(1 + \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) q^*(\vartheta, \psi) = q(\vartheta, \psi) + \left(1 + R' \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} q(\alpha, \beta) \frac{\sin \alpha}{4\pi \varepsilon''} d\alpha d\beta \quad (6)$$

Далее из соотношений (3), (4) и (6) находится выражение для $q_0(\vartheta, \psi)$, а по нему вычисляется распределение температуры по поверхности

$$T(\vartheta, \psi) = \left[\frac{q_0(\vartheta, \psi)}{\sigma_0}\right]^{1/4} = [\sigma_0(\varepsilon' + \varepsilon'')]^{-1/4} \left[q(\vartheta, \psi) + \frac{\varepsilon' / \varepsilon''}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} q(\alpha, \beta) \sin \alpha d\alpha d\beta\right]^{1/4} \quad (7)$$

Для примера найдем температурное состояние сферы под действием лишь солнечного излучения. Пусть ось $O\eta$ (фиг. 1) направлена на Солнце, а оптические свойства наружной поверхности соответствуют серому телу, причем $\varepsilon' = \varepsilon''$. Тогда

$$q(\vartheta, \psi) = \varepsilon'' q_s \sin \vartheta \cos \psi \quad \text{при } \cos \psi \geq 0, \quad q(\vartheta, \psi) = 0 \quad \text{при } \cos \psi \leq 0$$

Здесь через q_s обозначена солнечная постоянная. Ее значение примем таким, что $(q_s/\sigma_0)^{1/4} = 390^\circ \text{K}$.

Из формулы (7) получим, что распределение температуры дается выражением

$$T(\vartheta, \psi) = 390^\circ \text{K} \left(\frac{\sin \vartheta \cos \psi}{2} + \frac{1}{8}\right)^{1/4} \quad \text{при } \cos \psi \geq 0 \quad (8)$$

Максимальная температура достигается при $\vartheta = \pi/2, \psi = 0$; она равна $T_{\max} = 347^\circ \text{K}$. Вся не освещенная Солнцем часть сферы ($\cos \psi \leq 0$) имеет температуру $T_{\min} = 232^\circ \text{K}$.

До сих пор сферическая оболочка считалась неподвижной относительно внешних источников излучения. Теперь рассмотрим влияние на ее температурное состояние вращения с постоянной угловой скоростью ω относительно произвольной оси, проходящей через центр сферы. Выбором расположения координатных осей (фиг. 1) совместим ось вращения с осью $O\xi$. Ось отсчета угла ψ примем неподвижной в пространстве. Поэтому для любой точки вращающейся поверхности сферы будет справедливо соотношение $\omega = d\psi/d\tau$, где τ — время.

Тогда вместо уравнения (4) можно записать новое выражение для баланса тепловых потоков с учетом вращения оболочки.

$$q^+(\vartheta, \psi) = q(\vartheta, \psi) - \varepsilon'' q_0(\vartheta, \psi) - c\rho h\omega \frac{dT(\vartheta, \psi)}{d\psi} \quad (9)$$

где c, ρ и h — удельная теплоемкость и плотность материала оболочки и ее толщина.

Считаем, что оболочка вращается достаточно долго, так что устанавливается квазистационарное температурное состояние поверхности. Следовательно,

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{dT(\alpha, \beta)}{d\beta} \sin \alpha d\alpha d\beta \equiv 0$$

Из соотношений (1) — (3) и (9) получим

$$\frac{dT_\omega(\vartheta, \psi)}{d\psi} = k [T^4(\vartheta, \psi) - T_{\omega^4}(\vartheta, \psi)] \quad \left(k = \frac{\varepsilon' + \varepsilon''}{c\rho h\omega} \sigma_0\right) \quad (10)$$

Здесь индекс ω при $T(\vartheta, \psi)$ отличает температуру вращающейся оболочки от температуры невращающейся оболочки при прочих равных условиях. Краевое условие для уравнения (10) вытекает из квазистационарности температурного состояния

$$T_\omega(\vartheta, \psi) = T_\omega(\vartheta, \psi + 2\pi) = \dots \quad (11)$$

т. е. $T_\omega(\vartheta, \psi)$ будет периодической функцией ψ с периодом 2π .

Уравнение (10) в общем случае не имеет точного решения, но может быть решено приближенно. Эффективным является графический путь решения [3]. Траектория произвольной точки вращающейся сферы делится на N равных дуг, на каждую из которых опирается центральный угол $\Delta\psi = 2\pi / N$.

Заменяя уравнение (10) конечно-разностным с производной по углу ψ , взятой один раз вперед, а другой раз — назад, получим

$$T_{\omega, n+1} - T_{\omega, n} = \Delta\psi F_n, \quad T_{\omega, n+1} - T_{\omega, n} = \Delta\psi F_{n+1}$$

где через F обозначена правая часть уравнения (10), а индексы n и $n \pm 1$ указывают угловое положение точки вращающейся сферы $\psi_n = n\Delta\psi$ и $\psi_{n+1} = (n \pm 1)\Delta\psi$.

Складывая предыдущие соотношения, найдем

$$F_{n+1} = -F_n + \frac{2}{\Delta\psi} (T_{\omega, n+1} - T_{\omega, n}) \quad (12)$$

Если задаться значением $T_{\omega, n}$, то $T_{\omega, n+1}$ можно найти как абсциссу точки C_{n+1} пересечения прямой, определяемой уравнением (12) в координатах $T_{\omega, n+1}$, F_{n+1} , с кривой, определяемой зависимостью

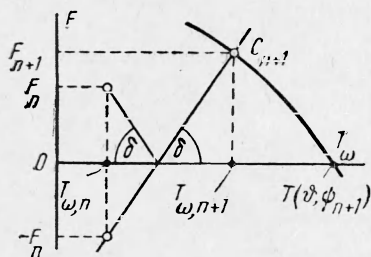
$$F_{n+1} = k [T^4(\psi, \psi_{n+1}) - T_{\omega, n+1}^4]$$

Это построение показано на фиг. 3, где

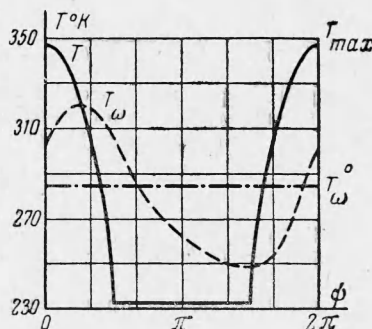
$$\delta = \arctg \frac{2}{\Delta\psi} \frac{m_1}{m_2} = \arctg \frac{N}{\pi} \frac{m_1}{m_2}$$

Здесь m_1 и m_2 — масштабы графика по осям T_{ω} и F в град / мм.

Для получения квазистационарного решения необходимо задаться ожидаемой величиной температуры при любом значении $\psi_n = n\Delta\psi$ и последовательно повторять указанное на фиг. 3 графическое построение до тех пор, пока с желаемой точностью не будет выполнено условие (11). Процесс последовательных приближений сходится при любых $\Delta\psi$, причем погрешность расчета [4] пропорциональна $(\Delta\psi)^3$.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 пунктирной линией показаны результаты графического расчета распределения температуры по дуге большого круга ($\vartheta = 1/2 \pi$) вращающейся оболочки для условий рассмотренного выше примера, причем $N = 12$ и $q_s k / \sigma_0 = 176$ град. Сплошная линия соответствует распределению температуры по той же дуге для неподвижной сферы (формула (8)). С увеличением угловой скорости вращения ($k \rightarrow 0$) распределение температуры по поверхности сферы не зависит от угла ψ и определяется выражением

$$T_{\omega}^{\circ}(\vartheta) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T^4(\vartheta, \psi) d\psi \right]^{1/4} = 390^{\circ}\text{K} \left(\frac{\sin \vartheta}{2\pi} + \frac{1}{8} \right)^{1/4}$$

В частности, $T_{\omega}^{\circ}(1/2\pi) = 285^{\circ}\text{K}$, что соответствует штрих-пунктирной линии на фиг. 4.

Поступила 13 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Б л о х А. Г. Основы теплообмена излучением. Госэнергоиздат, 1962.
2. Ш о р и н С. Н. Теплопередача. Госстройиздат, 1952.
3. Б е р ж е р о н Л. От гидравлического удара в трубах до разряда в электрической цепи. Машгиз, 1962.
4. Б е р е з и н И. С., Ж и д к о в Н. П. Методы вычислений. Физматгиз, т. 2, 1962.