

УДК 539

**ГРАДИЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ЗОНАЛЬНОЙ ДЕЗИНТЕГРАЦИИ МАССИВА ПОРОД  
ВОКРУГ ВЫРАБОТОК ГЛУБОКОГО ЗАЛЕГАНИЯ**

**Ч. Кви<sup>1</sup>, К. Ли<sup>1,2</sup>, Д. Бай<sup>3</sup>, А. И. Чанышев<sup>4</sup>, П. Лиу<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Пекинский университет гражданского проектирования и архитектуры,  
E-mail: qichengzhi65@163.com, г. Пекин, 100044, Китай*

<sup>2</sup>*Институт оборонного проектирования, PLA Университет науки и технологий,  
210007, г. Нанкин, Китай*

<sup>3</sup>*Факультет компьютеризации, инжиниринга и науки, Университет Южного Уэльса,  
г. Понтиприт, CF37 1DL, Великобритания*

<sup>4</sup>*Институт горного дела им Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com  
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрена градиентная деформационная модель зональной дезинтеграции породного массива вокруг выработок глубокого залегания. Определены ее основные уравнения и граничные условия. С помощью численных методов (квазиньютоновский метод и метод стрельбы) решена краевая задача в осесимметричной постановке. Изучено влияние параметров модели на распределение напряжений в упругой и пластической зонах. Обосновываются факторы возникновения зональной дезинтеграции.

*Выработка глубокого залегания, зональная дезинтеграция, градиентная деформационная модель*

---

В конце 70-х – начале 80-х годов прошлого века было открыто явление зональной дезинтеграции в породном массиве вокруг выработок глубокого залегания [1] (рис. 1). Существование явления подтверждено натурными наблюдениями [2]. Его особенность — локализация разрывов в отдельных зонах, чередующихся с зонами относительно слабой трещиноватости породы.

За прошедшие 30 лет механизм формирования этого явления до конца не выяснен, несмотря на выполненный комплекс экспериментальных и теоретических исследований [3–5]. Установлено, что оно представляет собой разрушение массива пород в направлении максимального тангенциального сжимающего напряжения при малых поперечных сжимающих напряжениях [4]. В момент разрушения образуется “ложный” контур выработки с перераспределением вокруг него напряжений, деформаций, смещений. Процесс развивается во времени, пока имеются благоприятные условия для дезинтеграции. В [6] замечено, что из-за потери сплошности породного массива нарушаются условия совместности деформаций Сен-Венана, но при этом сохраняется малое поперечное сжатие. В [7, 8] явление зональной дезинтеграции воспроизведено экспериментами повторно. В [7] сделан вывод, что для зональной дезинтеграции обязательным является реализация условий плоской деформации.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (NSFC грант № 51478027, 51174012), Государственной научно-исследовательской программы “973” (грант № 2015CB0578005), Научного фонда творческих научно-исследовательских коллективов Национального фонда естественных наук Китая (NSFC грант № 51021001), проекта ОНЗ РАН-3.1.

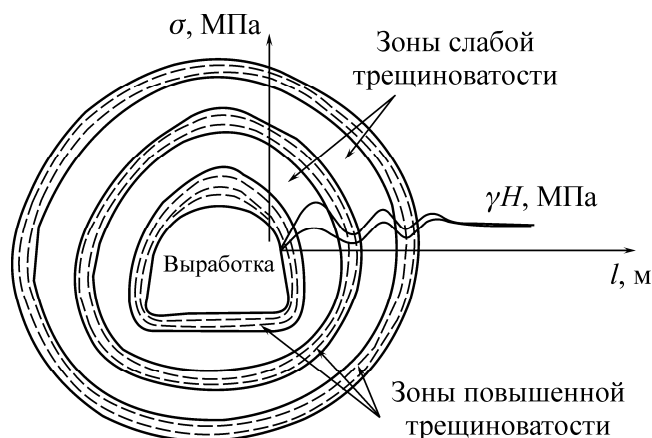


Рис. 1. Зональная дезинтеграция вокруг выработки глубокого залегания

В [9, 10] явление зональной дезинтеграции рассматривается в рамках запредельного деформирования горных пород, которое соответствует процессу разрушения, когда сопротивление среды деформированию падает с ростом самих деформаций. Показывается, что система дифференциальных уравнений плоской деформации для случая запредельного деформирования принадлежит гиперболическому типу с четырьмя вещественными характеристиками. Причем характеристики попарно совпадают в двух крайних случаях: когда только начинается разрушение (они совпадают с характеристиками идеальной пластичности!) и когда разрушение заканчивается. Во втором предельном случае одни характеристики полного разрушения среды повторяют контур самой выработки, другая пара совпадающих характеристик им ортогональна, т. е. перпендикулярна контуру выработки. Обе пары совпадающих характеристик наблюдаются экспериментально: при зональной дезинтеграции массива пород вокруг выработок (при сжатии массива пород снаружи) и в случае взрыва в виде системы радиальных трещин (при сжатии массива пород с помощью газов). В [9, 10] предполагается непрерывное дробление массива пород вокруг выработок с образованием семейства характеристик разрушения, повторяющих контур самой выработки. Размерность в чередовании зон разрушения в экспериментах по зональной дезинтеграции объясняется неоднородностью механических свойств, присущих реальному массиву пород.

Другой подход применен в [11], где отрицаются условия совместности деформаций, применяется модель неевклидовой геометрии, получены квазипериодические решения параметра несовместности деформации  $R$  и напряжений вокруг выработки в радиальном к ней направлении. Здесь важно то, что модель относится к теории упругости с дефектами, в ней не учитываются пластические деформации. Более подробно проблемы и способы описания зональной дезинтеграции представлены еще в [12].

Внутренняя структура породного массива — одна из важнейших характеристик. Существует большое количество теорий высокого порядка точности для учета внутренней структуры среды, в формулировках которых наряду с одним или более чем одним собственными линейными масштабами вводятся еще градиенты соответствующих переменных физического состояния. Градиентные теории разделяются на два класса [13, 14]. Первый — это градиентные деформационные модели [15–19], второй — модели с градиентами внутренних переменных [20–24]. Фундаментальное различие между ними выражается в том, что в первой группе деформационные градиенты как переменные связываются с напряжениями, удовлетворяющими уравнениям равновесия. Во второй группе градиенты внутренних переменных вызываются диссипативными термодинамическими силами, которые входят только в эволюционные урав-

нения для внутренних переменных. Отметим, что модель с градиентами внутренней переменной в виде эффективной пластической деформации применялась в [25], где для нее получено квазипериодическое решение вокруг выработки круглого сечения. Недостатком моделей с градиентами внутренних переменных является то, что градиентные выражения не входят в уравнения равновесия, поэтому есть сложность в отыскании напряженно-деформированного состояния массива пород вокруг выработки с учетом градиента.

С другой стороны, не существует градиентной деформационной модели, которая учитывала бы пластические свойства материалов и давала квазипериодические осциллирующие решения для напряжений и деформаций на основе уравнений равновесия. Данная работа выполнена с использованием последних достижений в области моделирования зональной дезинтеграции. Получены общие определяющие уравнения модели, граничные условия. На основе применения известных численных методов разработаны поля напряжений. Выполнен анализ влияния параметров модели на распределение напряжений в породном массиве, окружающем выработку. Дана оценка значимости этих параметров на процесс формирования зональной дезинтеграции.

### 1. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для описания зональной дезинтеграции рассмотрим градиентную деформационную модель — определим основные ее соотношения, граничные условия. Используем принцип виртуальной работы. Обозначим компоненты вектора смещений  $\vec{u}$  горных пород как  $u_i$ , а компоненты тензора деформации  $\varepsilon$  горных пород —  $\varepsilon_{ij}$ , тогда для малых деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}. \quad (1)$$

Компоненты  $\varepsilon_{ij}$  раскладываем на две части — упругую и пластическую:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (2)$$

Согласно теории деформационных градиентов, потенциал внутренней энергии

$$U = U(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \eta, E^p), \quad (3)$$

где  $E^p = \sqrt{\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$  — эффективная пластическая деформация;  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  — тензор упругих деформаций;  $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$  — градиент тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ;  $\eta$  — энтропия.

В соответствии с принципом виртуальной работы имеем некоторый объем  $V$  и две работы — одна, выполняемая внешними силами на  $V$ , другая — внутренними. Работа внешних сил определяется объемными силами  $\mathbf{F}_b$  и силами поверхностного натяжения  $\mathbf{F}_s$ :

$$W_{\text{ext}} = \int_V \mathbf{F}_b \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{F}_s \delta \mathbf{u} d\Gamma, \quad (4)$$

где  $\delta \mathbf{u}$  — виртуальные перемещения;  $\Gamma$  — поверхность.

Внешняя работа  $W_{\text{ext}}$  уравнивается внутренней  $W_{\text{int}}$ . Внутренняя работа генерируется тензором упругих напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , сила  $\boldsymbol{\Omega}$  определяет тензор пластической деформацией  $\varepsilon_{ij}^p$ , сила  $\mathbf{B}$  сопряжена с эффективной пластической деформацией  $E^p$ , сила  $\mathbf{T}$  вызывает  $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^e dV + \int_V \boldsymbol{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p dV + \int_V \mathbf{B} \delta E^p dV + \int_V \mathbf{T} \delta \nabla \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (5)$$

где

$$\delta E^p = \frac{\varepsilon_{ij}^p \delta \varepsilon_{ij}^p}{\sqrt{\varepsilon_{mn}^p \varepsilon_{mn}^p}} = \frac{\varepsilon_{ij}^p \delta \varepsilon_{ij}^p}{E^p} = p_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^p, \quad (6)$$

$p_{ij} = \varepsilon_{ij}^p / E^p$  — единичный тензор, задающий направление тензора пластической деформации [26].

Принцип виртуальной работы предполагает, что  $W_{\text{ext}} = W_{\text{int}}$ . Отсюда следует, что

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + T_{ijk,kj} + F_{bi}) \delta u_i dV + \int_{\Gamma} [F_{si} - (\sigma_{ij} - T_{ijk,k}) n_j + \kappa_i] n_j \delta u_i d\Gamma + \\ + \int_V (\sigma_{ij} - \Omega_{ij} - Bp_{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^p dV + \int_{\Gamma} (T_{ijk} n_k) n_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial n} d\Gamma = 0, \quad (7)$$

где  $n_j$  — компоненты вектора нормали к поверхности тела;  $\kappa_i = [kn_j - (\delta_{jm} - n_j n_m) \partial_m] (T_{ijk} n_k)$  (при получении последнего выражения использована теорема Гаусса – Остроградского [16]).

Поскольку  $\delta u_i$  и  $\delta \varepsilon_{ij}^p$  — произвольные величины, то из (7) получаем:

$$\sigma_{ij,j} + T_{ijk,kj} + F_{bi} = 0, \quad (8)$$

$$F_{si} - (\sigma_{ij} - T_{ijk,k}) n_j + \kappa_i = 0, \quad (9)$$

$$\sigma_{ij} - \Omega_{ij} - Bp_{ij} = 0, \quad (10)$$

$$T_{ijk} n_k n_j = 0. \quad (11)$$

При этом (8) — это уравнения равновесия с градиентным слагаемым для среды; (9) — граничные условия; (10) — условие текучести; (11) — граничные условия для сил  $T_{ijk}$ . Из (10) следует, что  $\|\sigma_{ij} - \Omega_{ij}\| = B$ , где  $\Omega_{ij}$  — кинематический параметр упрочнения,  $\|\ \ \|$  — евклидова метрика. В случае изотропного упрочнения  $\Omega_{ij} = 0$ , поэтому  $\|\sigma_{ij}\| = B$ . Следовательно, параметр  $B$  имеет значение предела текучести материала.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОРОДНОГО МАССИВА ВОКРУГ КРУГЛОЙ ВЫРАБОТКИ ГЛУБОКОГО ЗАЛЕГАНИЯ В УПРУГОМ СОСТОЯНИИ

Без учета силы тяжести уравнения (8) приобретают вид

$$\sigma_{ij,j} + T_{ijk,kj} = 0. \quad (12)$$

В рамках линейной упругости можно допустить обобщенный закон Гука между  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  и линейную связь между  $\tau_{ijk}$  и  $\eta_{ijk} = u_{k,ij}$ . Согласно [16, 17],

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (13)$$

$$\tau_{ijk} = l^2 [a_1 (\eta_{ipp} \delta_{jk} + \eta_{jpp} \delta_{ik}) + a_2 (\eta_{ppi} \delta_{jk} + 2\eta_{kpp} \delta_{ij} + \eta_{ppj} \delta_{ik}) + \\ + a_3 \eta_{ppk} \delta_{ij} + a_4 \eta_{ijk} + a_5 (\eta_{kji} + \eta_{kij})],$$

где  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе;  $l$  — внутренний линейный масштаб при введении градиентов деформации;  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) — постоянные.

В осесимметричной постановке задачи о выработке (рис. 2) смещения  $u_i$  не зависят от координат  $\theta$  и  $z$ , зависят только от координаты  $r$ . При плоской деформации отличными от нуля являются следующие компоненты  $\varepsilon_{ij}$  и градиенты деформации  $\eta_{ijk}$  [18]:  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \eta_{rrr}, \eta_{\theta\theta r}, \eta_{r\theta\theta}$  и  $\eta_{\theta r\theta}$ , выражаемые через радиальное перемещение  $u_r$  посредством формул:

$$\varepsilon_r = u_{r,r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad (14)$$

$$\eta_{rrr} = u_{r,rr}, \quad \eta_{\theta\theta r} = \frac{1}{r^2} (ru_{r,r} - u), \quad \eta_{r\theta\theta} = \eta_{\theta r\theta} = \frac{1}{r} \left( u_{r,r} - \frac{u_r}{2r} \right).$$

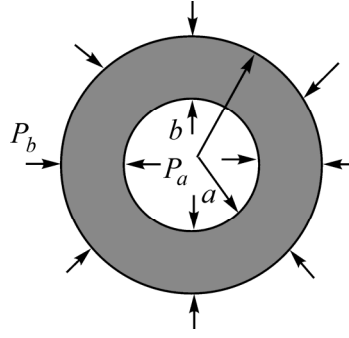


Рис. 2. Модель выработки в виде цилиндра

В этом случае из (12) получаем уравнение равновесия следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \sigma_r - \frac{\partial \tau_{rrr}}{\partial r} - \frac{1}{r} (\tau_{rrr} - \tau_{\theta\theta r} - \tau_{r\theta\theta}) \right] + \frac{1}{r} \left[ \sigma_r - \sigma_\theta - \frac{\partial \tau_{rrr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} (\tau_{rrr} - 2\tau_{\theta\theta r} - 2\tau_{r\theta\theta} - \tau_{\theta r\theta}) \right] = 0 \quad (15)$$

(два других уравнения выполняются автоматически).

Граничные условия (9) и (11) на внутреннем  $r = a$  и внешнем  $r = b$  радиусах цилиндра (рис. 2) переписываются, в цилиндрических координатах имеем

$$T_{r=a} = -\sigma_r + \frac{\partial \tau_{rrr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (-\tau_{rrr} - \tau_{\theta\theta r}) \Big|_{r=a} = p_a, \quad R_{r=a} = \tau_{rrr} \Big|_{r=a} = 0, \quad (16)$$

$$T_{r=b} = \sigma_r - \frac{\partial \tau_{rrr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (-\tau_{rrr} + 2\tau_{r\theta\theta} + \tau_{\theta\theta r}) \Big|_{r=b} = -p_b, \quad R_{r=b} = \tau_{rrr} \Big|_{r=b} = 0. \quad (17)$$

Подставляя (14) в (13), находим:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu \frac{u_r}{r} \right], \quad \sigma_\theta = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \nu \frac{\partial u_r}{\partial r} + (1-\nu) \frac{u_r}{r} \right], \quad (18)$$

$$\begin{cases} \tau_{rrr} = cl^2 \left( 5 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{13}{4} \frac{u_r}{r^2} \right), & \tau_{r\theta\theta} = \tau_{\theta r\theta} = cl^2 \left( \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{11}{4} \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{7}{4} \frac{u_r}{r^2} \right), \\ \tau_{rzz} = \tau_{zrz} = cl^2 \left( \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{3}{4} \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{1}{2} \frac{u_r}{r^2} \right), & \tau_{\theta\theta r} = cl^2 \left( \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{7}{2} \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{11}{4} \frac{u_r}{r^2} \right), \\ \tau_{zzr} = cl^2 \left( \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{5}{4} \frac{u_r}{r^2} \right), \end{cases} \quad (19)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $c$  — положительный коэффициент, связанный с  $a_i$  ( $i=1, \dots, 5$ ).

### 3. ГРАДИЕНТНАЯ ДЕФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ЗОНАЛЬНОЙ ДЕЗИНТЕГРАЦИИ МАССИВА ПОРОД ВОКРУГ ВЫРАБОТКИ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ

#### 3.1. Основные уравнения в пластическом состоянии

Рассмотрим состояние массива пород при учете пластичности. Для геосред в критерии Мора–Кулона прочность на сдвиг  $\tau$  зависит от нормального напряжения  $\sigma$  на поверхности скольжения (рис. 3а) [27]:

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi + K, \quad (20)$$

где  $K$  — когезия;  $\varphi$  — угол внутреннего трения. В главных напряжениях вместо (20) имеем

$$\sigma_1 - A\sigma_3 = \sigma_c, \tag{21}$$

где  $A = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$ ,  $\sigma_c = \frac{2K \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$  — прочность среды на сжатие.

Разупрочнение (рис. 3б) определим зависимостью

$$\sigma_1 - A\sigma_3 = \sigma_c - |M|\varepsilon'_1, \tag{22}$$

где  $|M|$  — модуль разупрочнения;  $\varepsilon'_1$  — прирост деформации за пределом прочности в первом главном направлении.

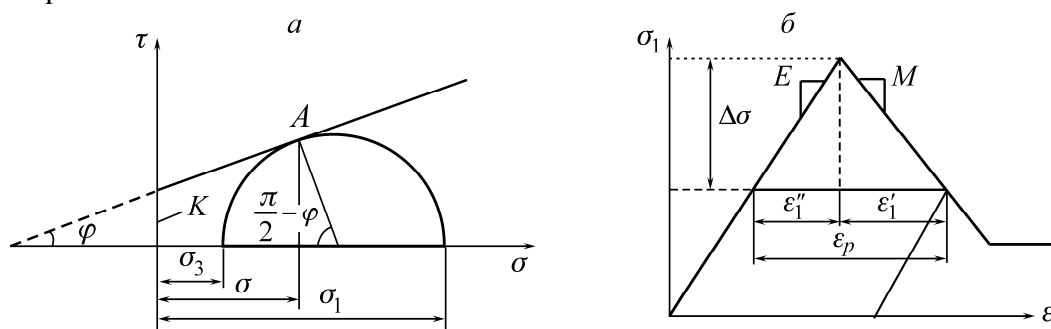


Рис. 3. Круги Мора для главных напряжений (а) и кривая “напряжение–деформация” с разупрочнением (б)

При введении коэффициента поперечной деформации  $\beta = |\varepsilon'_3 / \varepsilon'_1|$  вместо (22) запишем

$$\sigma_1 - A\sigma_3 = \sigma_c - |M|\varepsilon'_1 / \beta. \tag{23}$$

Для плоской деформации определяющие соотношения приводим к виду:

$$\sigma_1 = k_1\varepsilon_1 + m_1\varepsilon_3 + n_1, \quad \sigma_3 = k_2\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_3 + n_2, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, & m_1 &= \frac{-b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, & n_1 &= \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ k_2 &= \frac{-a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, & m_2 &= \frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, & n_2 &= \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ a_1 &= \frac{1 - \nu^2}{E} - \frac{1 + \xi}{|M|}, & b_1 &= \frac{1 + \xi}{|M|} A - \frac{(1 + \nu)\nu}{E}, & c_1 &= \frac{1 + \xi}{|M|} \sigma_c, \\ a_2 &= -\frac{(1 + \nu)\nu}{E} + \frac{\beta + \xi\nu}{|M|}, & b_2 &= -\frac{\beta + \xi\nu}{|M|} A + \frac{1 - \nu^2}{E}, & c_2 &= -\frac{\beta + \xi\nu}{|M|} \sigma_c, & \xi &= |M/E|, \end{aligned}$$

$E$  — модуль Юнга.

### 3.2. Исходная задача в упругопластическом режиме деформирования

На рис. 5 изображены выработка радиусом  $a$ , давление  $P_a$ , приложенное к контуру выработки, затемненный участок — пластическая зона с внешним радиусом  $\rho$ , участок с внутренним радиусом  $\rho$  и внешним  $b$  — упругая зона, к границе с радиусом  $b$  приложено давление  $P_b$  (случай  $b \rightarrow \infty$  соответствует выработке глубокого залегания).

Задачу о выработке решаем на основе градиентной деформационной теории. В каждой из областей деформирования, указанных на рис. 4, имеем уравнение равновесия (15) или

$$\frac{d\sigma_r^*}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r^* - \sigma_\theta^*) = 0, \tag{25}$$

где  $\sigma_r^*$  и  $\sigma_\theta^*$  — обобщенные радиальное и тангенциальное напряжения, полученные из (15):

$$\sigma_r^* = \sigma_r - \left( \frac{d\tau_{rrr}}{dr} + \frac{1}{r}(\tau_{rrr} - \tau_{\theta\theta r} - \tau_{r\theta\theta}) \right), \quad (26)$$

$$\sigma_\theta^* = \sigma_\theta - \left( \frac{d\tau_{\theta r\theta}}{dr} + \frac{1}{r}(\tau_{\theta r\theta} + \tau_{r\theta\theta} + \tau_{\theta\theta r}) \right). \quad (27)$$

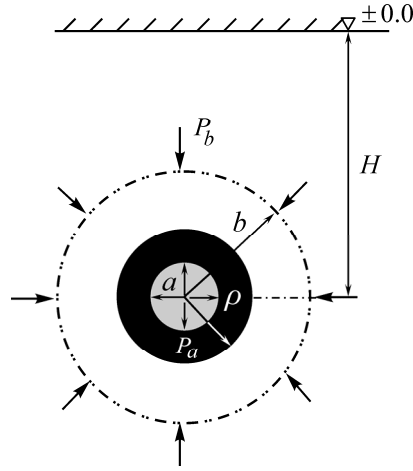


Рис. 4. Цилиндрическая выработка в упругопластическом состоянии

Для решения задачи имеем геометрические соотношения (14) или

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \eta_{rrr} = u_{r,rr}, \\ \eta_{\theta\theta r} = \frac{1}{r^2}(ru_{r,r} - u_r), \quad \eta_{r\theta\theta} = \eta_{\theta r\theta} = \frac{1}{r}\left(u_{r,r} - \frac{u_r}{2r}\right), \end{cases} \quad (28)$$

граничные условия:

$$T_a = -\sigma_r + \frac{\partial\tau_{rrr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(-\tau_{rrr} - \tau_{\theta\theta r}) = p_a, \quad R_a = \tau_{rrr} = 0, \quad (29)$$

$$T_b = \sigma_r - \frac{\partial\tau_{rrr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(-\tau_{rrr} + 2\tau_{r\theta\theta} + \tau_{\theta\theta r}) = -p_b, \quad R_b = \tau_{rrr} = 0. \quad (30)$$

Далее вводим гипотезу, что зависимости для напряжений высокого порядка (19) остаются без изменений и в упругой, и в пластической областях деформирования. В соответствии с [28] значения  $a_i$  берем в виде  $a_1 = -c$ ,  $a_2 = 7c/4$ ,  $a_3 = -c$ ,  $a_4 = 3c$ ,  $a_5 = -c$ , где  $c$  — параметр, определяющий градиент деформации. Тогда

$$\text{для упругой области деформирования: } \sigma_\theta = \lambda \frac{du_r}{dr} + \frac{\lambda + 2\mu}{r} u_r, \quad \sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{du_r}{dr} + \frac{\lambda}{r} u_r; \quad (31)$$

$$\text{для пластической зоны: } \sigma_\theta = k_1 \frac{u_r}{r} + m_1 \frac{du_r}{dr} + n_1, \quad \sigma_r = k_2 \frac{u_r}{r} + m_2 \frac{du_r}{dr} + n_2. \quad (32)$$

Напряжения высокого порядка в соответствии с (19)

$$\begin{cases} \tau_{rrr} = cl^2 \left( 5 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{13}{4} \frac{u_r}{r^2} \right), & \tau_{r\theta\theta} = \tau_{\theta r\theta} = cl^2 \left( \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{11}{4} \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{7}{4} \frac{u_r}{r^2} \right), \\ \tau_{rzz} = \tau_{zrz} = cl^2 \left( \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{3}{4} \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{1}{2} \frac{u_r}{r^2} \right), & \tau_{\theta\theta r} = cl^2 \left( \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{7}{2} \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{11}{4} \frac{u_r}{r^2} \right), \\ \tau_{zzr} = cl^2 \left( \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{5}{4} \frac{u_r}{r^2} \right). \end{cases} \quad (33)$$

В упругой зоне для  $u_r$  после подстановки (26)–(28), (31), (33) в (25) получаем

$$\frac{d^4 u_r}{dr^4} - \frac{11}{5r} \frac{d^3 u_r}{dr^3} - \left[ \frac{61}{20r^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{5cl^2} \right] \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left[ -\frac{\lambda + 2\mu}{5cl^2 r} + \frac{51}{20r^3} \right] \frac{du_r}{dr} - \left[ \frac{51}{20r^4} - \frac{\lambda + 2\mu}{5cl^2 r^2} \right] u_r = 0. \quad (34)$$

Упругая зона имеет размеры  $\rho \leq r \leq b$ . На внешней границе  $r = b$

$$\left\{ \begin{aligned} T_b &= \left\{ -5cl^2 \frac{d^3 u_r}{dr^3} - cl^2 \frac{6}{r} \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left[ \frac{49}{4r^2} cl^2 + (\lambda + 2\mu) \right] \frac{du_r}{dr} + \left( \frac{\lambda}{r} - \frac{19}{2r^3} cl^2 \right) u_r + p_b \right\}_{r=b} = 0, \\ R_b &= \left[ 5 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{13}{4r^2} u_r \right]_{r=b} = 0. \end{aligned} \right. \quad (35)$$

На границе  $r = \rho$  между упругой и пластической зонами справедливо (21) или

$$\sigma_\theta^* - A\sigma_r^* = \sigma_c. \quad (36)$$

Кроме того, в ее окрестности должно выполняться (25). Подстановка (36) в (25) дает

$$\frac{d\sigma_r^*}{dr} + \frac{(1-A)\sigma_r^*}{r} = \frac{\sigma_c}{r}. \quad (37)$$

При  $r = \rho$  имеем систему

$$\sigma_\theta^* - A\sigma_r^* = \sigma_c, \quad \frac{d\sigma_r^*}{dr} + \frac{(1-A)\sigma_r^*}{r} = \frac{\sigma_c}{r}. \quad (38)$$

Заменяя здесь все на  $u_r$ , получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} cl^2 \left\{ \left( 5A - \frac{3}{4} \right) \frac{d^3 u_r}{dr^3} + \left( \frac{27A}{4r} - \frac{23}{4r} \right) \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left[ \frac{\lambda - A(\lambda + 2\mu)}{cl^2} - \frac{18}{4r^2} - \frac{38A}{4r^2} \right] \frac{du_r}{dr} + \left[ \frac{\lambda + 2\mu - A\lambda}{rc^2} + \frac{11}{4r^3} + \frac{31A}{4r^3} \right] u_r \right\} &= \sigma_c, \\ -5 \frac{d^4 u_r}{dr^4} + \frac{20(A-1)}{4r} \frac{d^3 u_r}{dr^3} + \left[ \frac{27(A-1) + 65}{4r^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{cl^2} \right] \frac{d^2 u_r}{dr^2} + & \\ + \left[ \frac{38(1-A) - 107}{4r^3} + \frac{(1-A)(\lambda + 2\mu) + \lambda}{r} \right] \frac{du_r}{dr} + \left[ \frac{31(A-1) + 93}{4r^4} + \frac{\lambda(1-A) - \lambda}{r^2} \right] u_r &= \frac{\sigma_c}{r}. \end{aligned} \right. \quad (39)$$

Это уравнение справедливо при  $r = \rho$ . Для определения  $u_r$  в зоне пластичности имеем (26)–(28), (32), (33). Их подстановка в (25) дает

$$\frac{d^4 u_r}{dr^4} - \frac{11}{5r} \frac{d^3 u_r}{dr^3} - \left[ \frac{61}{20r^2} + \frac{m_2}{5cl^2} \right] \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left[ -\frac{k_2 + m_2 - m_1}{5cl^2 r} + \frac{51}{20r^3} \right] \frac{du_r}{dr} - \left[ \frac{51}{20r^4} - \frac{k_1}{5cl^2 r^2} \right] u_r - \frac{n_2 - n_1}{5cr^2} = 0. \quad (40)$$

Пластическая зона имеет размеры  $a \leq r \leq \rho$ . На границе  $r = a$

$$\left\{ \begin{aligned} T_a &= \left\{ 5cl^2 \frac{d^3 u_r}{dr^3} - cl^2 \frac{5}{2r} \frac{d^2 u_r}{dr^2} - \left[ \frac{59}{4r^2} cl^2 + m_2 \right] \frac{du_r}{dr} + \left( -\frac{k_2}{r} + \frac{25}{2r^3} cl^2 \right) u_r - n_2 - p_a \right\}_{r=a} = 0, \\ R_a &= \left[ 5 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{13}{4r^2} u_r \right]_{r=a} = 0. \end{aligned} \right. \quad (41)$$

Таким образом, получили замкнутую систему уравнений для определения смещения, деформаций, напряжений во всех областях.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Решение (34)–(41) находим с помощью численных методов. Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с двуточечными граничными условиями используем модуль ODE45 в программе MATLAB и методы Ньютона и стрельбы [29, 30]. В расчетах принимались значения: радиус выработки  $a = 4$  м; внутреннее и внешнее давления  $P_a = 0$ ,  $P_b = 100$  МПа; модуль Юнга  $E = 20$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.20$ ; угол внутреннего трения  $\varphi = 20.81^\circ$ ; прочность при одноосном сжатии  $\sigma_c = 50$  МПа;  $\xi = |M/E| = 1.5$ ;



коэффициент поперечной деформации  $\beta = 3.3$ ; внутренний линейный масштаб  $l = 0.04a$ ; параметр  $c = \mu$ . Представляет интерес влияние каждого из этих параметров на решение рассматриваемой задачи, поэтому некоторые параметры оставались постоянными, другие менялись.

#### 4.1. Влияние коэффициента Пуассона $\nu$

Влияние коэффициента Пуассона на механическое поведение породного массива изучено для трех значений:  $\nu = 0.2, 0.3, 0.4$ .

На рис. 5 показано распределение напряжений в пластической зоне при разных значениях коэффициента Пуассона при  $\rho = 10$  м. Система пиковых значений напряжений согласуется с распределением напряжений, получаемым по классической модели (штриховая линия). Видно, что влияние коэффициента Пуассона есть, но оно незначительно.

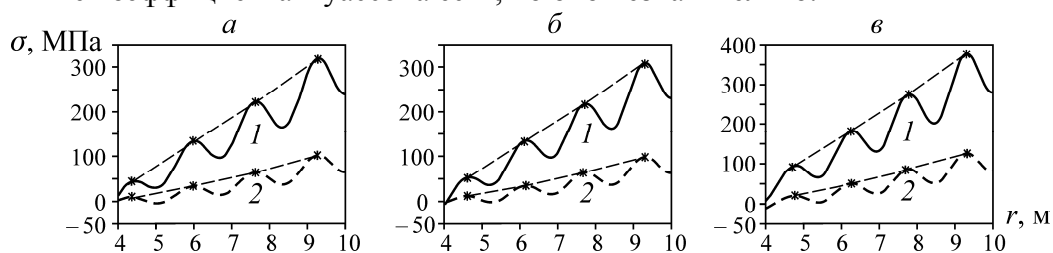


Рис. 5. Распределение напряжений в породном массиве вокруг выработки при  $\nu = 0.2$  (а),  $\nu = 0.3$  (б),  $\nu = 0.4$  (в) (1 — тангенциальные; 2 — радиальные напряжения)

#### 4.2. Влияние модуля разупрочнения $M$

Модуль разупрочнения  $M$  определяется отношением  $\xi$ . Распределение напряжений в породном массиве вокруг выработки при различных значениях  $\xi$  показано на рис. 6. Очевидно, что при малом значении  $\xi$  ( $\xi = 0.1$ ) определяющие соотношения близки к идеальной упруго-пластической модели, распределение напряжения в породном массиве вокруг выработки плавное и монотонное, а квазипериодические колебания очень слабые. С ростом  $\xi$  не только колебания и периодичность распределения напряжения становятся более четко выраженными, но и значения амплитуды и пикового напряжения возрастают, наклон кривой к оси абсцисс становится круче. Согласно этим результатам, свойство разупрочнения горных пород является одним из факторов, контролирующих появление квазипериодических колебаний распределения напряжений в глубине породного массива в области неупругих деформаций.

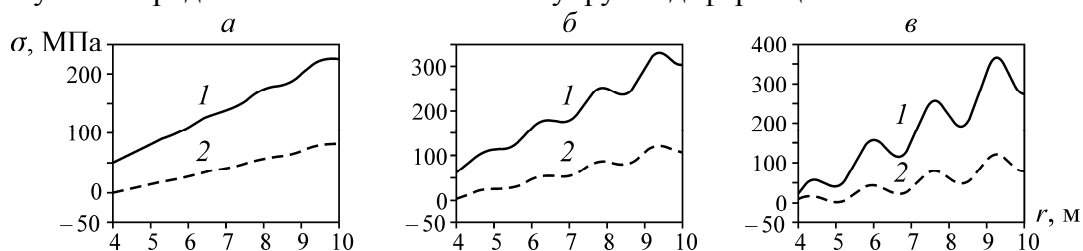


Рис. 6. Распределение напряжений в породном массиве вокруг выработки при  $\xi = 0.1$  (а),  $\xi = 0.5$  (б),  $\xi = 1.5$  (в) (1 — тангенциальные; 2 — радиальные напряжения)

#### 4.3. Влияние внутреннего линейного масштаба $l$ и градиентозависимого параметра упругости $c$

Пусть  $\rho = 10$  м, значения других параметров не изменяются (кроме  $l$  и  $c$ ). Распределения напряжений в породном массиве вокруг выработки получаем при  $l/a = 0.021, 0.04, 0.055$  соответственно. Результаты приведены на рис. 7. Очевидно, что с ростом  $l/a$  число пиков и минимумов быстро сокращается, амплитуда колебаний возрастает. Следовательно, внутренний линейный масштаб  $l$  является важным фактором, влияющим на зональную дезинтеграцию.

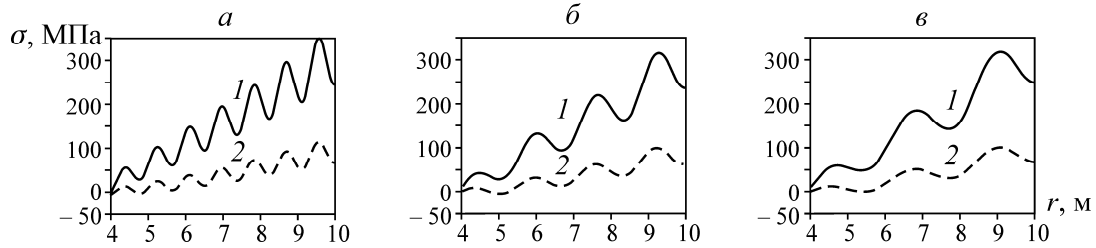


Рис. 7. Распределение напряжений в породном массиве вокруг выработки при  $l = 0.021a$  (а),  $l = 0.04a$  (б) и  $l = 0.055a$  (в) (1 — тангенциальные; 2 — радиальные напряжения)

Для изучения влияния градиентозависимого параметра упругости  $c$  приняты следующие значения: внутренний линейный масштаб  $l = 0.04a$ ; граница между упругой и пластической зонами  $\rho = 10$  м;  $c = 0.55\mu, \mu, 2\mu$ . Численные результаты показаны на рис. 8. С увеличением  $c$  частота колебаний распределения напряжения заметно снижается. При  $c = 2\mu$  только три пика и три минимума имеют место с увеличением интервала между двумя смежными пиками. Влияние  $c$  подобно влиянию  $l$ , очевидна необходимость изучения их комплексного воздействия.

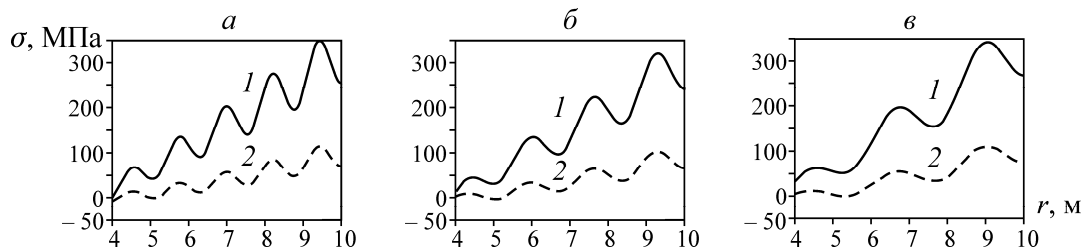


Рис. 8. Распределение напряжений в породном массиве вокруг горной выработки при  $c = 0.55\mu$  (а),  $c = \mu$  (б);  $c = 2\mu$  (в) (1 — тангенциальные; 2 — радиальные напряжения)

На рис. 9 численные результаты распределения напряжений в породном массиве вокруг выработки получены для трех значений  $c$  и  $l$  при фиксированном  $cl^2 = 0.0016a\mu$ . Отметим, что распределения напряжений для этих значений  $c$  и  $l$  полностью совпадают. Отсюда можно заключить, что комбинация двух параметров  $cl^2$  имеет важное значение. Независимо от  $c$  и  $l$  при фиксированном  $cl^2$  свойство периодичности распределения напряжений в породном массиве вокруг выработки остается таким же. Чем меньше  $cl^2$ , тем выше осциллирующая частота распределения напряжений в породном массиве вокруг глубоко залегающей выработки.

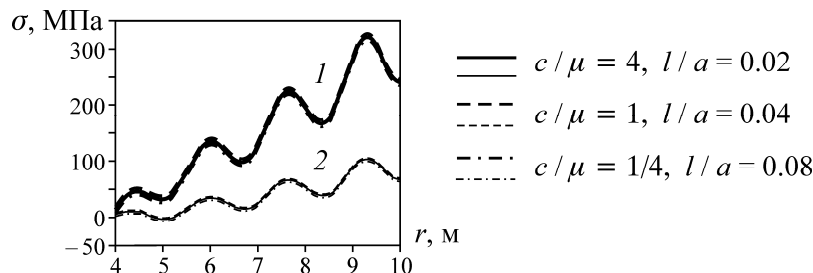


Рис. 9. Распределение напряжений в породном массиве при фиксированном значении  $cl^2 = 0.0016a\mu$  (1 — тангенциальные; 2 — радиальные напряжения)

#### 4.4. Влияние коэффициента поперечной деформации

На рис. 10 показано распределение напряжений в породном массиве вокруг выработки для значений коэффициента поперечной деформации  $\beta = 2.5, 5.0, 10.0$ .

Согласно численным результатам, с ростом  $\beta$  осциллирующая частота кривых распределения радиального напряжения становится слабее, а тангенциального — возрастает.

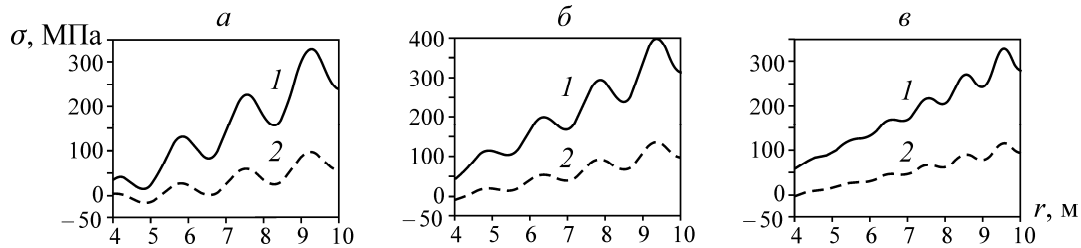


Рис. 10. Распределение напряжений в породном массиве вокруг выработки при  $\beta = 2.5$  (а);  $\beta = 5.0$  (б);  $\beta = 10.0$  (в) (1 — тангенциальные; 2 — радиальные напряжения)

#### 4.5. Влияние относительного уровня нагружения $\bar{\sigma} = P_b / \sigma_c$

Взяты следующие параметры численного анализа поля напряжений в породном массиве вокруг выработки: радиус выработки  $a = 4$  м; внутреннее давление  $P_a = 0$ ; модуль породного массива  $E = 20$  ГПа; коэффициент Пуассона для породного массива  $\nu = 0.20$ ; угол внутреннего трения  $\varphi = 20.81^\circ$ ; прочность на одноосное сжатие  $\sigma_c = 50$  МПа; модульное отношение  $\xi = |M/E| = 1.5$ ; коэффициент поперечной деформации  $\beta = 30.3$ ; градиентозависимый параметр упругости  $c = \mu$ ; внутренний линейный масштаб  $l = 0.04a$ .

При  $\bar{\sigma} = P_b / \sigma_c = 0.5$  внутренняя поверхность горной выработки деформируется пластически, поскольку напряжения при  $r = a$  удовлетворяют критерию Мора – Кулона. Распределения напряжений в породном массиве вокруг выработки показано на рис. 11а; рис. 11б, в представляют собой поля напряжений в породном массиве вокруг выработки при  $\bar{\sigma} = 1.5$  и 2.0 соответственно. На рис. 11б при  $\bar{\sigma} = 1.5$  граница между упругой и пластической зонами наблюдается при  $r = 7.10$  м, отмечены два пика и два минимума. При  $\bar{\sigma} = 2.0$  имеются три пика и три минимума (рис. 11в). Численные результаты соответствуют экспериментальным данным [3]. При  $\bar{\sigma} = 2.0$  граница между упругой и пластической зонами наблюдается при  $r = 8.55$  м (это дальше, чем при  $\bar{\sigma} = 1.5$ ). Следовательно, можно сделать вывод, что число зон разрыва будет расти с увеличением глубины залегания выработки. При уровне относительного нагружения, равном приблизительно 0.5, породный массив вблизи поверхности выработки сначала деформируется пластически. Когда  $\bar{\sigma}$ , т. е. глубина выработки, достигнет определенного значения, образуется явление зональной дезинтеграции.

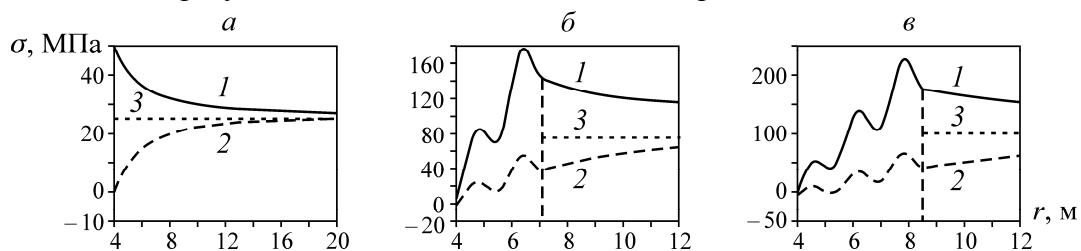


Рис. 11. Распределение напряжений в породном массиве вокруг выработки при  $\bar{\sigma} = 0.5$  (а);  $\bar{\sigma} = 1.5$  (б);  $\bar{\sigma} = 2.0$  (в) (1 — тангенциальные; 2 — радиальные напряжения; 3 — гидростатическое давление)

#### ВЫВОДЫ

Основные результаты расчетов по градиентной модели сводятся к следующему.

Высокое значение начального гидростатического давления является обязательным условием для формирования зональной дезинтеграции. При определенном значении начального гидростатического давления вокруг выработки образуется состояние пластической деформации, которое создает условия для формирования диссипативных структур.

Разупрочнение — одно из обязательных условий формирования зональной дезинтеграции. С ростом модуля разупрочнения увеличиваются не только колебания и периодичность распределения напряжений (они становятся все более ощутимыми), но и амплитуда колебаний и наклон кривой распределения напряжений к оси абсцисс.

Эффекты внутреннего линейного масштаба  $l$  и градиентозависимого параметра упругости  $c$  на зональную дезинтеграцию подобны: с ростом  $l$  и  $c$  число пиков и минимумов уменьшается, а амплитуда колебаний возрастает. При фиксированном значении  $cl^2$  свойство периодичности распределения напряжений в породном массиве вокруг выработки остается неизменным. Чем меньше  $cl^2$ , тем выше осциллирующая частота распределения напряжений, поэтому  $cl^2$  — еще один важный параметр, контролирующий колебания и периодичность распределения напряжения.

С ростом коэффициента поперечной деформации  $\beta$  осцилляционная характеристика кривых распределения радиального напряжения становится все слабее, а осциллирующая частота на кривых распределения тангенциального напряжения увеличивается. Следовательно, этот параметр также влияет на квазипериодические изменения распределения напряжений в породном массиве глубокого залегания.

Коэффициент Пуассона имеет слабое влияние на наклон кривых и амплитуду колебаний.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shemyakin E. I., Fisenko G. N., Kurlenja M. V., Oparin V. N. et al.** The rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. Part I: Data of in situ observations, *Journal of Mining Science*, 1986, Vol. 22, No. 3. — P. 3–13.
2. **Tan Y. L., Ning J. G., Li H. T.** In situ explorations on zonal disintegration of roof strata in deep coalmines, *Int J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2012, Vol. 49. — P. 113–124.
3. **Shemyakin E. I., Fisenko G. N., Kurlenja M. V., Oparin V. N. et al.** The rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. Part II: The fracture of rock in models from equivalent materials, *Journal of Mining Science*, 1986, Vol. 22, No. 4. — P. 3–15.
4. **Shemyakin E. I., Fisenko G. N., Kurlenja M. V., Oparin V. N. et al.** The rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. Part III: Theoretical representation, *Journal of Mining Science*, 1987, Vol. 23, No. 1. — P. 3–8.
5. **Shemyakin E. I., Kurlenja M. V., Oparin V. N., Reva V. N. et al.** The rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. Part IV: Practical application, *Journal of Mining Science*, 1989, Vol. 25, No. 4. — P. 3–9.
6. **Kurlenja M. V., Oparin V. N., Bobrov G. F. et al.** On splitting effect in zones of supporting pressure, *Journal of Mining Science*, 1995, Vol. 31, No. 5. — P. 3–11.
7. **Gu J. C., Gu L. Y., Chen A. M.** Model test study on mechanism of layered fracture within surrounding rock of tunnels in deep stratum, *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2008, Vol. 27, No. 5. — P. 433–4384.
8. **Zhang Q. Y., Chen X. G., Lin B. et al.** Study of 3D geomechanical model test of zonal disintegration of surrounding rock of deep tunnel, *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2009, Vol. 28, No. 9. — P. 1757–1766.
9. **Chanyshv A. I.** On problem of fracture of deformable media. Part I: Basic equations, *Journal of Mining Science*, 2001, Vol. 37, No. 2. — P. 273–288.
10. **Chanyshv A. I.** On problem of fracture of deformable media. Part. II: Discussion of results of analytical solutions, *Journal of Mining Science*, 2001, Vol. 37, No. 3. — P. 392–400.

11. **Gusev M. A., Paroshin A. A.** Non-Euclidian model of rock-mass zone disintegration near underground mining opening, *Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 2001, Vol. 42, No. 1. — P. 147–156.
12. **Зональная дезинтеграция горных пород и устойчивость подземных выработок / В. Н. Опарин, А. П. Тапсиев, М. А. Розенбаум и др.** — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. — 300 с.
13. **Jirasek M., Rolshoven S.** Localization properties of strain softening gradient plasticity. Part I: Strain gradient theories, *Int. J. Solids Struct.*, 2009, Vol. 46. — P. 2225–2238.
14. **Jirasek M., Rolshoven S.** Localization properties of strain softening gradient plasticity. Part II: Theories with gradients of internal variables, *Int. J. Solids Struct.*, 2009, Vol. 46. — P. 2239–2254.
15. **Toupin R. A.** Elastic materials with couple stresses, *Arch. Ration Mech. Anal.*, 1962, Vol. 11, No. 1. — P. 385–414.
16. **Mindlin R. D.** Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 1965, Vol. 28. — P. 845–857.
17. **Eshel N., Rosenfeld G.** Axi-symmetric problems in elastic materials of grade two, *J. Franklin Inst.*, 1975; Vol. 299, No. 1. — P. 43–51.
18. **Fleck N. A., Hutchinson J. W.** Strain gradient plasticity, *Advances in Applied Mechanics*, 1997, Vol. 33. — P. 295–361.
19. **Gurtin M. E.** A gradient theory of single crystal visco-plasticity that accounts for geometrically necessary dislocations, *J. Mech. Phys. Solids.*, 2002, Vol. 50. — P. 5–32.
20. **Aifantis E. C.** On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models, *J. Eng. Mater. Tech.*, 1984, Vol. 106. — P. 326–330.
21. **Aifantis E. C.** Pattern formation in plasticity, *Int. J. Eng. Sci.*, 1995, Vol. 33. — P. 2161–2178.
22. **Polizzotto C.** Unified thermodynamic framework for nonlocal/gradient continuum theories, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2003, Vol. 17, No. 3. — P. 651–668.
23. **Abu Al-Rub R. K., Voyiadjis G. Z. and Bammann J. B.** A thermodynamic based higher-order gradient theory for size dependent plasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 2007, Vol. 44. — P. 2888–2923.
24. **Fleck N. A. and Willis J. R.** A mathematical basis for strain-gradient plasticity theory. Part II: Tensorial plastic multiplier, *J. Mech. Phys. Solids*, 2009, Vol. 57. — P. 1045–1057.
25. **Wang M. Y., Qi C. Z., Qian Q. H., and Chen J. J.** One plastic gradient model of zonal disintegration of rock mass near deep level tunnels, *Journal of Mining Science*, 2012, Vol. 48, No. 1. — P. 54–62.
26. **Ilyushin A. A.** *Plasticity*. OGIZ, Moscow–Leningrad, 1948. — 464 p.
27. **Baklashov I. V., Kartoziya B. A.** *Mechanics of underground buildings and structures*, Nedra, Moscow, 1984. — 415 p.
28. **Zhao J. D., Sheng D. C., and Sloan S. W.** Cavity expansion of a gradient-dependent solid cylinder, *Int. J. Solids Struct.*, 2007, Vol. 44. — P. 4342–4368.
29. **Keller H. B.** *Numerical methods for two-point boundary-value problems*, Blaisdell Pub. Co., Waltham, Massachusetts, 1968. — P. 61–68.
30. **Chambon R., Moullet J. C.** Uniqueness studies in boundary value problems involving some second gradient models, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2004, Vol. 193. — P. 2771–2796.

*Поступила в редакцию 12/XI 2016*